Studii de Logică Matematică

A SURVEY OF MATHEMATICAL LOGIC

WANG HAO

Published by Science Press
Printed in China Peking—1962

TRADUCERE DIN ENGLEZĂ DE S. VIERU ● U. MORGENSTERN

SUPRACOPERTA ȘI COPERTA DE GHEORGHE POPOVICI

Studii de logică matematică

WANG HAO

editura științifică
BUCUREȘTI, 1972

PREFAȚĂ

Cu cîtva timp în urmă, s-a propus editarea unei culegeri din lucrările mele în domeniul logicii matematice; deoarece lucrările tratează numai despre cîteva subdomenii, am adăugat, din note nepublicate, dezbateri asupra unui număr de teme specifice și am înlocuit cîteva lucrări cu descrieri ceva mai generale, incluzînd și unele chestiuni conexe. Rezultatul este cartea de față.

Ca privire de ansamblu, ea nu este nici completă, nici imparțială. De exemplu, logica modală, logica combinatorie și logica polivalentă nu sînt examinate de loc. Mai grav este faptul că lipsește o dare de seamă adecvată a celor mai recente lucrări asupra funcțiilor recursive și asupra intuiționismului, două subiecte care se bucură de cea mai mare atenție a cercetătorilor în logica matematică. Dar aceste două domenii sînt în toiul unei dezvoltări rapide; se pare că nu putem proceda la o selecționare, ci trebuie să urmărim descoperirile noi în desfășurarea lor. Pe de altă parte, nu au fost tratate în mod adecvat lucrările care îmi erau greu accesibile.

Pentru materialul conținut în cartea de față, sînt mult îndatorat diferitelor persoane pentru discuțiile purtate, propuneri și critici. În ce privește teoria axiomatică a mulțimilor și metamatematica, sînt îndatorat mai ales lui Bernays, Kreisel, McNaughton, Quine, Rosser și Specker; în domeniul mașinilor de calcul trebuie să fiu recunoscător lui A. W. Burks, B. Dunham, E. F. Moore, G. W. Patterson și J. C. Shepherdson. În perioada formării mele, Cin Yu-lin, Șen Yu-tin și mai ales Wang Hsien-ciun m-au determinat să mă orientez spre logica matematică. În anii din urmă, numeroase încurajări am primit din partea lui Hu Și-hua.

WANG HAO
iunie 1959

partea întîi
ASPECTE GENERALE

CAPITOLUL I
METODA AXIOMATICĂ

§ 1. GEOMETRIA ŞI SISTEMELE AXIOMATICE

Orice teorie ştiinţifică cuprinde un corp de concepte şi o mulţime de aserţiuni. Cînd sîntem întrebaţi asupra sensului unui concept, adesea explicăm sau definim acest concept cu ajutorul altor concepte. Tot astfel, cînd sîntem întrebaţi despre adevărul unei aserţiuni sau despre temeiul care ne face să fim convinşi de adevărul ei, justificăm îndeobşte convingerea noastră arătînd că aserţiunea urmează, sau poate fi dedusă, din anumite alte aserţiuni acceptate de noi. Dacă — aşa cum mulţi copii obişnuiesc să facă — cineva continuă să ceară la nesfîrşit definiţii sau deducţii, este vădit că mai devreme sau mai tîrziu se va întîmpla una din două. Sau vom descoperi că ne învîrtim în cerc, folosind în răspunsurile noastre concepte şi aserţiuni al căror sens şi justificare am pornit iniţial să le explicăm, sau — la un anumit stadiu — vom refuza să aducem orice alte definiţii şi deducţii, spunînd răspicat că în răspunsul nostru am folosit deja concepte şi aserţiuni fundamentale pe care le adoptăm ca valabile. Cînd problema constă în a înţelege sensul unui concept sau în a vedea că o propoziţie este adevărată, în calea procedeelor circulare nu se ridică nici o obiecţie fundamentală; într-adevăr se poate dovedi că, de fapt, genul cel mai bun de evidenţă care se poate obţine este sprijinul reciproc. Atunci însă cînd sîntem în stare să pornim doar de la un mic număr de idei şi propoziţii primitive, modul liniar de abordare exercită o anumită atracţie, o fascinaţie specială, întrucît problemele de semnificaţie şi adevăr se concentrează în acele cîteva elemente primitive iniţiale plus anumite modalităţi tipice de definire şi deducere.

De obicei, propoziţiile primitive sînt denumite axiome sau postulate. Cînd conceptele şi propoziţiile unei teorii sînt dispuse astfel, încît să fie conforme legăturilor de definibilitate şi deductibilitate, atunci avem un sistem axiomatic al teoriei.

Cel mai cunoscut sistem de axiome este, fără îndoială, sistemul lui Euclid pentru geometrie. Despre *Elementele* lui Euclid s-a spus că au cunoscut o răspîndire largă, cum numai Biblia a mai avut-o. În repetate rînduri, oamenii şi-au mărturisit admiraţia faţă de rigoarea şi temeinicia acestui sistem. Spinoza, de pildă, a încercat să atingă aceeaşi perfecţiune formală în *Etica* lui (*Ethica more geometrico demonstrata*).

Elementele conţin zece propoziţii primitive (axiome) dintre care cinci se numesc idei comune iar cinci postulate. Din acestea precum şi dintr-un număr de definiţii, se deduc, cu o rigoare logică considerabilă, 465 de propoziţii (teo-

reme). Aceeași metodă deductivă a fost folosită de către Newton în mecanică, de către Lagrange în mecanica analitică și de către Clausius în termodinamică. În ultimii ani au apărut sisteme de axiome pentru numeroase ramuri ale matematicii și științelor naturii.

Dacă unificarea, realizată de Euclid, a unor descoperiri mai mult sau mai puțin izolate a însemnat, fără îndoială, un succes impresionant în cadrul programului de sistematizare a matematicii, sistemul său efectiv de axiome, judecat după criteriile astăzi unanim acceptate, este departe de perfecțiunea formală. De exemplu, în loc să considere punctul și linia drept concepte primitive, Euclid le definește ca „ceva ce nu are părți" respectiv ca „lungime fără lățime". Mai mult, cercetările întreprinse în ultima parte a secolului trecut au scos la iveală numeroase axiome pe care Euclid le-a presupus implicit sau le-a formulat într-un mod inadecvat.

Evoluția concepțiilor cu privire la sistemele axiomatice a fost strîns legată de descoperirea geometriilor neeuclidiene. Pe de o parte, axiomele lui Euclid, considerate ca un întreg, păreau atît de firești și evidente, încît erau privite ca logic-necesare sau, după Kant, ca sintetice apriori. Pe de altă parte, încă din timpuri străvechi, mai mulți matematicieni considerau că al cincilea postulat al lui Euclid („axioma paralelelor") nu este de la sine evident în măsură suficientă și au încercat să-l deducă din celelalte axiome. Într-adevăr, această axiomă controversată enunță că printr-un punct dat se poate duce o linie dreaptă, și numai una, paralelă cu o dreaptă dată. Spre deosebire de celelalte axiome, ea cuprinde o referire, prin intermediul conceptului de paralelă, la infinitate. În timpul Renașterii, disputa stîrnită în jurul axiomei s-a reaprins. În secolul al XVIII-lea, Lambert și Saccheri au încercat, fără succes, să derive contradicții din negația acestei axiome.

În cursul primei treimi a secolului al XIX-lea, Lobacevski, Bolyai și Gauss au descoperit, în mod independent, o geometrie consistentă, în cadrul căreia axioma paralelelor era înlocuită prin presupunerea că pot fi duse mai multe paralele printr-un punct dat. În 1854, Riemann a discutat posibilitatea unui spațiu finit, însă nemărginit și a inventat geometrii în care nu există nici o linie paralelă. Toate aceste geometrii, în cadrul cărora al cincilea postulat al lui Euclid este fals, se numesc geometrii neeuclidiene.

Acceptarea posibilității existenței mai multor geometrii deosebite a stîrnit dorința de separare a matematicii abstracte de intuiția spațială. Grassmann, de pildă, sublinia în a sa *Ausdehnungslehre* (1844) distincția dintre o disciplină pur matematică și aplicarea acesteia la natură. Întrucît axiomele nu mai sînt cu necesitate adevărate în lumea fizică, se pot face deducții independent de intuiția spațială. În consecință, trebuie să evităm a ne sprijini pe desene și pe sensul conceptelor geometrice.

În cartea sa asupra geometriei (1882), Pasch adera la această nouă concepție și descoperea numeroase lacune în cuprinsul axiomatizării lui Euclid. Pasch a dezvăluit axiomele cele mai ascunse, axiomele de ordine. Astfel, el nota că avem nevoie de următoarea axiomă: o dreaptă care intersectează o latură a unui triunghi în orice punct care nu este vîrf trebuie să intersecteze și o altă latură a triunghiului.

Celebra lucrare a lui Hilbert cu privire la fundamentele geometriei a apărut în 1899. Ea mergea mai departe, subliniind faptul că axiomatizarea strictă implică a face total abstracție de sensul conceptelor. În afară de axiomele

lui Hilbert pentru geometrie au mai fost propuse sisteme de axiome de către Peano, Veblen, Huntington şi alţii. Hilbert a dispus axiomele în cinci grupe: axiomele de incidenţă, de ordine (relaţia „între"), de congruenţă, axioma paralelelor şi axioma continuităţii.

În aceste sisteme se obişnuieşte să se adopte o logică de bază a inferenţei (teoria cuantificării sau calculul predicatelor), care are de-a face cu constantele logice „dacă-atunci", „nu", „toţi", „unii", „sau", „şi", „dacă şi numai dacă". După cum ştim, există sisteme axiomatice standard pentru teoria cuantificării. Dacă adăugăm un atare sistem unui sistem de axiome pentru geometrie, obţinem un sistem formalizat într-un mod mai minuţios.

În general, există diferite grade de formalizare. Dar, dacă Euclid credea în mod eronat că sistemul său de axiome era complet formal, cum ştim noi în prezent că un sistem, considerat ca formal, nu se va dovedi imperfect formalizat?

În cursul evoluţiei sistemelor de axiome a ieşit la iveală un criteriu precis de formalizare, în funcţie nu de sens şi concepte, ci de trăsături ţinînd de notaţia termenilor şi formulelor.

Înainte de a enunţa acest criteriu, să rezumăm procesul de formalizare. În cadrul unei discipline matematice date există un corp de propoziţii asertate şi neasertate. Din rîndul propoziţiilor asertate, alegem anumite propoziţii cu rol de axiome, din care se pot deduce apoi alte propoziţii. Pentru ca axiomele să fie adecvate, ele trebuie să exprime toate proprietăţile relevante ale termenilor tehnici nedefiniţi, astfel încît deducţiile să poată fi efectuate chiar dacă tratăm termenii tehnici ca pe nişte cuvinte sau simboluri lipsite de sens. Apoi, ne îndreptăm atenţia spre particulele logice, sau spre cuvintele netehnice şi explicităm principiile care determină sensul acestora din urmă sau care, altfel spus, guvernează folosirea lor. Ca rezultat, trebuie să fim în stare să recunoaştem axiomele şi demonstraţiile dintr-o simplă privire asupra modelului notaţional.

În continuare, vorbim despre sisteme formale sau axiomatice numai atunci cînd sistemele satisfac următorul criteriu: există un procedeu mecanic de a determina dacă un model notaţional dat este un simbol care figurează în cadrul sistemului, dacă o combinaţie a unor asemenea simboluri este o formulă bine formată (un enunţ cu sens), o axiomă sau o demonstraţie a sistemului. Astfel, regulile de formare, adică regulile de specificare a formulelor bine formate sînt pe de-a întregul explicite, în sensul că, teoretic, se poate construi o maşină de selectare a tuturor formulelor bine formate ale sistemului, cu condiţia de a folosi o reprezentare fizică convenabilă a simbolurilor de bază. Axiomele şi regulile de inferenţă sînt de asemenea absolut explicite. Scrisă complet, orice demonstraţie în cadrul fiecărui sistem de acest fel constă dintr-un şir finit de linii, astfel încît fiecare linie sau este o axiomă, sau urmează din unele linii precedente din cadrul şirului, pe baza unei reguli precise de inferenţă. De aceea, fiind dată orice demonstraţie propusă, prezentată în conformitate cu cerinţele formale care se pun în faţa demonstraţiilor în cadrul acestor sisteme, putem verifica, în mod mecanic, corectitudinea ei. Din punct de vedere teoretic, pentru orice sistem formal de acest fel putem construi şi o maşină care continuă să imprime toate demonstraţiile diferite ale sistemului, mergînd de la cele mai simple la cele mai complexe, pînă cînd, în cele din urmă, maşina este scoasă din funcţiune, epuizată şi uzată. Dacă presupunem că maşina nu va

ieşi niciodată din funcţiune, orice demonstraţie a sistemului poate fi imprimată de către maşină. Mai mult, întrucît o formulă este teoremă dacă şi numai dacă ea este ultima linie a unei demonstraţii, maşina va imprima şi ea, mai devreme sau mai tîrziu, orice teoremă a sistemului. (Conform unei uzanţe aproape unanim acceptată, vom socoti întotdeauna axiomele unui sistem ca numărîndu-se printre teoremele acestuia).

Obiecte matematice cum sînt numerele şi funcţiile sînt studiate în disciplinele matematice obişnuite. Pe de altă parte, metamatematica, fiind o parte importantă a logicii matematice de astăzi, ia ca obiecte de studiu teoriile matematice. Aceasta devine posibil prin formalizarea teoriilor matematice în cadrul unor sisteme axiomatice, care — spre deosebire de psihologia invenţiei, bunăoară — constituie obiecte adecvate pentru un studiu matematic exact. Într-adevăr, dacă este folosită puternica metodă de reprezentare a simbolurilor prin numere întregi pozitive, numeroase probleme din metamatematică devin probleme privitoare la numerele întregi pozitive, iar deosebirea de materie dintre metamatematică şi matematică devine şi mai puţin sesizabilă.

În afară de sisteme formale, vom avea prilejul să studiem şi sisteme care sînt cvasiformale în următorul sens. Un sistem cvasiformal se obţine dintr-un sistem formal prin adăugarea unor „reguli neconstructive de demonstraţie", care oferă în aparenţă metode definite de demonstraţie, dar în realitate lasă deschise metodele de demonstraţie. Regula cea mai cunoscută este cea a inducţiei infinite, în conformitate cu care, dacă $F(n)$ este teoremă pentru orice întreg pozitiv n, atunci şi "$(n)\ F(n)$" este teoremă. Această regulă nu elucidează metodele prin care s-a stabilit că $F(n)$ este o teoremă pentru orice n.

Privitor la orice sistem formal, putem ridica o serie de probleme diferite, care se împart de obicei în două categorii: problemele sintactice, care se ocupă cu sistemul considerat ca un formalism pur sau ca o maşină operînd cu formule, şi problemele semantice, care se referă la interpretarea sistemului.

De exemplu, este firesc să punem, cu privire la un sistem formal, problema dacă nu s-ar putea întîmpla ca nu numai demonstraţiile, ci şi demonstrabilitatea să se poată verifica în mod mecanic. Dacă lucrul acesta este adevărat pentru un sistem, atunci există o metodă determinată astfel încît, pentru orice enunţ dat al sistemului, metoda ne permite să decidem dacă acest enunţ este teoremă. Asemenea sisteme se numesc sisteme decidabile. Alte probleme sînt: dacă un sistem formal dat este realizabil, adică dacă admite o interpretare; dacă un sistem este consistent, adică dacă nu conţine teoreme contradictorii.

Teoria cuantificării ocupă un loc special în raport cu sistemele formale. Ea poate fi privită fie ca o parte subsidiară a oricărui sistem de axiome, care are propriul său obiect special, sau ca un cadru fundamental comun, astfel încît orice sistem special nu este decît una dintre aplicaţiile ei. Acest din urmă punct de vedere conduce la tendinţa de a trata toate problemele importante cu privire la sistemele formale ca pe nişte probleme privitoare la formule cu cuantori. De exemplu, atît consistenţa cît şi decidabilitatea sistemelor formale sînt reduse la „problema deciziei", adică la problema de a decide asupra realizabilităţii sau validităţii formulelor cu cuantori.

§ 2. PROBLEMA ADECVĂRII

Devii interesat de logica matematică urmînd diverse trasee. Modul de apropiere determină punerea problemelor, iar aceasta, la rîndul ei, determină răspunsurile. Nu este atît de important faptul că abordările diferite duc la răspunsuri diferite date acelorași probleme. Mai curînd se întîmplă ca logicienii de formații diferite să tindă să pună chestiuni diferite. Din această cauză, ei au și vederi diferite cu privire la ceea ce este sarcina logicii. Tranșarea imparțială a acestor deosebiri de vederi este peste puterile unui logician individual, ca atare. Într-adevăr, o soluționare depinde, inevitabil, de judecățile făcute în legătură cu faptul dacă un anumit tip de probleme este mai interesant decît un altul: acesta este un lucru cît se poate de parțial și de subiectiv.

Ceea ce se poate face cu profit este a ne declara interesul față de anumite probleme, însoțind această declarație cu o enunțare a motivelor pentru care aceste probleme ni se par interesante. Dacă printre aceste probleme se află un principiu unificator atractiv, șansele acceptării declarației ca o definiție a logicii vor spori.

Să considerăm corpul tuturor disciplinelor matematice, împreună cu conceptele și teoremele lor, așa cum este formulat într-o formă cristalizată (ca în manuale, de pildă). O problemă importantă a logicii matematice este organizarea și sistematizarea fiecărei discipline în mod separat, ca și a întregului ansamblu, mai mult sau mai puțin în maniera lui Euclid sau, dacă se poate, într-un mod încă și mai minuțios. Amploarea programului de sistematizare a întregii matematici ar trebui să-l satisfacă pe orice om care resimte în mod instinctiv și în doze rezonabile dorința de a construi sisteme. Cu toate acestea, nu există vreun alt program de o asemenea amploare — cu excepția posibilă a programului teoriei fizice unificatoare — care să aducă cu sine avantajele neobișnuite ale obiectivității rezultatelor și apropierii de năzuințele umane vitale.

Organizarea fiecărei discipline în mod separat nu este numai un pas preliminar necesar în construirea unei „logici mari", ci prezintă importanță prin ea însăși. În general, cînd două discipline sînt echivalente, nu avem nevoie să studiem decît una dintre ele. Pe de altă parte, dacă o disciplină importantă A este reductibilă la o disciplină B, fiind însă substanțial mai slabă decît aceasta din urmă, noi nu putem conchide în mod legitim că, întrucît A este o parte din B, A nu trebuie studiată separat. De exemplu, teoria numerelor și analiza sînt amîndouă reductibile la teoria mulțimilor, iar analiza include ca parte proprie teoria numerelor; cu toate acestea, noi întreprindem cercetări separate ale celor trei discipline deoarece fiecare dintre ele prezintă propriile ei probleme specifice. La drept vorbind, sarcina logicii matematice este, în primul rînd, studiul sistematic al acestor trei domenii precum și al disciplinei subiacente, mai elementare, adică a teoriei cuantificării. Mai explicit, teoria numerelor tratează numerele întregi nenegative, analiza tratează numerele întregi și numerele reale nenegative (sau mulțimile de numere întregi), teoria mulțimilor tratează mulțimi, sau clase, sau funcții arbitrare. Opțiunea de a trata aceste ramuri este firească, deoarece conceptele și metodele lor sînt familiare și fundamentale. Pe de o parte, trebuie să se țină seama de ansambluri de fapte preponderent obiective, astfel că pentru preferințele arbitrare rămîne prea puțin loc. Pe de altă parte, dată fiind poziția centrală a acestor ramuri,

clarificarea principiilor lor va aduce sub control fundamentele altor ramuri ale matematicii.

Pentru fiecare din aceste trei domenii, prima problemă este de a găsi un sistem formal care formalizează teoria intuitivă. Fiind dat un atare sistem formal, întrucît el este destinat să fie formalizarea unei teorii intuitive, problema firească ce se pune este adecvarea acestuia. Chestiunea poate lua forme diferite. Una dintre forme este următoarea: pot fi formalizate în cadrul sistemului toate demonstrațiile cunoscute din teoria intuitivă? În multe cazuri, răspunsul este, de regulă, afirmativ: nutrim convingerea că toate teoremele cunoscute precum și demonstrațiile lor din teoria intuitivă capătă replici riguroase în acele sisteme formale ale teoriei care sînt acceptate astăzi în mod general. Derivarea reală a matematicii din orice asemenea sistem este, însă, lungă și greoaie; practic, este imposibil să verificăm pînă la capăt faptul că teoria intuitivă, cu toate detaliile ei, este derivabilă în cadrul sistemului. Pe de altă parte, este greu, de asemenea, să se infirme această pretenție, deoarece pentru aceasta s-ar cere descoperirea unei anumite premise (sau regule de inferență), care era pînă atunci acceptată tacit, fără a fi fost însă detectată.

Chiar atunci cînd se spune că un sistem formal e adecvat unei teorii intuitive, este adesea posibil să construim, în termenii întregului sistem formal, argumente care nu mai pot fi formalizate la rîndul lor în cadrul sistemului, însă sînt totuși de același tip general ca și argumentele formalizabile în cadrul sistemului. Apoi, în teoria intuitivă, adesea noi ezităm mai puțin de a folosi metode din alte discipline; a se vedea, de exemplu, folosirea metodelor analitice în teoria numerelor. Granițele dintre sistemele formale sînt, în genere, mai precis conturate, așa că sistemele formale uzuale ale teoriei numerelor, de exemplu, nu includ metodele analitice. Și, în sfîrșit, ultimul, dar nu cel mai puțin important, fapt este că întotdeauna se pune chestiunea reprezentării fidele: deși toate teoremele și demonstrațiile cunoscute din cadrul teoriei intuitive își au imaginile lor într-un sistem formal, ne putem întreba totuși cît de mult se aseamănă aceste imagini cu originalele lor, adică dacă ele sînt reproduceri naturale sau întrucîtva denaturate. Într-adevăr, dacă urmărim, pur și simplu, să consemnăm argumentele înregistrate în fapt, trecînd însă cu vederea intențiile de admitere a unor scheme generale, se pot construi diverse sisteme formale artificiale pentru una și aceeași teorie dată.

Domeniul unei teorii intuitive este destul de nedeterminat, iar domeniul teoremelor sale cunoscute este încă și mai nedeterminat. De aceea, e de dorit ca, paralel cu demonstrabilitatea teoremelor cunoscute, să introducem și alte criterii de adecvare a formalizării. Întrucît sistemul formal este construit pentru a aproxima teoria intuitivă, teoria este interpretarea vizată a sistemului. Un criteriu de adecvare îl constituie faptul că sistemul admite interpretarea vizată. Un criteriu separat și independent este acela ca sistemul să fie categoric, adică să admită, în esență, o singură interpretare, două interpretări oarecari ale sistemului fiind izomorfe sau, cu alte cuvinte, esențial echivalente. Formalizarea ideală trebuie să fie adecvată potrivit ambelor criterii. În fapt, sistemele formale cele mai interesante nu sînt categorice. Nu este limpede nici măcar dacă aceste sisteme admit întotdeauna interpretările vizate: uneori, teoria intuitivă care urmează a fi formalizată este atît de complexă, încît nu sîntem în stare să specificăm fără ambiguități interpretarea vizată.

Referirea la interpretările intuitive ale unui sistem formal aduce, în mod inevitabil, elemente mai puțin precise și exacte decît cele ale sistemului formal. Necesitatea de a evita aceasta ne conduce la introducerea unui criteriu de adecvare care se referă numai la sistemul formal: un sistem formal este complet, dacă și numai dacă, pentru orice enunț neambiguu din sistem, sau acest enunț, sau negația lui este o teoremă. Acest criteriu nu face nici o referire la teoria intuitivă, drept care poate servi ca criteriu de adecvare numai după ce ne-am convins, în mod independent, că toate ideile teoriei intuitive se pot exprima în sistemul formal, iar teoremele obișnuite se pot demonstra în cadrul acestuia. De îndată ce cădem de acord în această privință, criteriul de completitudine este suficient, deoarece, în mod evident, noi nu dorim ca atît un enunț, cît și negația acestuia să fie demonstrabile într-o teorie oarecare. Pe de altă parte, nu este evident că o formalizare trebuie să fie completă în acest sens, pentru a fi adecvată. Nu este exclus ca un sistem incomplet să reproducă fidel teoria noastră intuitivă incompletă, deoarece s-ar putea întîmpla ca procedeul nostru intuitiv de demonstrație să nu fie capabil să soluționeze anumite chestiuni din cuprinsul teoriei.

Oricum ar fi, problema riguroasă a completitudinii a dus la răspunsuri riguroase. Faimoasa teoremă a lui Gödel stabilește concluzia că sistemele formale uzuale pentru teoria numerelor, analiză și teoria mulțimilor sînt sisteme incomplete în cazul cînd nu conțin contradicții. Mai mult, fiind dat orice sistem formal consistent pentru una dintre aceste teorii se poate construi un enunț al sistemului despre care se poate demonstra că este indemonstrabil. Acest rezultat și demonstrația lui au drept corolar imposibilitatea găsirii unui sistem formal categoric pentru vreuna dintre aceste discipline. Altfel spus, în cursul procesului de rezolvare a problemei mai riguroase a completitudinii se ajunge la concluzii semnificative despre chestiunea inițială, mai puțin precisă, a adecvării. Acest fapt ilustrează un fenomen destul de general: studierea unei probleme inițiale mai vagi, prin mijlocirea unei probleme înrudite, deși aparent diferită, problemă care poate fi tratată exact. Un alt exemplu îl constituie studiul problemei evidenței prin atacarea chestiunilor de necontradicție. Determinarea completitudinii sau consistenței unui sistem formal necesită un volum de informații atît de mare, încît în procesul soluționării acestor chestiuni nu ne putem împiedica să obținem concluzii importante privitoare la problemele mai fundamentale ale adecvării și comprehensibilității sistemului formal.

Teorema de incompletitudine a lui Gödel și alte rezultate generale asupra inadecvării formalizării în ce privește captarea intuiției suscită interesul pentru sistemele cvasiformale și accentuează distincția dintre adevăr și demonstrabilitate. Dacă nici un sistem formal nu poate furniza ca teoreme toate enunțurile adevărate și evita orice enunț fals din teoria numerelor, am dori, eventual, să găsim totuși o caracterizare mai puțin exactă a clasei enunțurilor adevărate, caracterizare întrucîtva mai clară decît teoria intuitivă.

Dacă concepem formulele dintr-un sistem formal ca reprezentînd propozițiile unei teorii intuitive, toate teoremele sistemului ar trebui, desigur, să reprezinte propoziții adevărate. Dar, din rațiuni profunde, noi avem numeroase cerințe față de conceptul de adevăr: astfel, o propoziție și negația ei nu pot fi ambele adevărate; o propoziție generală este adevărată, dacă toate cazurile ei sînt adevărate etc. Ca atare, sîntem împinși să cerem ca un

sistem formal adecvat să fie consistent, ω — consistent, extern consistent etc.

În cazul teoriei cuantificării, problema adecvării se pune altfel. Aici nu avem de-a face atîta cu enunțuri cît cu forme de enunț care conțin litere predicative neinterpretate. O formă de enunț este validă în cazul că dă un enunț adevărat, indiferent de modul cum interpretăm literele predicative din cadrul ei. Iar un sistem al teoriei cuantificării este complet dacă toate formele de enunț valide sînt demonstrabile. Se știe că sistemele uzuale ale teoriei cuantificării sînt complete.

§ 3. PROBLEMA EVIDENȚEI

De regulă, începuturile cercetărilor moderne de fundamente sînt puse în legătură cu descoperirea paradoxelor în teoria mulțimilor, în jurul anului 1900. Cea mai mare parte a matematicienilor activi nu se preocupă prea mult de aceste paradoxe, deoarece modul lor de lucru este mai mult sau mai puțin compartimentat iar formalizarea sistematică le stîrnește un interes minim. Cu toate acestea, există un număr de matematicieni care, gîndind filozofic, le-au luat foarte în serios. Opiniile lor pot fi considerate ca rezultînd din reflecțiile asupra paradoxelor, iar logica matematică contemporană se bazează într-o măsură considerabilă pe aceste opinii și se modelează după ele.

În cursul ultimei jumătăți a secolului al XIX-lea, au avut loc: (1) aritmetizarea analizei, care reduce numerele reale la mulțimi infinite arbitrare, satisfăcînd anumite condiții largi; (2) studiul extensiv al problemei reprezentării funcțiilor arbitrare; (3) inventarea infiniților superiori de către Cantor; (4) cercetarea de către Frege și Dedekind a fundamentelor teoriei numerelor, prin considerente de teoria mulțimilor. Toate acestea au stîrnit, în mod firesc, interesul pentru dezvoltarea unei teorii abstracte a mulțimilor. Apariția paradoxelor a constituit o surpriză pentru mulți matematicieni și filozofi.

O cale de eliminare a paradoxelor rezidă în a construi un sistem axiomatic pentru teoria mulțimilor în cadrul căruia argumentele ce duc la paradoxe să fie excluse. Există diferite moduri de a realiza aceasta. Obținem astfel diferite sisteme axiomatice. Fiecare sistem, în parte, este construit cu scopul de a obține, lipsită de contradicții, o parte cît mai cuprinzătoare din teoria mulțimilor, și a o obține cît mai firesc cu putință. Sistemele se prezintă astfel, încît nu știm cum să obținem contradicții în cadrul lor, dar nu știm nici că nu vor apare vreodată.

Dacă se acceptă că realitatea nu poate fi contradictorie, această necunoaștere a noastră arată sau faptul că mulțimile nu sînt reale, sau cel puțin faptul că noi nu avem un concept clar de mulțime. Aceasta ne duce la problemele vaste în legătură cu realitatea matematică și evidența matematică. Dacă intuiția noastră nu este în măsură să ne asigure că teoremele unei teorii axiomatice a mulțimilor sînt adevărate, se pune întrebarea: care sînt propozițiile matematice pe care intuiția noastră le poate sesiza ca fiind adevărate? Ce fel de evidență deosebește aceste adevăruri matematice intuitive de alte propoziții matematice?

Natura evidenței pare a avea un caracter relativ. Ceea ce este privit ca evident într-un anumit stadiu al procesului intelectual își poate pierde evidența sa intuitivă, la un stadiu mai avansat. De exemplu, informația despre

lucrurile fizice pe care ne-o oferă experienţele simţurilor nu mai este privită ca evidentă după ce s-a introdus o distincţie între calităţi reale şi aparente. Sau, tot aşa, axiomele lui Euclid nu mai sînt privite ca evidente după descoperirea geometriilor neeuclidiene. În mod similar, descoperirea paradoxelor pare a lipsi de evidenţă axiomele teoriei mulţimilor. Sîntem împinşi a căuta o evidenţă primitivă sau absolută care nu va fi discreditată pe o treaptă mai înaltă a dezvoltării intelectuale.

Poincaré şi Russell au blamat folosirea definiţiilor impredicative. Russell a introdus principiul cercului vicios pentru a explica raţional excluderea unor atare definiţii şi a construit, în conformitate cu acest principiu, un sistem formal cunoscut îndeobşte sub numele de teoria ramificată a tipurilor. Sistemul formal prezintă anumite lacune, ceea ce l-a făcut pe Russell să introducă o axiomă a reductibilităţii, axiomă care încalcă principiul cercului vicios şi anihilează complet eforturile iniţiale de excludere a definiţiilor impredicative. În momentul de faţă pare posibil să se construiască sisteme formale şi cvasiformale, care oferă majoritatea consecinţelor axiomei reductibilităţii, conformîndu-se totuşi principiului cercului vicios. Toate aceste sisteme vor fi caracterizate ca sisteme ale teoriei predicative a mulţimilor.

Între intuiţionismul lui Brouwer şi ceea ce considera Hilbert că sînt metodele finitiste există numeroase elemente comune. O coincidenţă extrem de izbitoare între cele două abordări oarecum diferite rezidă în faptul că ambele neagă validitatea generală a legii terţului exclus. Cu alte cuvinte, chiar dacă *tertium non datur* este valabil în cazul multor propoziţii, există altele, astfel încît nici ele şi nici negaţiile lor nu sînt adevărate, în conformitate cu interpretarea intuiţionistă sau cu cea finitistă.

Această poziţie poate să pară mai puţin stranie, dacă acceptăm următoarele propoziţii plauzibile. În primul rînd, există mai multe funcţii arbitrare de numere întregi decît funcţii calculabile; sau, altfel spus, există anumite funcţii de numere întregi care nu sînt calculabile. Faptul poate fi stabilit riguros, dacă sîntem în posesiunea unui concept riguros şi rezonabil asupra funcţiilor calculabile. În orice caz, pare rezonabil să credem că acesta este cazul. În al doilea rînd, aşa cum se afirmă de obicei, existenţă înseamnă constructivitate, conform modului intuiţionist şi finitist de a-l citi pe „există". Urmează, în particular, că o propoziţie „pentru orice m, există un n, astfel încît $R(m,n)$" este adevărată, numai dacă există un procedeu constructiv care dă, pentru orice m, pe acel n care îi corespunde, sau, cu alte cuvinte, dacă există o funcţie calculabilă de m, astfel încît „pentru orice m, $R(m, f(m))$" este o propoziţie adevărată. Prin urmare, între un enunţ şi negaţia lui există o asimetrie. Astfel, dacă o aserţiune generală este satisfăcută numai de către o funcţie necalculabilă, ea nu este nici absurdă şi nici efectiv adevărată. Prin urmare, legea terţului exclus nu mai este valabilă în cazul unei asemenea aserţiuni.

Cîteva exemple ar putea clarifica ceva mai mult chestiunea. Conform unor concepte riguroase, acceptate pe scară largă, privitoare la funcţiile calculabile, se poate descoperi o formulă definită $T(m, n)$, astfel încît nu există nici o funcţie calculabilă f, astfel încît să fie adevărat „pentru orice m, $T(m, f(m))$" dar există o asemenea funcţie f, necalculabilă.

Să considerăm acum următoarele trei propoziţii:

(1) Pentru orice întreg pozitiv m, există un întreg pozitiv n, astfel încît n este mai mare decît m şi n este număr prim (adică un număr ca 2, 3, 5, 7,

etc., care sînt mai mari ca 1 și nu se pot descompune în factori mai mici).

(2) Pentru orice întreg pozitiv m există un întreg n astfel încît $T(m, n)$.

(3) Pentru orice întreg pozitiv m, există un întreg pozitiv n, astfel încît n este mai mare ca m, n este număr prim și $n + 2$ este de asemenea număr prim.

Toate aceste trei propoziții sînt de forma

(4) $(m)\ (En)\ R(m, n)$,

unde $R(m, n)$, este, pentru (1) și (3), o formulă, astfel încît, pentru orice valori date ale lui m și n, adevărul sau falsitatea lui $R(m, n)$ se poate verifica prin calcule elementare.

Să considerăm acum, în legătură cu cele trei exemple, legea terțului exclus:

(5) $(m)(En)R(m, n)\ \vee \sim (m)\ (En)\ R(m,n)$.

În primul rînd, dacă luăm (2) ca propoziția „$(m)\ (En)R(m,n)$“, (5) este falsă, conform interpretării efective a cuantorilor (m), (En) și a negației $\sim$. Aceasta este limpede din cele discutate mai sus .

Propoziția (1) este cunoscută ca adevărată, iar demonstrația obișnuită decurge după cum urmează. Fie dat un întreg pozitiv oarecare m. Să considerăm numărul $m! + 1$ ($m!$ fiind factorial de m, adică produsul tuturor întregilor pozitivi de la 1 la m). Este clar că $m! + 1$ nu este divizibil prin nici unul dintre numerele 2, 3,..., m. Sau $m! + 1$ este un număr prim sau, dacă nu este el însuși număr prim, este divizibil printr-un prim. În orice caz, trebuie să existe un număr prim mai mare ca m, dar nu mai mare ca $m! + 1$.

Din această demonstrație urmează că pentru orice m există un n, astfel că $n \leqslant m! + 1$ și $R(m, n)$ (adică $m < n$ și n este prim). Așadar, pentru orice m dat, teoretic putem parcurge propozițiile $R(m,\ m + 1)$,..., $R(m,\ m! + 1)$ și găsim, prin calcule elementare, cel mai mic număr întreg k, unde $m + 1 \leqslant k \leqslant m! + 1$, astfel că $R(m, k)$. În acest mod, obținem o funcție calculabilă f, astfel încît $(m)\ R(m, f(m))$. În acest mod, demonstrația lui (1) stabilește că (1) este adevărat printr-o interpretare efectivă. Urmează că legea terțului exclus (5) este adevărată, dacă (1) este luat ca „$(m)\ (En)R(m,n)$“.

Nu se știe dacă (3) este clasic, adevărat sau fals. Urmează că nu se cunoaște nici adevărul sau falsitatea lui (3) conform interpretării efective. Noțiunea de metodă efectivă prezintă o ambiguitate. Dacă o înțelegem în sensul clasic, (3) poate fi propoziție adevărată numai dacă este adevărată în interpretarea efectivă a existenței, deoarece $\mu_n(R(m, n)$ ar fi un număr general — recursiv și efectiv. Pe de altă parte, intuiționiștii ar pretinde să se dea o demonstrație constructivă a efectivității unei funcții date, pentru ca această funcție să poată fi acceptată ca efectivă. Așadar, problema revine la chestiunea mai subtilă de a determina ceea ce este o demonstrație constructivă. Conform unei interpretări efective clasice, dacă (3) este o propoziție adevărată în sensul efectiv, ea este adevărată și în sensul clasic; dacă (3) este falsă în sensul efectiv, ea este falsă și în sensul clasic. Pe de altă parte, dacă adoptăm interpretarea de două ori efectivă a intuiționiștilor, există cu totul trei posibilități: (i) propoziția (3) este efectiv adevărată; (ii) ea nu este efectiv adevărată, ci clasic adevărată; (iii) ea este falsă. Dacă avem sau cazul (i) sau cazul (iii) atunci legea terțului exclus (5) este adevărată pentru (3). Dacă, pe de altă parte, are loc cazul (ii), legea nu mai este valabilă pentru (3). Desigur, intuiți-

oniștii resping noțiunea de adevăr clasic și spun, pur și simplu, că noi nu știm dacă (5) este adevărată pentru (3).

Relatarea de pînă acum încearcă să facă plauzibil, într-o măsură rezonabilă, faptul că uneori *tertium non datur* va fi infirmat, dacă se adoptă o interpretare efectivă sau constructivă a particulelor logice din formulele aritmetice. Nu ambiționăm însă cîtuși de puțin de a explica aici pe deplin nici intuiționismul, nici metodele finitiste. De exemplu, relatarea de mai sus nici nu atinge măcar problema pozițiilor diferite în interpretarea lui „dacă-atunci" în concepția intuiționistă și în cea finitistă.

Adesea se subliniază că apariția unei infinități de obiecte în matematică este sursa tuturor necazurilor și că diferitele concepții despre infinit determină diferitele filozofii ale matematicii. Cuvîntul „finitist" trădează, din capul locului, o atitudine oarecum negativă față de infinit. Potrivit lui Brouwer, încrederea în valabilitatea absolută a logicii clasice și, în particular, în aplicabilitatea acesteia la matematica mulțimilor infinite, nu este îndreptățită, deoarece logica clasică a fost inițial abstrasă din matematica mulțimilor finite.

Să presupunem că luăm o mulțime finită W de numere întregi pozitive și o formulă numerică „$R(m, n, k)$", adică o formulă despre care, pentru orice m, n și k dați, se poate decide prin calcule elementare dacă $R(m, n, k)$ este adevărată sau falsă. Să considerăm apoi următoarele două propoziții:

(4*) Pentru orice m din W, există un n în W, astfel încît $R(m, n, k)$ are loc pentru toți k din W.

(5*) Sau (4*) sau $\sim$ (4*).

Pentru oricare m, n, și k în W, putem verifica dacă $R(m, n, k)$ sau $\sim R(m, n, k)$. Întrucît nu există decît un număr finit de triplete (m, n, k), am putea, în principiu, să le cercetăm pe toate, parcurgîndu-le, și să decidem dacă pentru orice m din W există un n în W, astfel că pentru toți k din W, $R, (m, n, k)$. Urmează atunci că (5*) este întotdeauna adevărat. Sau, dacă preferăm, am putea, de asemenea, să eliminăm cuantorii interpretînd cuantorii (m) și (k) ca pe niște conjuncții și pe (En) ca o disjuncție, în care caz (5*) devine o tautologie a funcțiilor de adevăr (*truth-functional tautology*). În orice caz, întrucît adevărul sau falsitatea lui (4*) poate fi efectiv decisă — în principiu — (5*) este o propoziție adevărată. Dacă W este o mulțime infinită, situația se schimbă, deoarece nu putem, nici măcar în principiu, să parcurgem o infinitate de cazuri individuale.

În cadrul acestor considerații, am presupus că $R(m, n, k)$ este o formulă numerică. Dacă nu este numerică, se poate foarte bine întîmpla să existe anumiți întregi m, n și k din W astfel că „$R(m, n, k)$" nu este nici adevărată, nici falsă, în sensul efectiv. Într-adevăr, este posibil, de asemenea, să alegem „$R(m, n, k)$" în așa fel, încît (5*) să nu fie o propoziție adevărată conform interpretării efective, în ciuda faptului că ne interesează numai un număr finit de întregi în W. În mod similar, dacă avem de-a face cu mulțimi finite de numere reale, putem întîlni cu ușurință cazuri în care *tertium non datur* nu este valabil în cadrul interpretării efective. De aceea, s-ar putea crede că accentul pus pe finitudine este deplasat. Se poate răspunde totuși, referindu-ne la faptul că în ambele cazuri infinitul intrase în joc, într-un stadiu

anterior. În general, dacă cineva ia ca punct de plecare numai o mulțime finită de lucruri și numai proprietăți și relații sistematic decidabile, nu poate ajunge niciodată la aserțiuni care au interpretări ambigue (adică nu poate obține valori de adevăr diferite, după cum apelăm la interpretarea clasică sau la cea efectivă a logicii).

Ne-am referit în mai multe locuri la „calculele elementare". Aproximativ vorbind, probleme cum sînt aflarea sumei sau produsului, deciderea faptului dacă un număr dat este prim, determinarea celui mai mare factor prim al unui număr dat etc. pot fi soluționate toate prin calcule elementare. O caracterizare mai exactă a domeniului calculelor elementare se leagă strîns de chestiunea delimitării precise a domeniului funcțiilor calculabile. Pentru moment, vom continua să vorbim într-un mod destul de vag despre formule numeric decidabile, calcule elementare, funcții calculabile.

Există totodată o înrudire destul de strînsă între metodele finitiste ale lui Hilbert și dorința lui Skolem de a se dispensa de cuantori, folosind doar variabile libere și funcții calculabile. Cercetările lui Gentzen și Ackermann asupra consistenței teoriei numerelor au suscitat interes față de principiile inducției transfinite, care par a oferi o extindere destul de firească a metodelor preferate ale lui Hilbert și Skolem. De curînd, Kreisel a combinat aceste tendințe, formulînd un punct de vedere coerent, potrivit căruia numai metodele care se dispensează de cuantori trebuie acceptate ca bază în edificarea fundamentelor.

Pentru a rezuma, există pe de o parte teorii axiomatice fără restricții ale mulțimilor — teorii construite de Zermelo și alții — iar pe de altă parte, există trei poziții constructive ce pot fi caracterizate succint ca teorie predicativă a mulțimilor, intuiționismul și metodele fără cuantori. În fața fiecărei abordări constructive se ridică problema justificării metodelor neconstructive folosite în mod obișnuit în analiză și teoria mulțimilor, metode care sînt formalizate mai mult sau mai puțin adecvat în sistemele axiomatice ale lui Zermelo și ale altora. Este de dorit, de asemenea, să decidem cum se raportează între ele cele trei poziții constructive.

Întrucît metodele neconstructive sînt uzitate pe scară largă în matematică, constructivistul este chemat să justifice aceste metode din punctul lui de vedere. Dacă o asemenea justificare nu este oferită, nu ne rămîne decît să deplîngem fie sterilitatea respectivei orientări constructive, fie obscuritatea inflexibilelor metode neconstructive.

Există diferite moduri de justificare a metodelor neconstructive: demonstrarea unor metode analoge apropiate pe o bază constructivă, reinterpretarea matematicii clasice în cadrul unor sisteme constructive, demonstrarea consistenței sistemelor neconstructive prin anumite metode constructive. Fiecare demers trebuie examinat în mod individual, pentru a se putea stabili meritele și defectele sale.

Pe de altă parte, o matematică nouă demnă de interes mai poate fi creată și aderînd la o abordare specială. De exemplu, intuiționiștii au propria lor teorie a mulțimilor, propria lor teorie a conținutului, în care sînt folosite concepte și distincții noi.

Programul de demonstrare a consistenței formulează destul de riguros problema evidenței. Potrivit lui Hilbert, matematica clasică poate fi privită ca operînd — prin introducerea de „elemente ideale" — o completare și

simplificare a sistemului matematicii intuitive, comprehensive. O demonstrație de consistență ne-ar da certitudinea că idealizarea simplificatoare nu duce la consecințe indezirabile.

Preferințele față de anumite metode sînt determinate negativ prin diferențele acestora față de acele metode care au generat în chip vădit contradicții, iar pozitiv aceste preferințe sînt determinate de trăsăturile lor interesante speciale, trăsături care le sînt proprii. Metodele alese trebuie să difere de cele a căror justificare sau clarificare urmează a fi obținute pe baza lor. Chiar dacă cineva s-ar fi interesat inițial de aceste metode pentru că le găsea firești (din motive biografice, de pildă), virtuțile lor pozitive sînt obiective. Tocmai acest element obiectiv dă seamă de posibilitatea ajungerii la un acord de opinii în materie de fundamente. De exemplu, demonstrațiile din teoria predicativă a mulțimilor sau cele prin metode care se dispensează de cuantori sînt transparente, cel puțin în sensul că putem vedea că nu vor duce niciodată la contradicții.

Problema consistenței, și în genere problema înlocuirii metodelor curente prin metode preferate, poate fi studiată rodnic cu ajutorul sistemelor formale. Formalizarea nu este nicidecum un scop în sine, ci un instrument folositor suplimentar care ne permite să studiem sistematic problema evidenței.

Avem diferite genuri de demonstrație a necontradicției. De exemplu, geometriile neeuclidiene au fost demonstrate a fi necontradictorii relativ la geometria euclidiană, cu ajutorul modelelor. În mod similar, geometria are un model în analiză; de aceea, consistența geometriei se reduce la consistența analizei. O dată ajunși la teoria numerelor, analiză sau teoria mulțimilor, nu mai putem demonstra însă consistența prin folosirea modelelor, deoarece numerele și mulțimile par a fi obiectele matematice cele mai elementare și nici un model din lumea empirică nu ar putea oferi toate detaliile exacte, precis conturate. Așadar, se cer nu demonstrații de consistență relativă, ci demonstrații de consistență absolută, demonstrații care nu presupun consistența altor sisteme. Metoda constă în a examina, în mod uzual printr-o formă de inducție, toate demonstrațiile posibile din cadrul unui sistem și de a stabili că nici una dintre ele nu poate da drept concluzie o contradicție.

Numerele și figurile formează obiectele fundamentale de studiu din matematică; teoriile și obiectele mai abstracte au un caracter derivat în sensul că ele au fost create fie prin analogie și generalizare, fie pentru a rezolva probleme specifice despre numere și figuri. Intuiția noastră funcționează în modul cel mai sigur atunci cînd e vorba de numere și figuri simple. În privința prioritații relative a numerelor și figurilor pot exista păreri diferite. Grecii preferau, pare-se, să gîndească în termeni de figuri și doreau să reducă toată matematica la geometrie. Pe de altă parte, începînd din secolul trecut, aritmetizarea geometriei a devenit un lucru obișnuit.

§ 4. UN SISTEM FOARTE ELEMENTAR: L

Sistemul L conține un singur predicat cu două locuri (o relație diadică), trei nume constante de indivizi: 1, 2, 3, precum și variabilele x, y, z etc. Dacă R are loc între x și y, scriem: $R(x, y)$. Axiomele lui L sînt următoarele:

A1. Există trei obiecte și numai trei: 1, 2, 3: $(x)\ (x = 1) \vee x = 2 \vee x = 3)$; $1 \neq 2 \,\&\, 1 = 3 \,\&\, 2 \neq 3$.

$A2$. $(x) \sim R(x, x)$; cu alte cuvinte, R este o relație ireflexivă.

$A3$. $R(x,y) \,\&\, R(x,z) \supset y = z$; cu alte cuvinte, R este multiunivocă.

$A4$. $R(y,x) \,\&\, R(z,x) \supset y = z$; cu alte cuvinte, R este unimultivocă.

$A5$. $(x)(Ey)R(x,y)$.

$A6$. $R(1,2)$.

Conceptele de model și realizabilitate se pot defini astfel:

Definiția 1. Un sistem de axiome este realizabil dacă există un model sau o interpretare a sistemului. O interpretare a unui sistem de axiome este o atribuire de semnificații termenilor nedefiniți ai sistemului potrivit căreia toate axiomele sînt adevărate.

În particular, un model al sistemului L este determinat prin: (a) un domeniu (nevid) D de obiecte; (b) o regulă care asociază fiecare nume constant unui lucru din D; (c) o relație R^* ca modelul lui R; (d) o regulă de interpretare care, pentru orice obiecte a și b din D, ne spune dacă R are loc între ele și deci, pentru orice enunț al sistemului ne spune dacă este adevărat sau fals; (e) faptul că enunțurile $A1 - A6$ devin adevărate conform cu (a) — (d).

Este foarte ușor să găsim un model pentru L. Să luăm domeniul D ca fiind alcătuit din trei persoane: Cian, Li și Ian, așezați în jurul unei mese rotunde, Cian stînd imediat la dreapta lui Li; să-i asociem cu 1, 2, 3, respectiv, și să interpretăm relația R ca avînd loc între două persoane a și b dacă și numai dacă a stă imediat la dreapta lui b. Se poate verifica faptul că toate axiomele $A1 - A5$ sînt adevărate.

În fapt, putem lua un domeniu arbitrar D cu trei obiecte 1*, 2*, 3*, reprezentînd respectiv pe 1, 2, 3, și obținem un model al sistemului L îndată ce alegem o relație R^*, astfel încît R^* este adevărat pentru toate perechile (1*, 2*), (2*, 3*), (3*, 1*) și falsă pentru celelalte șase. Ca rezultat, nici nu trebuie măcar să folosim nici un fel de interpretări concrete pentru L. Putem spune, în mod abstract, că următoarea matrice definește un model pentru L.

R	1	2	3
1	−	+	−
2	−	−	+
3	+	−	−

Ajungem la noțiunea familiară de izomorfism. Astfel, două modele ale lui L sînt izomorfe sau în esență aceleași, dacă există o corespondență biunivocă între cele două domenii, astfel încît primul model al relației R are loc între două obiecte din primul domeniu, dacă și numai dacă celălalt model al relației R are loc între imaginile lor în cadrul celuilalt domeniu. Urmează că un enunț este adevărat într-un model, dacă și numai dacă este adevărat în celălalt. De exemplu, oricare două modele pentru L care satisfac ambele matricea de mai sus, sînt izomorfe. În general, un sistem de axiome poate conține un număr de termeni tehnici care desemnează proprietăți, relații și operații. În două modele izomorfe ale unui sistem dat, toate acestea trebuie

să corespundă astfel încît, de exemplu, dacă f_1 şi f_2 desemnează acelaşi functor iar a_2, b_2 corespund cu a_1, b_1, atunci $f_1(a_1, b_1)$ trebuie să corespundă cu $f_2(a_2, b_2)$. Această condiţie pentru termenii tehnici impusă modelelor este echivalentă cu cerinţa ca orice enunţ al sistemului să fie adevărat în cadrul unui model, dacă şi numai dacă este adevărat în cadrul celuilalt. De aceea, putem da definiţiile:

DEFINIŢIA 2. Două modele ale unui sistem de axiome S se spune că sînt izomorfe, dacă există o corespondenţă biunivocă între cele două domenii şi orice enunţ al sistemului S este adevărat în cadrul unui model, dacă şi numai dacă este adevărat în cadrul celuilalt.

DEFINIŢIA 3. Un sistem de axiome S este categoric, dacă şi numai dacă fiecare pereche de modele ale lui S sînt izomorfe.

Nu este greu de văzut că sistemul L, determinat de $A1 - A6$, este categoric. În fapt, prin consideraţii combinatorice directe, putem vedea că toate modelele lui L satisfac matricea dată mai sus. Astfel, conform cu $A1$, domeniul fiecărui model al lui L constă din exact trei obiecte (să zicem) 1*, 2*, 3*. În consecinţă, există nouă perechi ordonate de obiecte ale acestui domeniu. Pentru fiecare dintre aceste perechi, R poate să aibă loc sau nu. Aşadar, avem 2^9 interpretări posibile ale relaţiei R, care ar satisface $A1$. Conform cu $A2$, $R(1^*, 1^*)$, $R(2^*, 2^*)$, $R(3^*, 3^*)$ trebuie să fie false. De aceea, avem numai $2^6 (= 2^9/2^3)$ interpretări posibile ale lui R, care satisfac atît $A1$, cît şi $A2$. Dintre aceste 64 de posibilităţi, numai 27 satisfac şi $A3$, deoarece, conform cu $A3$, dacă R este valabilă pentru perechea (1, 2), atunci ea nu poate fi valabilă pentru (1, 3), şi aşa mai departe. Prin consideraţii similare, constatăm cu uşurinţă că dintre cele 27 de posibilităţi rămase, numai 18 satisfac şi $A4$, numai 2 satisfac $A4$ şi $A5$ şi numai una satisface $A4 - A6$. Această interpretare a lui R care satisface toate axiomele $A1 - A6$ este determinată prin matricea pe care am dat-o: R este adevărată pentru perechile (1*, 2*), (2*, 3*), (3*, 1*), şi este falsă pentru celelalte şase perechi. Prin urmare, L este categoric.

Astfel, este clar că axiomele suplimentare servesc, în genere, la reducerea numărului de interpretări distincte permise. Dacă adăugăm suficiente axiome pentru a reduce la una numărul interpretărilor (abstracţie făcînd de izomorfism), obţinem un sistem categoric. Dar dacă mai adăugăm şi alte axiome care ar elimina ultima interpretare, sistemul care rezultă nu ar fi realizabil conform Df. 1.

În fapt, de îndată ce admitem $A1$, problema găsirii unor axiome suplimentare în scopul obţinerii unui sistem categoric şi realizabil este destul de banală. De exemplu, în locul axiomelor $A2 - A6$ putem folosi direct următoarea axiomă:

A1.* R este adevărată pentru perechile (1, 2), (2, 3), (3,1) şi falsă pentru celelalte şase perechi care se pot forma cu 1, 2, şi 3.

$A1$ şi $A1^*$ determină aceeaşi interpretare ca $A1 - A6$. Putem alege şi o altă interpretare posibilă a lui R, folosind o axiomă analogă oarecare în locul lui $A1^*$. Atunci am avea în fiecare caz un sistem diferit, de asemenea categoric.

Dacă omitem din L numele 1, 2, 3, nu mai putem enunța axiomele $A1$ și $A6$, deși mai putem păstra axiomele $A2 - A5$. În locul lui $A1$ putem folosi:

$A1'$. Există numai trei lucruri distincte: $(Ex)\ (Ey)\ (Ez)\ (w)\ (x \neq y\ \&\ y \neq z\ \&\ x \neq z\ \&\ (w = x \vee w = y \vee w = z))$.

Dar nimic asemănător cu $A6$ nu poate fi exprimat în noul sistem. Se poate demonstra, totodată, că sistemul determinat prin axiomele $A1'$ și $A2 - A5$ este categoric și complet; lipsa unei axiome de felul $A6$ este compensată prin diminuarea puterii de expresie, diminuare provocată de omiterea denumirilor 1, 2, 3.

Mai mult, dacă folosim în locul simbolului de relație R un simbol de funcție f, putem înlocui $A2 - A5$ prin următoarele:

$A2'$. $(x)(f(x) \neq x)$.

$A3'$. $(f(y) = f(z) \supset y = z$.

Sistemul determinat prin $A1' - A3'$ este, în esență, același cu sistemul determinat prin $A1'$ și $A2 - A5$; în noua formulare, $A4$ și $A5$ sînt absorbite de logica elementară și de convențiile de notație.

Întrucît L are un model, L este realizabil.

Definiția 4. Un sistem se spune că este complet, dacă fiecare propoziție p *a sistemului este demonstrabilă sau infirmabilă*; *cu alte cuvinte, pentru orice* p, *sau* p *sau* $\sim$ p *este o teoremă.*

Pe baza Df. 3 și Df. 4 putem demonstra:

Teorema 1. Orice sistem categoric este complet.

Dacă un sistem nu este complet, există o propoziție p în sistem astfel, încît nici p și nici $\sim p$ nu constituie o teoremă. În consecință, conform T. 10, dată mai jos în § 7, există un model în care p este adevărat și un model în care p este fals. Aceste două modele nu pot fi izomorfe. În consecință, sistemul nu poate fi categoric.

Întrucît L este categoric, el este complet.

Alegerea unui model mai poate fi privită drept construcție a unui fel de definiție a adevărului pentru sistemul considerat, specificînd propozițiile care sînt adevărate în interpretarea respectivă. În fapt, noi pretindem în orice caz ca toate teoremele să fie adevărate în cadrul modelului și ca, pentru orice propoziție p, sau p, sau $\sim p$, dar nu ambele, să fie adevărate. În consecință, cînd un sistem este complet, teoremele trebuie să coincidă cu propozițiile adevărate. Urmează că, pentru un sistem complet, un procedeu de decizie pentru demonstrabilitate dă totodată un procedeu de decizie pentru adevăr.

Definiția 5. *Un procedeu de decizie pentru demonstrabilitatea (adevărul, validitatea) unui sistem axiomatic este o metodă efectivă prin care, pentru orice propoziție a sistemului, putem decide printr-un număr finit de pași dacă ea este demonstrabilă (adevărată, validă).*

În cazul sistemului L, care are un singur model, putem da imediat, cu ușurință, un procedeu de decizie pentru adevăr și demonstrabilitate. Astfel,

după eliminarea în maniera obișnuită a lui „și", „numai dacă", „(Ex)" putem caracteriza toate propozițiile sistemului L:

(i) Dacă a și b sînt numere din mulțimea 1, 2, 3, atunci Rab și $a = b$ sînt propoziții (atomice);
(ii) Dacă p și q sînt propoziții, $\sim p$ și „p sau q" sînt și ele propoziții.
(iii) Dacă Ha este o propoziție, $(x)\ Hx$ este și ea o propoziție.
(iv) Nu există alte propoziții, cu excepția celor cerute de (i) — (iii).

O definiție a adevărului este pur și simplu:

(i) Dintre propozițiile atomice, propozițiile R12, R23, R31, $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$ sînt adevărate, iar toate celelalte sînt false;
(ii) $\sim p$ este adevărată, dacă și numai dacă p este falsă, „p sau q" este adevărată, dacă și numai dacă p sau q este adevărată;
(iii) $(x)Hx$ este adevărată, dacă și numai dacă $H1$, $H2$, $H3$, sînt adevărate.

Această definiție a adevărului dă o metodă de decizie, deoarece pentru orice propoziție din L, oricît de complexă, putem reduce întotdeauna problema adevărului ei la problema adevărului unor propoziții mai puțin complexe, astfel încît, printr-un număr finit de pași, ajungem la un număr finit de propoziții atomice decidabile conform cu (1).

Prin urmare, există un procedeu de decizie pentru L, atît în ce privește adevărul, cît și în ce privește demonstrabilitatea.

Dacă scoatem $A6$ din L, sistemul obținut nu mai este complet, dar putem vedea cu ușurință că el admite totuși o metodă de decizie pentru demonstrabilitate.

Teorema 2. Există sisteme axiomatice incomplete care au procedee de decizie pentru demonstrabilitate.

În treacăt fie spus, axiomele $A1$ și $A1'$ au un caracter diferit de celelalte axiome, prin faptul că nu asertează proprietăți ale lui R și f, ci specifică direct domeniul acestora. Asemenea axiome se numesc uneori „axiome de limitare".

§ 5. TEORIA ÎNTREGILOR NEGATIVI

Cînd ajungem la teoriile care sînt realizabile numai în domenii infinite, problemele de categoricitate, decidabilitate etc., devin, desigur, mai complexe. Teoria întregilor pozitivi, respectiv teoria întregilor non-negativi, este probabil teoria cea mai importantă. Să considerăm următorul sistem Z (vezi Hilbert-Bernays [7], p. 371) pentru această teorie.

La fel ca L, sistemul Z presupune logica elementară obișnuită, care folosește noțiunile logice de funcții de adevăr, cuantificare și identitate. Unicul nume constant este numeralul 0 iar funcțiile de bază ale lui Z sînt funcțiile adunare $+$, înmulțire $\cdot$ și succesor $'$. Axiomele lui Z sînt tocmai axiomele lui Peano și ecuațiile recursive pentru adunare și înmulțire.

$Z1$. Pentru nici un m, $m' = 0$; cu alte cuvinte, 0 nu este succesorul niciunui număr.

$Z2$. Pentru toți m și n, dacă $m' = n'$ atunci $m = n$; cu alte cuvinte, numerele diferite au succesori diferiți.

$Z3$. Principiul inducției. Pentru orice predicat Hk din Z, dacă HO și, pentru toți m, Hm implică Hm', atunci, pentru toți n, Hn; cu alte cuvinte, dacă o proprietate exprimabilă în Z este inductivă (adică este astfel, încît 0 o are și, pentru orice m, m' o are, dacă m o are), atunci fiecare număr are această proprietate.

$Z4$. Pentru orice m, $m + 0 = m$.

$Z5$. Pentru toți m și n, $m + n' = (m + n)'$.

$Z6$. Pentru orice m, $m \cdot 0 = 0$.

$Z7$. Pentru toți m și n, $m \cdot n' = (m \cdot n) + m$.

Este cunoscut faptul că toate raționamentele obișnuite din teoria numerelor, cu excepția celor ce apelează la analiză, pot fi efectuate în cadrul acestui sistem Z. Cu privire la acest sistem, Gödel a demonstrat următoarea teoremă celebră (a se vedea și paragraful următor):

Teorema 3. Fie S sau Z sau un sistem care conține pe Z ca parte. Dacă S este consistent, atunci există un enunț al lui S de forma „Pentru toți m, Hm", care nu este nici demonstrabil nici infirmabil în S, deși HO, HO', HO'' ... sînt toate demonstrabile în S. În consecință, dacă S este consistent, S este incomplet și incompletabil.

Din această teoremă și din teorema 1 urmează că nici un sistem S de acest fel nu este categoric. În speță:

5.1. Sistemul Z nu este categoric.

Fie N sistemul obținut din Z prin omiterea adunării și înmulțirii, precum și a axiomelor $Z4$—$Z7$. În timp ce Z este incomplet, se poate demonstra cu ușurință, prin metode cunoscute, că sistemul N este, pe de altă parte, complet și decidabil (cf. 7], § 6). La prima vedere, acest fapt poate părea paradoxal, deoarece, în mod evident, în N se pot demonstra mai puține teoreme decît în sistemul incomplet Z. Faptul este însă compensat cu prisosință prin descreșterea simultană a puterii de expresie. Dacă privim un sistem de axiome ca un mijloc de selecționare a unor teoreme, din rîndul unor candidați, putem spune că deși N selecționează mai puține teoreme, candidații sînt încă și mai puțini (în comparație cu cei din Z), astfel încît din fiecare doi candidați unul este selectat efectiv prin axiomele lui N.

Completitudinea și decidabilitatea lui N depind, în esență, de posibilitatea eliminării cuantorilor. Să definim termenii lui N în felul următor: (1) 0 și variabilele m, n etc. sînt termeni; (2) dacă b este un termen, b' este de asemenea un termen. Să numim ecuațiile și inegalitățile dintre termeni propoziții atomice ale lui N. Lema fundamentală pentru eliminarea cuantorilor este următoarea. Se poate demonstra în N că orice propoziție de forma „Pentru toți m, Hm", unde Hm este o conjuncție de propoziții, este echivalentă cu o conjuncție de propoziții care nu mai conține variabila m și nu conține nici o variabilă care nu ar intra în Hm. Acestea se pot reduce, eventual, la propoziții atomice. Omitem demonstrația, extrem de elementară, a acestui fapt.

5.2. Sistemul N este complet decidabil.

Problema dacă N este categoric este mai complexă. Întrucît N este complet și întrucît în orice model și pentru orice enunț p, p este adevărat (sau fals), dacă și numai dacă $\sim p$ este fals (sau adevărat), urmează că orice enunț din N, dacă este adevărat într-un model pentru N, este adevărat în cadrul tuturor modelelor pentru N. Cu toate acestea, N nu este categoric. Astfel, conform teoremei 3, trebuie să existe un model pentru Z în cadrul căruia enunțurile HO, HO', HO'',..., sînt toate adevărate, însă „Pentru toți m, Hm" este fals. Altfel spus, există un model pentru Z, în care domeniul conține nu numai modele pentru 0, 0′, 0″ ..., fiecare obținîndu-se din 0 prin aplicarea de un număr finit de ori a operatorului succesor′, ci conține și alte obiecte. Omițînd dintr-un atare model părțile care au de-a face cu adunarea și înmulțirea, obținem un model pentru N, al cărui domeniu conține și alte obiecte, pe lîngă modelele pentru numerele 0, 0′, 0″ etc. Un asemenea model pentru N nu este, desigur, izomorf cu modelul standard pentru N. În consecință, N nu este categoric.

Teorema 4. Există sisteme axiomatice care sînt complete însă nu categorice.

Este limpede că o cauză care face ca Z să nu fie categoric este faptul că axiomele nu sînt adecvate pentru restrîngerea domeniului de obiecte la 0 și la obiectele obținute din 0 prin aplicarea operatorului succesor de un număr finit de ori. Vom spune că un model cu un asemenea domeniu pentru întregi (nenegativi) este un model cu întregi regulați. Mai rămîne problema dacă două modele oarecare cu întregi regulați pentru Z sînt întotdeauna izomorfe. După cum se constată, demonstrația obișnuită a categoricității axiomelor lui Z ne asigură că răspunsul la această chestiune este afirmativ. În consecință, dacă adăugăm la Z o axiomă de limitare în scopul restrîngerii domeniului oricărui model la întregi regulați, sistemul care rezultă este categoric. De exemplu, putem adăuga următoarea „axiomă":

5.3. Pentru orice m, m este identic cu unul din următorii: 0, 0′, 0″, ..., unde fiecare termen este 0 sau se obține din 0 prin aplicarea operatorului succesor ′ de un număr finit de ori.

Se poate arăta cu ușurință, prin demonstrația obișnuită, că rezultatul adăugării lui 5.3 la Z este categoric și, în consecință, și complet conform teoremei 1. Deși 5.3 se aseamănă destul de mult cu axioma $A1$ din paragraful precedent, trecerea de la un domeniu finit la un domeniu infinit atrage după sine complicații. În timp ce $A1$ este exprimat în sistemul dat L, 5.3 nu este exprimat și nici măcar nu este exprimabil în Z.

Putem vedea că axioma de limitare 5.3 este echivalentă cu „regula" mai familiară a inducției infinite:

5.4. Pentru orice predicat Hn, exprimabil în Z, dacă HO, HO', HO'', ... sînt teoreme, atunci „Pentru toți n, Hn" este, de asemenea, o teoremă.

Astfel, fiind date 5.3 și HO, HO', HO'', ..., putem conchide că pentru toți n are loc Hn, întrucît, în conformitate cu 5.3., fiecare n intră în șirul 0, 0′, 0″ etc. Pe de altă parte, fiind date 5.4 și $m \neq 0$, $m \neq 0'$, $m \neq 0''$,..., putem

infera, luînd $m \neq n$ ca Hn, că pentru toți n, $m \neq n$; în consecință, întrucît „pentru toți n, $m \neq n$“ este infirmabil în Z pentru orice m, putem conchide că fiecare m în parte este identic cu un anumit termen al șirului 0, 0′, 0″,..., descris în 5.3. În treacăt fie spus, raționamentul nostru dă și o nouă demonstrație a concluziei cunoscute: rezultatul adăugării lui 5.4 la Z este complet. Astfel, fiind dat 5.4 putem deriva 5.3. Dar am indicat mai sus că rezultatul adăugării lui 5.3 la Z este complet.

Unii autori numesc 5.4 o regulă neconstructivă de inferență, alții refuză s-o considere, în genere, drept regulă de inferență. În orice caz, întrucît pretindem ca în orice sistem axiomatic sau sistem logistic să se poată verifica mecanic corectitudinea unei demonstrații, nici 5.3 și nici 5.4 nu pot fi considerate ca formînd o parte proprie a unui sistem de axiome. Într-adevăr, întrucît Z este incompletabil, conform teoremei 3, se demonstrează imposibilitatea formulării unor axiome sau reguli (constructive) de inferență proprii care ar avea ca efect 5.3 sau 5.4.

Aceste considerații ne duc la cîteva probleme interesante.

În primul rînd se ridică problema categoricității relative. Privitor la un sistem necategoric, ne putem întreba dacă toate modelele în care anumite obiecte primesc aceeași interpretare sînt izomorfe. De exemplu, știm că putem defini numerele întregi în teoria mulțimilor iar numerele întregi pot primi interpretări neizomorfe în diferite modele pentru teoria mulțimilor; de aceea, noi știm și că teoria mulțimilor nu este categorică. Cu toate acestea, ne mai putem întreba cu privire la acele modele pentru teoria mulțimilor în cadrul cărora toți întregii primesc aceeași interpretare (care poate fi regulată sau nu), dacă atare modele sînt izomorfe. Dacă sînt, vom spune că teoria mulțimilor este categorică relativ la întregi. În mod similar, un sistem poate fi categoric și față de numerele ordinale, numerele cardinale, și așa mai departe. Mai explicit:

Definiția 6. Un sistem care conține numerele întregi (nenegative) se spune că este categoric relativ la întregii săi, dacă și numai dacă toate modelele pentru sistem, în cadrul cărora întregii primesc aceeași interpretare (izomorfă), sînt izomorfe. Se spune că sistemul este categoric relativ la întregii regulați, dacă și numai dacă toate modelele pentru el, în cadrul cărora întregii sînt regulați (în sensul descris mai sus), sînt izomorfe.

De exemplu, conform cu această definiție, Z este categoric relativ la întregii regulați — rezultat care nu este de loc surprinzător. Pe de altă parte, problema dacă anumite sisteme standard de teoria mulțimilor sînt categorice relativ la întregii lor (sau relativ la întregii regulați) rămîne încă deschisă și pare a fi foarte interesantă.

O a doua problemă privește relația dintre regula de inducție infinită 5.4 și principiul uzual al inducției ($Z3$ în sistemul Z). Confruntînd $Z3$ cu regula inducției infinite 5.4, vedem că $Z3$ decurge în mod imediat din 5.4. Așadar putem reformula aserțiunile noastre de mai sus, spunînd că deși Z este incomplet, rezultatul înlocuirii lui $Z3$ prin 5.4 este complet.

Acum putem considera $Z3$ ca un mod particular de formalizare a unui grup de cazuri din 5.4 printr-o regulă avînd doar un număr finit de premise pentru fiecare caz în parte (respectiv, premisele HO și „Pentru toți n, Hn implică Hn'“). Dacă Z ar fi complet, $Z3$ ne-ar permite să derivăm 5.4 și, pe această

bază, să derivăm și toate celelate moduri de formalizare a grupelor de cazuri ale lui 5.4. Întrucît Z este incomplet, se pune chestiunea dacă putem descoperi reguli noi cu un număr finit de premise în fiecare caz care ne-ar permite să demonstrăm concluzii generale de forma „Pentru toți m, Hm", concluzii care nu sînt încă demonstrabile în Z. Pe baza teoremei 3, știm că nu putem descrie efectiv o grupă de reguli care ar epuiza toate aplicațiile lui 5.4. Dar aceasta nu exclude posibilitatea descoperirii unor reguli efective care să acopere cazurile din 5.4 ce interesează și nu au fost acoperite de $Z3$.

Un alt punct demn de a fi subliniat este legătura dintre $Z3$ și noțiunea de mulțimi. Astfel, este uzual a folosi în locul lui $Z3$, care operează cu proprietăți exprimabile în Z, un principiu care privește mulțimi de numere întregi:

$Z3^*$. Dacă o mulțime este inductivă (adică astfel încît 0 îi aparține și, pentru orice n, dacă n îi aparține atunci și n' îi aparține), ea conține toate numerele întregi nenegative.

Ideea de mulțime implicată aici poate fi luată ca sigură, ca o noțiune intuitiv clară, sau poate fi definită mai exact printr-un sistem axiomatic de teoria mulțimilor. Dacă alegem prima alternativă, atunci, întrucît $Z3^*$ se referă la toate mulțimile, putem admite, în particular, că există o mulțime alcătuită exact din numerele 0, 0′, 0″, ... , descrise în 5.3. În consecință, dacă aplicăm $Z3^*$ la această mulțime specială, constatăm că aceștia epuizează toți întregii nenegativi și că 5.3 este adevărat. Așadar, așa cum a relevat și a demonstrat cu minuțiozitate Skolem ([14], p. 42), dacă adoptăm o noțiune intuitivă de mulțime, potrivit căreia există o mulțime compusă din elementele 0, 0′, 0″, ..., și numai din ele, demonstrațiile uzuale de categoricitate pentru Z și N sînt valide. Singura obiecție adusă acestei abordări este că trebuie să abolim programul formalizării tuturor noțiunilor noastre matematice în cadrul sistemelor axiomatice.

În caz contrar, dacă vrem să formalizăm noțiunea de mulțime, vedem, pe baza teoremei 3, că este imposibil să găsim un sistem de axiome conținînd Z, în care să putem exprima și demonstra formal existența unei mulțimi avînd exact elementele 0, 0′, 0″, ..., și nici un alt element. Dacă am putea găsi un asemenea sistem, am putea — contrar teoremei 3 — să demonstrăm „Pentru toți m, Hm", atunci cînd putem demonstra fiecare enunț din șirul $H0$, $H0'$, $H0''$ etc.

Pentru a ilustra legătura strînsă ce există între puterea lui $Z3^*$ și noțiunea de mulțime pe care o adoptăm, să considerăm o noțiune foarte dubioasă de mulțime, potrivit căreia există numai mulțimi finite (inclusiv mulțimea vidă) precum și complementarele acestora (adică mulțimile care conțin orice obiect al domeniului, cu cel mult un număr finit de excepții). Obținem atunci, alături de modelul uzual, și un model straniu pentru N (cu $Z3$ înlocuit prin $Z3^*$) determinat prin funcția de adunare a lui 1 și domeniul 1, 2, 3, ... ; ..., $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}$, ..., unde întregii și fracțiile se comportă ca în matematica uzuală, iar 1 este modelul pentru 0.

§ 6. TEOREMELE LUI GÖDEL

Să considerăm, de exemplu, sistemul Z, descris în paragraful precedent. Putem privi acest sistem ca un joc cu un număr finit de simboluri (cu zece simboluri, să spunem, sau, dacă vrem, numai cu două). Anumite combinații finite ale acestor simboluri se numesc propoziții, anumite combinații finite ale acestor propoziții se numesc demonstrații, anumite propoziții se numesc axiome pentru determinarea demonstrației. În fiecare sistem de axiome putem enumera efectiv toate simbolurile primitive, toți termenii, toate propozițiile, toate demonstrațiile, astfel că, fiind dat un întreg pozitiv arbitrar n, putem descoperi printr-un număr finit de pași ce combinație de simboluri este a n-a propoziție și ce combinație de propoziții este a n-a demonstrație, și invers. De aceea, în loc de a vorbi despre demonstrații, propoziții, variabile, putem vorbi chiar despre întregi pozitivi, iar proprietățile și relațiile sintactice privitoare la sistem sînt acum reprezentate prin proprietăți și relații ale întregilor pozitivi. În acest mod obținem ceea ce se numește o aritmetizare a sintaxei sistemului. În speță, prin însăși definiția unui sistem axiomatic sau logistic, fiecare sistem admite o metodă definită conform căreia, fiind dați doi întregi pozitivi oarecare m și n, putem decide printr-un număr finit de pași dacă a m-a demonstrație este o demonstrație pentru a n-a propoziție. Cu alte cuvinte, dată fiind o demonstrație oarecare, putem determina exact propoziția pentru care este dată tocmai demonstrația respectivă. De regulă, aceasta se exprimă spunînd că relația diadică „a fi o demonstrație pentru" este recursivă sau efectiv calculabilă. Pe această bază, putem defini în Z (sau în orice sistem care îl conține pe Z) un predicat $B(m, n)$ astfel încît, pentru orice m, n dați, $B(m, n)$ este demonstrabil sau infirmabil în cadrul sistemului, după cum a m-a demonstrație din Z constituie sau nu în Z o demonstrație pentru a n-a propoziție din Z. În felul acesta, Gödel ajunge să vorbească despre Z în cadrul sistemului Z însuși.

Alături de predicatul demonstrație, Gödel reușește să definească în Z o funcție $s(m, n)$, astfel încît $s(m, n) = k$ dacă și numai dacă rezultatul substituirii intrărilor termenului al n^*-lea — de exemplu, numeralul 100 sau variabila j — (n fiind expresia numerică în Z pentru numărul n^*) în locul intrărilor variabilei i (variabila ca simbol fiind un simbol constant) în cadrul celei de a m^*-a propoziție din Z (unde m este expresia numerică pentru m^*), este a k-a propoziție din Z. Aceasta prezintă interes numai dacă variabila i (constantă ca simbol) intră în a m-a propoziție; în caz contrar, rezultatul substituției coincide cu propoziția inițială iar $s(m, n)$ este identică cu m. Această funcție $s(m, n)$ este, de asemenea, recursivă sau efectiv calculabilă în sensul că există o metodă definită prin care, pentru orice numere m și n, putem calcula valoarea lui $s(m, n)$. Drept urmare, putem exprima în Z o funcție σ (m, n), astfel încît pentru orice m, n și k, $\sigma(m, n) = k$ este o propoziție demonstrabilă în Z, dacă și numai dacă $s(m, n)$, așa cum a fost descrisă mai sus, este egală cu k.

Folosind predicatul B și funcția σ, Gödel construiește, în continuare, o propoziție din Z, care spune despre ea însăși că nu este demonstrabilă în Z. Așadar, dacă propoziția este demonstrabilă, nu este demonstrabilă; dar dacă este infirmabilă, este demonstrabilă. În consecință, propoziția trebuie să fie indecidabilă, iar Z trebuie să fie incomplet.

Întrucît B și σ pot fi exprimate în Z, propoziția (1) „Pentru nici un m, $B(m, \sigma(i, i))$“ este o propoziție din Z, care conține variabila i. În consecință, putem găsi un număr determinat t (de exemplu, un număr ca 358 trilioane) astfel încît (1) este a t-a propoziție din Z. Fie τ expresia numerică în Z pentru numărul t și să considerăm propoziția (2) din Z „Nu există nici un m astfel încît $B(m, \sigma(\tau,\tau))$“. Intuitiv, propoziția (2) spune că nu există nici o demonstrație în Z pentru propoziția obținută din a t-a propoziție din Z prin substituirea termenului τ pentru variabila i. Întrucît a t-a propoziție din Z este (1), iar rezultatul substituirii termenului τ pentru variabila i în (1) este tocmai (2), propoziția (2) din Z spune intuitiv că (2) însăși nu este demonstrabilă în Z. Mai mult, dacă q este valoarea lui $\sigma(\tau, \tau)$, atunci (2) este a q-a propoziție din Z.

Să admitem acum că (2) este demonstrabilă în Z. Putem găsi atunci un număr determinat m_0, astfel încît m_0 este o demonstrație a lui (2). În consecință, conform proprietăților predicatului B, putem demonstra în Z propoziția „$B(m_0, q)$“. În consecință, întrucît q este valoarea lui $\sigma(\tau, \tau)$ putem demonstra în Z propoziția „$B(m_0, \sigma(\tau, \tau))$“. Dar această din urmă propoziție contrazice (2). Așadar, (2) nu poate fi demonstrată în Z. Dacă ar fi demonstrabilă în Z, am avea două teoreme contradictorii în Z și deci Z ar fi inconsistent.

Întrucît (2) nu este demonstrabilă în Z, urmează că pentru orice m dat, a m-a demonstrație din Z nu constituie o demonstrație pentru (2), care este a q-a propoziție din Z. Așadar, conform proprietății predicatului B, „Nu este cazul ca $B(m, q)$“ sau „Nu este cazul ca $B(m, \sigma(\tau, \tau))$“ este o propoziție demonstrabilă în Z pentru orice numeral dat m. Altfel spus, orice caz individual al propoziției (2) este demonstrabil în Z. În consecință, (2) este intuitiv adevărată deși, cum s-a arătat mai sus, nu este demonstrabilă în Z. Așadar, dacă Z nu este realmente un sistem foarte dubios, (2) nu trebuie să fie infirmabilă în Z. Așadar, dacă Z nu este dubios, (2) trebuie să fie o propoziție indecidabilă din Z (vezi Gödel [6]).

Complicînd întrucîtva propoziția (2), Rosser a putut demonstra că această propoziție mai complexă este indecidabilă în Z, cu singura condiție ca Z să fie consistent, adică să nu conțină teoreme contradictorii (vezi Rosser [10]). Se poate constata cu ușurință că argumentele lui Gödel și Rosser sînt aplicabile și la orice sistem S care îl conține pe Z ca parte. În consecință, obținem teorema că Z este atît incomplet, cît și incompletabil (teorema 3 din paragraful precedent).

Cu alte cuvinte, teorema lui Gödel arată că, în orice sistem formal suficient de bogat, putem formula o anumită problemă aritmetică din cadrul sistemului, decidabilă prin examen intuitiv dar nu și prin aplicarea procedurii demonstrative a sistemului. Altfel spus, prin construirea unui sistem și apoi prin tratarea lui ca obiect de studiu am creat o problemă nouă, care poate fi formulată însă nu și soluționată în cadrul sistemului dat.

Propoziția indecidabilă (2) a lui Gödel revine la un procedeu de a spune: „Această aserțiune (pe care o emit acum) nu este demonstrabilă în Z“. Însuși Gödel subliniază analogia cu paradoxul mincinosului: (3) „Această aserțiune (pe care o emit acum) este falsă (adică nu este adevărată)“. Propoziția (2) nu generează nici o contradicție, deoarece nu e necesar ca orice enunț din Z să fie sau demonstrabil, sau infirmabil în Z. Pe de altă parte, faptul că (3) duce la o contradicție este folosit în lucrarea lui Tarski [8] spre a se demonstra că

nu putem defini noțiunea de adevăr pentru Z (sau pentru orice sistem care îl conține pe Z) în însuși sistemul, deși, așa cum am afirmat mai sus, putem defini noțiunea de teoremă pentru Z în cadrul sistemului însuși. Mai exact, este imposibil a descoperi în Z un predicat de întregi pozitivi, astfel încît pentru orice m și p dacă p, este a m-a propoziție din Z, putem demonstra în Z: (4) „p dacă și numai dacă $M(m)$". Astfel, dacă am putea descoperi în Z un asemenea predicat M, să considerăm propoziția „Nu este cazul ca $M(\sigma(i, i))$" din Z. Să presupunem că aceasta este a n-a propoziție din Z și să considerăm propoziția „Nu este cazul ca $M(\sigma(n, n))$". Conform cu (4) și cu proprietatea lui σ, am avea atunci ca teoremă a lui Z: „$M(\sigma(n, n))$, dacă și numai dacă nu este cazul ca $M(\sigma(n,n)$". În consecință, avem:

Teorema 5. În Z (sau în orice sistem care îl conține pe Z) nu putem defini noțiunea de adevăr pentru sistemul însuși.

Alte aplicații interesante ale metodei lui Gödel includ două rezultate ale lui Church (vezi Church [11], [12]):

Teorema 6. Nu există un procedeu de decizie pentru a stabili care anume propoziții din Z (sau din orice sistem care îl conține pe Z ca parte a sa) sînt demonstrabile, în cazul cînd sistemul este consistent.

Demonstrație. Dacă ar exista un procedeu de decizie pentru Z, am avea o funcție recursivă sau efectiv calculabilă Φ, astfel încît pentru orice m, $\Phi(m) = 1$, dacă și numai dacă a m-a propoziție din Z este o teoremă, și $\Phi(m) = 2$ în caz contrar. În consecință, am putea exprima în Z o funcție f astfel încît, pentru orice m, „$f(m) = 1$" sau „$f(m) = 2$" este demonstrabilă în Z după cum a m-a propoziție din Z este sau nu o teoremă a lui Z. Să considerăm acum propoziția „$f(\sigma(i, i)) = 2$". Dacă aceasta este a k-a propoziție din Z, atunci (5) „$f(\sigma(k, k)) = 2$" ar fi de asemenea o propoziție din Z. Conform proprietății lui f, dacă (5) este o teoremă a lui Z, atunci, conform proprietăților lui f și σ, „$f(\sigma(k, k)) = 1$" ar fi de asemenea demonstrabilă și am avea o contradicție. Pe de altă parte, dacă (5) nu este teoremă, atunci, conform proprietății lui f, ar fi teoremă. Așadar, dacă ar exista un procedeu de decizie pentru Z, Z ar fi inconsistent. În mod similar, același lucru se poate demonstra pentru orice sistem care îl conține pe Z ca parte a sa.

Teorema 7. Nu există un procedeu de decizie pentru a stabili care propoziții ale logicii elementare (cu sau fără identitate) sînt demonstrabile. Cu alte cuvinte, nu există procedeu de decizie pentru teoria cuantificării sau calculul restrîns al predicatelor.

Demonstrație. Știm că există un sistem consistent S care îl conține pe Z ca parte a sa și care are numai un număr finit de axiome, pe lîngă axiomele logicii elementare. Dacă A este conjuncția tuturor acestor axiome, care sînt în număr finit, știm că pentru orice propoziție p a sistemului S, p este demonstrabilă în S, dacă și numai dacă „Dacă A atunci p" este demonstrabilă în logica elementară. În consecință, dacă ar exista un procedeu de decizie pentru logica elementară, am fi capabili să decidem pentru fiecare propoziție de forma „Dacă A atunci p", dacă aceasta este demonstrabilă în logica ele-

mentară. Aşadar, am avea un procedeu de decizie pentru S, contrar teoremei 6. Turing [16] dă o altă demonstraţie foarte interesantă.

Un rezultat al lui Turing care nu depinde în măsură atît de mare de metoda lui Gödel este următorul (vezi Turing [16], p. 259):

TEOREMA 8. Orice sistem complet este decidabil.

Demonstraţie. Schiţa în linii mari a demonstraţiei este următoarea. Aşa cum am observat, demonstraţiile — şi în felul acesta şi teoremele — unui sistem pot fi enumerate. Dacă sistemul este complet, atunci şi non-teoremele sistemului pot fi şi ele enumerate, deoarece într-un sistem complet p este o non-teoremă, dacă şi numai dacă non-p este teoremă. Prin urmare, putem enumera toate enunţurile sistemului în modul următor: prima teoremă, prima non-teoremă, a doua teoremă, a doua non-teoremă, a treia teoremă, şi aşa mai departe. În consecinţă, putem verifica pentru fiecare enunţ al sistemului dacă, în cadrul enumerării, ocupă un loc cu soţ (în care caz este o teoremă) sau un loc fără soţ (în care caz este non-teoremă).

Ajungem, în sfîrşit, la importanta teoremă a doua a lui Gödel, teoremă care enunţă imposibilitatea formalizării oricărei demonstraţii de consistenţă în cadrul sistemului însuşi.

DEFINIŢIA 7. Se spune că un sistem este consistent sau necontradictoriu, dacă nu există nici o propoziţie p a sistemului, astfel încît atît p *cît şi non-*p *să fie teoreme.*

Este absolut evident că am dori să avem un sistem formal consistent. Într-adevăr, în primul rînd, teoremele trebuie să fie adevărate, iar p şi non-p nu pot fi amîndouă adevărate. În plus, există o lege a logicii acceptată în mod general, conform căreia, pentru orice enunţuri p şi q, din p plus non-p putem infera q ca teoremă. În consecinţă, dacă un sistem este inconsistent, am fi puşi în situaţia derutantă că toate enunţurile sistemului sînt teoreme.

Deşi sperăm şi înclinăm să credem că sistemele uzuale pentru ramurile principale ale matematicii sînt consistente, în multe cazuri este foarte greu să demonstrăm efectiv consistenţa lor. Adesea, nu este greu să demonstrăm că un sistem este consistent atunci cînd un alt sistem este consistent. Dar este evident că aceasta nu ne garantează consistenţa celui de al doilea sistem. De exemplu, dacă admitem consistenţa unui anumit sistem standard de teoria mulţimilor, putem demonstra cu uşurinţă consistenţa (relativă) a unor sisteme pentru analiză, geometrie, teoria numerelor şi aşa mai departe. Dar aceasta nu ne ajută prea mult, deoarece consistenţa teoriei mulţimilor nu este cunoscută.

În general, pentru a demonstra consistenţa unui sistem trebuie să folosim anumite moduri de a raţiona, a căror valabilitate o acceptăm. Chestiunea principală este dacă putem utiliza argumente mai certe pentru a demonstra consistenţa sistemelor care folosesc forme de argumentare mai tari sau mai puţin certe. Într-un sens, teorema lui Gödel dă un răspuns negativ la această chestiune.

Fie S sistemul Z sau un alt sistem arbitrar care îl conține pe Z ca parte a sa. A doua teoremă a lui Gödel este:

Teorema 9. Dacă S este consistent, consistența lui S nu poate fi demonstrată în S.

Mai exact, adoptînd o anumită aritmetizare a sintaxei lui S (adică un anumit mod de a reprezenta propozițiile, demonstrațiile etc. prin numere întregi), putem descoperi un enunț aritmetic $Con(S)$ exprimabil în notația lui Z (și care, de aceea, este și el un enunț în S) care desemnează aserțiunea că S este consistent. În acest mod, problema consistenței unui sistem este formalizată în cadrul sistemului însuși. Ceea ce a demonstrat Gödel a fost faptul că, deși problema poate fi formulată în cadrul aceluiași sistem, pentru a răspunde pozitiv la această problemă, adică pentru a demonstra enunțul $Con(S)$, avem nevoie de un sistem mai tare, într-un anumit sens, decît S. Dacă S este consistent, $Con(S)$ ca enunț a lui S nu este demonstrabil în S.

În linii mari, demonstrația dată de Gödel pentru această teoremă depinde de posibilitatea formalizării în Z a demonstrației unui rezultat ce fusese obținut în cursul demonstrației primei sale teoreme: (1) Dacă S (de exemplu, Z) este consistent, atunci (2) „Nu există nici un m, astfel încît $B(m, \sigma(\tau, \tau))$" nu este demonstrabilă în S. Întrucît — reamintim acest lucru — numărul lui (2) este același cu $\sigma(\tau, \tau)$, enunțul (2) spune că (2) nu este demonstrabil în S. Prin urmare, o reprezentare a lui (1) este tocmai: Dacă $Con(S)$, atunci nu există nici un m, astfel încît $B(m, \sigma(\tau, \tau))$. Prin urmare, dacă enunțul $Con(S)$ ar fi demonstrabil în S, (2) ar fi de asemenea demonstrabil iar S ar fi inconsistent, conform cu (1).

Ar fi interesant să notăm în treacăt că, deși s-au dat multe alte demonstrații pentru prima teoremă a lui Gödel, nu există, după cîte știm, o altă demonstrație pentru a doua teoremă.

Semnificația acestei teoreme ar putea fi întrevăzută cel mai bine, dacă ne reamintim că inițial exista încrederea sau speranța vagă că pînă și consistența unor sisteme foarte puternice poate fi demonstrată în cadrul unui sistem ca Z sau, preferabil, chiar în anumite sisteme și mai slabe încă. Întregul program de căutare a demonstrațiilor de consistență pare să se bazeze pe convingerea că putem justifica folosirea unor argumente mai puțin certe din punct de vedere intuitiv prin moduri de raționare mai certe. Teoremele lui Gödel dovedesc sau că această convingere este falsă, în măsura în care este vorba de demonstrarea consistenței, sau — ceea ce este mai probabil — că există anumite moduri intuitive de a raționa asupra întregilor pozitivi al căror caracter intuitiv nu a putut fi încă revelat în cadrul formalizărilor noastre.

A doua teoremă a lui Gödel a fost aplicată, de asemenea, în studiul consistenței relative și modelului relativ. Astfel, S_1 este consistent relativ la S_2, dacă putem demonstra consistența lui S_1 prin admiterea consistenței lui S_2; S_1 are un model relativ la S_2, dacă putem defini un model pentru S_1 folosind noțiuni ale lui S_2. În cele mai multe cazuri, S_1 este consistent relativ la S_2, atunci și numai atunci cînd S_1 are un model relativ la S_2. De exemplu, numeroase geometrii neeuclidiene au modele (sînt consistente) relativ la geometria euclidiană, iar teoria mulțimilor plus ipoteza continuului are un model (este consistentă) relativ la teoria mulțimilor.

Dacă S_1 are un model sau este consistent relativ la S_2, putem în mod uzual formaliza în Z o demonstrație a teoremei aritmetice „Dacă $Con(S_2)$ atunci $Con(S_1)$". Prin urmare, dacă S_1 îl conține pe Z, atunci $Con(S_2)$, conform cu a doua teoremă a lui Gödel, nu este demonstrabilă în S_1. Reciproc, dacă $Con(S_2)$ este demonstrabilă în S_1, atunci „Dacă $Con(S_2)$, atunci $Con(S_1)$" nu poate fi demonstrabilă în S_1. Deci, dacă S_1 este destul de puternic pentru a include cele mai uzuale moduri de raționament, sînt puține speranțe să se demonstreze consistența lui S_1 relativ la S_2 atunci cînd $Con(S_2)$ este demonstrabilă în S_1.

Pe de altă parte, uneori s-ar părea că deținem atît consistența lui S_1 relativ la S_2, cît și o demonstrație pentru $Con(S_2)$ în S_1. În asemenea cazuri, ajungem din nou la anumite argumente intuitive despre numerele întregi care nu sînt formalizabile în S_1, cu toate că S_1 poate fi foarte puternic și bogat, dacă îl judecăm după normele uzuale.

§ 7. TEORIILE FORMALE CA LOGICI ELEMENTARE APLICATE

Sistemele pe care le considerăm presupun toate logica elementară uzuală care operează cu funcții de adevăr, cuantori și identitate. Teoria identității poate fi sau nu considerată o parte a logicii elementare. Pentru ceea ce urmărim, este mai convenabil să considerăm logica elementară fără teoria identității, logică desemnată de multe ori ca teorie a cuantificării sau calcul restrîns al predicatelor. Există mai multe formulări standard ale acestei teorii care operează cu funcții de adevăr și cuantori. Putem adopta oricare din aceste formulări. S-o numim Q.

Toate sistemele axiomatice uzuale pot fi formulate în cadrul lui Q. Dacă un sistem conține inițial mai multe spețe de variabile, inclusiv variabile „superioare", admitem că el a fost deja transformat, pe baza metodelor cunoscute, într-un sistem cu o singură speță de variabile.

Pe lîngă conectivele logicii propozițiilor, cuantori și o speță de variabile, sistemul Q mai conține și simboluri de felul următor: predicate, functori și nume individuale. Teoremele lui Q sînt, în mare, acele enunțuri sau scheme de enunț care sînt adevărate indiferent de interpretarea simbolurilor folosite pentru proprietăți, relații, funcții și indivizi. Este mai corect a denumi expresiile de tip enunțiativ din Q scheme de enunț și nu enunțuri, deoarece simbolurile pentru predicate, funcții și indivizi sînt neinterpretate și pot fi interpretate oricum dorim. Cînd aplicăm Q la sisteme speciale ca L, Z sau la un sistem standard de teoria mulțimilor, anumite simboluri dintre cele de mai sus (ca predicatul $\in$ pentru apartenență, functorul $+$ în Z și predicatul R în L) obțin o interpretare prin intermediul unor axiome suplimentare, iar schemele devin enunțuri. De exemplu, vrem ca într-o teorie a mulțimilor predicatul cu două locuri $\in$ să nu aibă numai acele proprietăți pe care trebuie să le aibă orice predicat cu două locuri, ci și proprietățile speciale ale relației de apartenență. Axiomele suplimentare ale teoriei mulțimilor pot fi considerate ca scheme ale lui Q care conțin, în mod esențial, litera predicativă $\in$, literă altfel neutră. Aceste axiome, spre deosebire de teoremele lui Q, care pot conține și ele $\in$, nu mai sînt adevărate în toate interpretările, ci pot fi satisfăcute numai cînd folosim interpretări foarte speciale. Problema aflării unui model pentru teoria mulțimilor devine echivalentă cu problema de a afla un model

sau o interpretare a acestor scheme suplimentare pentru $\in$, care nu sînt adevărate în toate interpretările. Ca urmare, problemele de consistență și de procedeu al deciziei privitor la teoria mulțimilor și la alte sisteme formale devin reductibile la probleme similare privitor la scheme ale lui Q.

Skolem, Herbrand și Gödel au stabilit următorul rezultat (vezi [3], [4], [5]:

Teorema 10. Un sistem formulat în cadrul lui Q este consistent, dacă și numai dacă este realizabil (cf. Df. 1).

Dacă vorbim despre realizabilitate cu referire nu numai la sisteme axiomatice, ci și la enunțuri sau scheme de enunț separate din Q, constatăm imediat că un sistem formulat în cadrul lui Q este realizabil (are un model), dacă și numai dacă toate axiomele sale sînt simultan realizabile (adevărate în aceleași modele).

Definiția 8. O schemă din Q este validă, dacă este adevărată în toate modelele sau interpretările peste fiecare domeniu sau univers nevid. Astfel, p *este validă, dacă și numai dacă non-*p *nu este realizabilă (în nici un domeniu nevid).*

Definiția 9. Se spune că un sistem este deschis complet, dacă toate schemele valide sînt teoreme ale sistemului.

Cu ajutorul acestor noțiuni, teoremei 10 i se poate da, de asemenea, o formă oarecum diferită:

Teorema 11. Sistemul Q (de teoria cuantificării) este complet deschis. Mai mult, o schemă din Q este teoremă, dacă și numai dacă ea este validă.

Fiind date teoremele 10 și 11, putem aprecia semnificația problemei deciziei în teoria cuantificării (sau, pe scurt, problema deciziei). O soluție pentru problemă ar fi un procedeu mecanic prin care, pentru orice schemă dată a lui Q, putem decide dacă aceasta este o teoremă a lui Q (sau este validă). Dacă ar exista un atare procedeu, am putea nu numai să rezolvăm, în mod mecanic, problema consistenței, ci și să obținem un procedeu de decizie pentru orice sistem axiomatic uzual (cel puțin atunci cînd acesta conține numai un număr finit de axiome, afară de axiomele lui Q). Aceasta este mai mult decît am putea spera. Într-adevăr, teorema lui Church (teorema 7 înfățișată în paragraful precedent) dă un răspuns negativ la această chestiune.

Lăsînd la o parte problema generală a deciziei, mai rămîn două feluri de probleme speciale de decizie. Pe de o parte, ne putem întreba dacă există un procedeu de decizie pentru toate schemele de o anumită formă particulară. Pe de altă parte, putem întreba dacă, pentru un sistem special dat (de exemplu, sistemul N, sau L, sau un sistem slab de teoria mulțimilor), acest procedeu este unic. Avem numeroase rezultate pozitive și negative pentru ambele tipuri de probleme. Există părerea că s-au copt deja condițiile elaborării unei teorii generale cu privire la ceea ce este și la ceea ce nu este decidabil. Se pare că nu s-a înregistrat un progres substanțial în direcția unei asemenea teorii generale.

Un rezultat pozitiv interesant privitor la al doilea tip de probleme este metoda de decizie a lui Tarski pentru teoria elementară a numerelor reale,

metodă care operează numai cu numere reale, dar nu cu mulțimi de numere reale sau cu elemente (întregi sau raționali) ale mulțimilor de numere reale. Vorbind în general, Tarski a demonstrat completitudinea, decidabilitatea și consistența unui sistem de axiome care afirmă că numerele reale formează un cîmp ordonat complet (adică un cîmp ordonat, în care este valabilă teorema celei mai mici margini superioare). De regulă, considerăm că teoria numerelor reale este mai bogată și mai tare ca teoria numerelor întregi. Rezultatul lui Tarski dovedește că putem trata numerele reale într-un mod încă și mai general, cu singura condiție ca să nu vorbim în același timp despre numere întregi și raționale. Într-adevăr, după cum observă Tarski, din rezultatul său și teorema lui Gödel urmează că nu există un mijloc de a găsi în cadrul teoriei elementare a numerelor reale un predicat care să distingă acele numere reale care sînt totodată numere raționale sau un predicat care să distingă acele numere reale care sînt totodată numere întregi pozitive. Dacă ar exista una din aceste două posibilități, am fi capabili să exprimăm în teoria elementară a numerelor reale toate noțiunile lui Z și nu am putea avea un sistem complet (vezi Tarski [17]).

Conform Df. 8, o schemă sau o propoziție din Q este validă sau este o teoremă a lui Q, dacă este adevărată în toate modelele sau interpretările posibile. Într-un sistem determinat S, de exemplu într-un sistem de teoria numerelor sau teoria mulțimilor, axiomele și teoremele dinafara lui Q nu sînt valide în sensul de mai sus, dar ele sînt totuși adevărate sau valide în toate modelele pentru sistemul S. Considerînd, în general, orice mulțime M de enunțuri care nu sînt teoreme ale lui Q și nu sînt nici infirmabile în Q, putem defini o validitate relativă la M, spunînd că un enunț p este valid relativ la M, dacă și numai dacă p este adevărat în orice model în care toate enunțurile lui M sînt adevărate. Vom spune că un sistem este complet, relativ la M, dacă toate enunțurile sistemului care sînt valide relativ la M sînt teoreme ale sistemului. Dacă mulțimea modelelor determinate de M (adică mulțimea tuturor modelelor în care enunțurile care aparțin lui M sînt toate adevărate) are proprietăți remarcabile, cercetarea completitudinii relative la M a unui sistem dat prezintă interes.

O consecință nemijlocită a definiției completitudinii relative este următoarea teoremă:

Teorema 12. Orice sistem S este complet relativ la mulțimea M a axiomelor sale.

Demonstrație. Să admitem că mulțimea M este compusă din A_1, A_2, A_3, ... Fie B_1 axioma A_1 și fie B_n conjuncția lui B_{n-1} și $A_n (n = 2, 3, 4...)$. Fie p un enunț din S care nu este demonstrabil în S. Atunci, nici unul dintre enunțurile „Dacă B_k, atunci p“ ($k = 1, 2, 3 ...$) nu este demonstrabil în teoria cuantificării. Așadar, enunțurile „B_k însă nu p“ ($k = 1, 2, 3 ...$), adăugate toate la Q ca axiome, determină un sistem consistent; într-adevăr, în caz contrar trebuie să existe un k determinat astfel, încît numai „B_k însă nu p“ ar da deja o contradicție în Q. În consecință, conform teoremei 10, există un model în care B_1, B_2, ... sînt toate adevărate, însă p nu este adevărat. Așadar, există un model în care toate axiomele lui S sînt adevărate, însă p nu este adevărat; cu alte cuvinte, p nu este valid relativ la M. Așadar, orice p valid relativ la

M este demonstrabil în S, iar S este valid, relativ la mulțimea M a axiomelor sale.

Demonstrațiile uzuale ale teoremelor 10 și 11 dau și ele, ca un corolar, o formă mai tare a faimoasei teoreme a lui Löwenheim, care spune că orice sistem consistent are un model numărabil.

Această teoremă este interesantă în special prin faptul că, în aparență, contrazice celebra teoremă a lui Gantor cu privire la existența mulțimilor nenumărabile. Întrucît în orice sistem standard de teoria mulțimilor putem reproduce demonstrația dată de Cantor acestei teoreme, s-ar părea că sistemele de acest gen nu ar admite un model numărabil. Conform teoremei lui Löwenheim însă, el trebuie să aibă un model numărabil, dacă în genere este consistent. Acest fenomen este denumit uneori paradoxul lui Skolem și este explicat, de regulă, spunîndu-se că teorema lui Cantor demonstrează numai lipsa unei enumerări în cadrul sistemului, în timp ce enumerarea a cărei existență este asertată de teorema lui Löwenheim este o enumerare sintactică, obținută prin faptul că vorbim despre sistemul dat.

Pe baza acestei teoreme sau a unui rezultat analog putem demonstra, de asemenea, că nici o teorie formalizată a mulțimilor nu ne poate da *toate* mulțimile de întregi pozitivi. Astfel, fie S un sistem standard de teoria mulțimilor. Dat fiind că putem enumera teoremele lui S, putem enumera și toate acele teoreme ale lui S care enunță existența vreunei mulțimi de întregi pozitivi. Să considerăm acum, după Cantor, mulțimea K de întregi pozitivi astfel, încît pentru orice m, m aparține lui K, dacă și numai dacă m nu aparține mulțimii a m-a din cadrul enumerării. Conform argumentului lui Cantor, K nu poate intra în enumerarea tuturor acelor mulțimi de întregi pozitivi despre care se demonstrează că există în S. Așadar, sau nu există nici un enunț în S care să exprime existența lui K, sau, dacă un asemenea enunț există, el nu constituie o teoremă a lui S. În orice caz există o mulțime de întregi pozitivi a cărei existență nu poate fi demonstrată în S.

Secțiunile §4—§7 ale acestui capitol au apărut într-o formă ușor modificată în studiul *Quelques notions d'axiomatique*, în „Revue philosophique de Louvain", **51**, 1953, pp. 409—433.

BIBLIOGRAFIE

[1] Georg Cantor, *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, în „Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereing.", **1**, 1890—1891, pp. 75—78.

[2] Leopold Löwenheim, *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, în „Math. Annalen", **76**, 1915, pp. 447—470.

[3] Thoralf Skolem, *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik*, în *„Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo*, I. Matematisk-naturvidenskapelig Klasse", 1929, nr. 4, 49 p.

[4] Jacques Herbrand, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Varșovia, 1930, 128 p.

[5] Kurt Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, în „Monatsh. Math. Phys.", **37**, 1930, pp. 349—360.

[6] Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* I, în *loc cit.* **38**, 1931, 173—198; *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems, mimeographed;* Princeton, 1934, 30 p.

[7] David Hilbert și Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, Berlin 1934.

[8] Alfred Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, în „Studia Philosophica", **1**, 1936, pp. 261—405.

[9] Rudolf Carnap, *Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik*, în „Monatsh. Math. Phys.", **42**, 1935, pp. 163—190.

[10] Barkley Rosser, *Extensions of Some Theorems of Gödel and Church*, în „Jour. Symbolic Logic", **1**, 1936, pp. 87—91.

[11] Alonzo Church, *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, în „Am. Jour. Math.", **58**, 1936, pp. 345—363.

[12] Alonzo Church, *A Note on Entscheidungsproblem*, în „Jour. Symbolic Logic," **1**, 1936, pp. 40—41, 101—102.

[13] Kurt Gödel, *Consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton, 1940, 1951, 66 p.

[14] Thoralf Skolem, *Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem*, Les entretiens de Zürich, ed. F. Gonseth, Zürich, 1941, pp. 25—52.

[15] David Hilbert şi Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 2, Berlin, 1939.

[16] A. M. Turing, *On Computable Numbers*, în „Proc. London Math. Soc.", **24**, 1936, pp. 230—265.

[17] Alfred Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, Rand Corporation, Santa Monica, California, 1948, 60 p.

[18] J. Ladrière, *Les limitations de formalisation*, Louvain, 1956.

CAPITOLUL II

OPTZECI DE ANI DE STUDII ASUPRA FUNDAMENTELOR [1]

Cu greu ar putea descrie satisfăcător cerul un om aflat în fundul unui puț. Pentru a compensa îngustimea orizontului meu, am intenția să mă lansez uneori în speculații lipsite de răspundere. Nu voi face nici o încercare inutilă de a fi imparțial, ci pur și simplu voi neglija acele aspecte ale logicii matematice care nu mă interesează. În cursul expunerii, voi menționa probleme mai mult sau mai puțin curente care rămîn deschise.

§ 1. ANALIZĂ, REDUCERE ȘI FORMALIZARE

Se poate spune că motivul apariției și sarcinile urmărite de cercetările în domeniul fundamentelor sînt legate de justificarea și clarificarea principiilor și conceptelor fundamentale ale matematicii. Număr, figură, constructivitate, demonstrație și inferență, mulțime și funcție, metodă axiomatică — iată cîteva dintre conceptele de bază. Studiul psihologiei invenției și rădăcinile matematicii în aplicațiile practice sînt neglijate în măsură considerabilă, iar aceasta se datorează, fără îndoială, faptului că nu se pretează cu ușurință la o tratare matematică. Reprezentabilitatea figurilor prin numere oferă o scuză, deși o scuză inadecvată, pentru neglijarea studiului separat al fundamentelor geometriei.

Indiferent dacă ne place sau nu, logica matematică domină astăzi scena, în cadrul studiilor asupra fundamentelor. Parțial, aceasta se poate datora unei combinații accidentale de circumstanțe istorice, parțial — ineficienței generale de pînă acum a altor abordări și parțial — stadiului încă primitiv în care se află studiile asupra fundamentelor. Chiar dacă cineva găsește că situația actuală este regretabilă (eu personal nu găsesc) și dorește o tratare mai flexibilă a chestiunilor de fundamente, nu există altă alegere decît aceea de a privi în față faptele și a ne concentra asupra logicii matematice, în încercarea de a examina starea actuală a domeniului. Ca ramură a matematicii, logica matematică concordă cu alte ramuri în relevarea unor concepte noi și rezultate noi, ca și în aprecierea semnificației acestora după gradul lor de noutate, după

[1] Acest capitol a apărut în numărul festiv, consacrat lui Bernays, al revistei „Dialectica" (**12**, 1958, pp. 465—497).

profunzimea și după frumusețea lor. Ea se deosebește prin faptul că se preocupă de conceptele și metodele cele mai generale, fundamentale.

Cercetarea matematică îmbracă o mie de forme deosebite, dintre care multe nu prezintă nici un interes pentru filozofia matematicii sau prezintă interes într-un cu totul alt mod decît acela în care îi solicită pe matematicieni. Introducerea de către Gauss a conceptului de congruență sau posibilitatea unor demonstrații diferite pentru teorema descompunerii în factori primi prezintă interes pentru filozoful matematicii numai prin faptul că ilustrează un aspect general, legat de importanța unui concept nou sau de eficiența și eventuala eliminabilitate a metodelor complexe în tratarea unor rezultate mai elementare. Analiza conceptelor matematice prezintă un interes filozofic mai direct.

Vom alege din istoria matematicii cîteva exemple care se apropie treptat — ca grad de generalitate și importanță centrală — de ideile studiate de logica matematică. S-a spus că reprezentarea numerelor complexe prin perechi de numere reale a elucidat „metafizica lui i". „Paradoxul infinitezimalelor al lui Berkeley" se rezolvă prin definiția contextuală a derivatei, dată de Cauchy — un tip de analiză pe care Ayer îl considera odată ca fiind sarcina principală a întregii filozofii. Analiza carteziană a geometriei elementare duce la geometria analitică a lui Descartes și la o definiție a constructibilității cu rigla și compasul. Definirea metodei de rezolvare a ecuațiilor prin radicali constituie un pas crucial în demonstrarea irezolvabilității ecuațiilor de gradul cinci. Răspunsul lui Klein la întrebarea: „ce este geometria?" stimulează și produce satisfacție. Analiza structurilor generale duce la noțiunile abstracte de grup, cîmp etc. Dedekind obține axiomele lui Peano, analizînd conceptul de număr.

Toate aceste exemple prezintă un anumit interes pentru filozofi. Dacă analiza ar însemna întotdeauna filozofare, o mare parte a matematicii ar fi filozofie. Filozofii tind să reliefeze contrastul dintre analiză și descoperire nouă, dintre clarificare și progres al cunoașterii. Exemplele de mai sus arată că analiza prezintă interes în matematică tocmai pentru că ne permite să unificăm metode diverse, să demonstrăm rezultate de imposibilitate, să scoatem în evidență caracteristici generale. Cu cît mai multă satisfacție dau aceste exemple de analiză, în comparație cu inutilele exerciții fragmentare în care abundă filozofia contemporană!

Există două ingrediente esențiale ale analizei — reducerea și formalizarea — care ies la iveală în mod pregnant în logica matematică. Unul dintre modurile de simplificare a conceptului rezidă în reducerea mai multor componente la mai puține sau în simplificarea fiecărui aspect în parte. De exemplu, dacă anumite proprietăți urmează din altele, definiția conceptului, desigur, le poate omite. Dacă privim conceptul ca pe o entitate caracterizată prin ansamblul teoremelor pe care le putem demonstra cu privire la ea, aceeași metodă de reducere este aplicată sistematic și în cadrul metodei axiomatice. Pentru a delimita reducția de formalizare, să aruncăm o privire asupra îndelungatei istorii a axiomatizării geometriei, de la Euclid la Hilbert. Putem spune că partea de reducție a fost înfăptuită de către Euclid, dar a trebuit să treacă foarte mult timp pentru a se ajunge la o formalizare minuțioasă, care explicitează toate presupunerile implicite. Dacă adăugăm axiomelor lui Hilbert logica predicatelor, obținem ceva în genul unei mașini generatoare de teoreme, încît în momentul de față sîntem în posesia unui criteriu obiectiv, automat, al unei axiomatizări complet formale.

Tipul de reducție pe care îl implică definirea și deducerea în cadrul unui sistem axiomatic constă — s-ar putea spune — în reducții locale, spre deosebire de reducțiile integrale, ca cea a numerelor complexe la numere reale. În timp ce exemplele individuale de reduceri locale interesează mai curînd matematica decît filozofia matematică, reducerile integrale i-au impresionat adesea pe filozofi. Privitor la formalizare, putem distinge — pe baza unui criteriu automat — formalizările depline de formalizările parțiale. Formalizarea riguroasă a unui concept (sau a unei mulțimi de concepte) este dată atunci cînd avem o axiomatizare riguroasă care conține, alături de conceptele logicii predicatelor, numai conceptul, sau conceptele care trebuie formalizate și pentru care se obține astfel o „definiție implicită". Într-o formalizare parțială pot figura și alte concepte și putem avea sau nu un sistem de axiome. De exemplu, definiția uzuală a funcțiilor general recursive sau un sistem de teoria numerelor cu conceptul neformal de mulțime arbitrară în cadrul principiului inducției. În toate formalizările, conceptul formalizat este ireductibil sau, dacă nu, ne abținem cel puțin de a-l reduce, păstrîndu-l în vederea unei cercetări separate.

Întrucît atunci cînd analizăm și formalizăm un concept urmărim să-l aducem la o formă mai exactă, sîntem puși în fața unei probleme mai generale: Dacă pornim cu un concept intuitiv vag, cum putem găsi un concept mai riguros care să-i corespundă fidel? Mai întîi, de multe ori nu este necesară o fidelitate absolută. Dacă miezul solid este păstrat, modificările marginale sînt permise. Mai mult, uneori sîntem capabili să concentrăm într-un singur loc toată nedeterminarea, astfel încît să nu ne mai preocupe vreo altă imprecizie. Sporul conceptual obținut în felul acesta poate fi foarte util. Drept urmare, unui concept mai confuz îi poate corespunde un concept mai exact: nu am eliminat integral confuzia, ci am redus-o doar la o formă mai simplă. Un exemplu bun este existența necondiționată a soluțiilor, în cadrul definiției funcțiilor recursive.

O dată acceptată formalizarea unui concept, constatăm de obicei că ne este ușor să fim clari în ceea ce avem de spus despre concept. Cînd sîntem presați, ne simțim mai curînd în stare să apărăm răspunsurile noastre. Formalizarea ne permite să demonstrăm lucruri pe care altfel le-am fi putut doar sugera, de exemplu, că derivata lui x^2 este $2x$. Rigiditatea conceptului formalizat conduce la decizii în cazuri în care simpla folosire a noțiunii intuitive era insuficientă. De exemplu, existența unei funcții continue peste tot însă nederivabilă poate fi demonstrată numai după ce s-a introdus definiția exactă a derivabilității. Un asemenea rezultat este în același timp un progres și o perturbare. Eliminarea cazurilor limită poate fi utilă în anumite scopuri, în timp ce obținerea unor răspunsuri la lucruri care nu necesitau inițial nici un răspuns nu este în general de dorit.

Reducerile integrale contrazic adesea dramul de adevăr din deviza: „Orice lucru este ceea ce este, și nu este altceva". Pe de o parte, dacă o reducere reușește, acesta este sfîrșitul problemei și nu trebuie să ne mai îngrijim de conceptul eliminat. Iată de ce, de exemplu, logica matematică se preocupă prea puțin de fracții și de numere complexe. Pe de altă parte, atunci cînd o reducere dă impresia că suscită un profund interes filozofic, este cazul să bănuim un subterfugiu. De exemplu, Dedekind și Frege vorbesc despre reducerea matematicii la logică și acestei realizări i s-a atribuit o mare semni-

ficație filozofică. Deși definiția pe care o dau numărului în termeni de mulțime este interesantă din punct de vedere matematic, prin faptul că stabilește o legătură între două discipline matematice diferite, ea nu este atît de tare, încît să ofere un fundament pentru matematică. În locul „reducerii", care sugerează un mers de la mai complex la mai simplu, cuvîntul mai neutru „traducere" ar descrie mai puțin derutant starea reală de lucruri. De exemplu, teoria mulțimilor finite și teoria numerelor naturale sînt traductibile una în alta, iar acest fapt sugerează o structură comună la temelia ambelor teorii, structură mai fundamentală chiar decît caracteristicile comune ale mulțimilor finite și infinite, așa încît distincția dintre mulțimile finite și infinite este mai radicală decît distincția dintre numerele întregi și mulțimile finite. Discuția despre fundamente logice induce în eroare cel puțin din două motive: ea creează impresia că teoria numerelor și teoria mulțimilor nu oferă propriile lor fundamente, ci că trebuie să căutăm fundamentele în altă parte, respectiv în logică; ea presupune că edificiul grandios al matematicii s-ar prăbuși dacă nu vom înlocui rapid printr-un fundament solid nisipul de la temelie. Nici una dintre aceste idei nu corespunde situației de fapt. Într-adevăr, dacă adoptăm modul liniar de gîndire, procedînd de la fundamentul logic la suprastructura matematică, tratarea matematică a matematicii însăși de către logica matematică conține o circularitate izbitoare. După cum remarcă Bernays, sintaxa nu este decît o ramură a teoriei numerelor, iar semantica o ramură a teoriei mulțimilor.

Circularitatea de bază sugerează faptul că metoda cea mai adecvată este mai curînd formalizarea decît reducerea, deoarece, în studiile asupra fundamentelor, ne interesează în primul rînd conceptele ireductibile. Oricît de impresionante ar fi performanțele unor exemple izolate în cadrul matematicii uzuale, formalizarea și-a găsit în cele din urmă căminul ei numai în logica matematică, în aproximativ ultimele opt decenii.

Dar este greu să reziști dorinței de a reduce și de a justifica. Atunci cînd optimismul excesiv al unei reduceri directe la logică a dus la disperare, Hilbert a inițiat un nou program de reducere indirectă prin intermediul unor demonstrații de consistență. Acest vis grandios al lui Hilbert a contribuit la apariția mai multor lucrări interesante asupra fundamentelor, deși este greu să pretindem că lucrurile la care am ajuns astăzi sînt acelea la care se gîndea Hilbert. Căci, în primul rînd, demonstrațiile de consistență demonstrează mai mult decît consistența și efectiv se pare că rezultatele mai tari sînt cele ce fac aceste lucrări atît de interesante, consistența fiind mai mult sau mai puțin un corolar secundar. În al doilea rînd, Hilbert se preocupa de justificarea metodelor mai puțin certe sau evidente prin metode mai certe sau mai evidente, și nu este clar dacă Hilbert avea o noțiune destul de clară și de cuprinzătoare despre evidență și certitudine, sau dacă metodele de demonstrație folosite efectiv în ultimul timp ar fi acceptabile pentru dînsul. Recent, Kreisel a introdus, ca variantă la teoria lui Hilbert, o problemă de interpretare a simbolurilor transfinite (cuantori și alte simboluri asemănătoare) din cadrul demonstrațiilor, problemă menită să scoată în evidență trăsăturile cruciale ale demonstrațiilor de consistență interesante. Chestiuni înrudite au fost cercetate de către Kleene, Stenius, Hintikka. În opoziție cu reducerile integrale, aceste probleme de interpretare s-ar putea numi reduceri locale

uniforme. Exemplul cel mai simplu îl constituie interpretarea lui Herbrand a calculului predicatelor prin calculul propoziţiilor.

În cadrul unor dispute cu intuiţioniştii, Hilbert apără importanţa demonstraţiilor finitiste de consistenţă, spunînd că o atare demonstraţie pentru un sistem ne permite să obţinem dintr-o demonstraţie din sistem a unei concluzii care nu conţine simboluri transfinite o demonstraţie a aceleiaşi concluzii prin metode finitiste. În felul acesta, programul de interpretare poate fi caracterizat ca un rezultat natural al punctului de vedere hilbertian. Pe de altă parte, acest program modificat şi generalizat poate fi considerat şi ca o generalizare directă a conceptului de traducere, program care ar putea fi caracterizat deci ca un descendent imediat al programului reducţionist mai vechi: întrucît traducerile păstrează structura, ele nu pot fi prea informative atunci cînd încercăm să clarificăm o anumită structură pe baza altei structuri, căreia îi acordăm preferinţă; să examinăm deci o conexiune mai slabă care nu păstrează structura.

Desigur, problema preferinţei nu admite un răspuns absolut obiectiv. Avem însă o bifurcaţie fundamentală a metodelor în metode constructive şi respectiv neconstructive, care poate fi corelată în linii mari cu opoziţia dintre infinitul potenţial şi infinitul actual. Avem diferite nuanţe de metode constructive şi neconstructive. Conform lui Bernays, avem în total cinci nuanţe. Dacă înlocuim „finitismul în sens mai restrîns" despre care vorbeşte Bernays printr-o zonă încă şi mai restrînsă de „antropologism" care pune în joc conceptul de „fezabilitate", obţinem următoarele cinci domenii: (1) antropologismul, (2) finitismul (în sens larg), (3) intuiţionismul, (4) teoria predicativă a mulţimilor sau teoria numerelor naturale ca entităţi („predicativismul"), (5) teoria clasică a mulţimilor sau teoria mulţimilor arbitrare (platonismul). Primele trei nuanţe pot fi caracterizate ca tratînd o matematică a acţiunii, iar ultimele două ca o matematică a existenţei. Dacă fiecare rubrică evocă o zonă vagă de concepte şi metode, enumerate într-o ordine de constructivitate descrescîndă, nici una dintre aceste regiuni nu a fost caracterizată suficient de precis pentru a putea satisface majoritatea celor ce lucrează în domeniul fundamentelor. Totodată, nu este clar nici modul în care se leagă între ele aceste regiuni. Fapt destul de curios, caracterizările de care dispunem astăzi sînt de aşa natură, încît cu cît un domeniu este mai puţin constructiv, cu atît mai satisfăcătoare este caracterizarea pe care i-o dăm. Orientarea care prevalează astăzi nu constă în a alege o tovarăşă de viaţă din rîndul celor cinci „şcoli", ci de a le trata pe toate ca pe nişte relatări folositoare despre o aceeaşi structură principală, care ne-ar permite să construim un tablou integral mai adecvat decît fiecare şcoală luată în parte. Deşi filozofii ar putea găsi că acest armistiţiu este mai puţin impresionant decît războiul de exterminare între şcoli, armistiţiul conduce incontestabil la o abordare mai eficientă a scopului iniţial — înţelegerea matematicii.

În mod firesc s-ar spune că metodele constructive sînt mai evidente şi mai sigure; într-adevăr, s-a lucrat asiduu în direcţia extragerii sistematice a conţinutului constructiv al metodelor neconstructive. Nu este încă clar dacă conceptele constructive sînt întotdeauna mai clare, iar metodele constructive, în mod cert, nu sînt de regulă mai simple. În raport cu cunoaşterea noastră actuală, înţelegem mai bine conceptul de mulţime „arbitrară" decît conceptul de demonstraţie constructivă. Un număr însemnat de lucrări sînt dedi-

cate și explicării conceptelor constructive pe baza unor concepte neconstructive.

Celor ce preferă o determinare riguroasă le putem spune că miezul studiilor asupra fundamentelor îl formează tratarea axiomatică a celor cinci concepte: fezabilitate, constructivitate, demonstrație, număr și mulțime. Dar atunci trebuie să acordăm atenție diverselor ramificații care uneori se pot dovedi mai importante decît însuși miezul. Avem formalizările parțiale, de exemplu formalizarea conceptului de procedee efective prin funcții generale recursive. Mai mult, în fiecare caz în parte ne ciocnim imediat de limitările impuse asupra formalizării și metoda axiomatică însuși devine un obiect de studiu. Sistemele formale sînt unelte foarte folositoare, dar noi nu numai că folosim uneltele noastre, ci le și dezvoltăm și le examinăm permanent nu doar ca pe un mijloc, ci aproape ca un scop al nostru principal, scop care amintește dorința unei critici a rațiunii pure. Pe scurt, pare corect să spunem că preocuparea principală de astăzi în cadrul studiilor de fundamente este clarificarea celor cinci domenii enumerate mai sus, prin formalizarea conceptelor ireductibile și legarea lor cu ajutorul unor reduceri locale uniforme. Această deplasare de accent de la justificare la clarificare își găsește corespondentul ei în filozofie, unde preocuparea principală se deplasează de la „cum cunoaștem" la „ce avem în vedere".

§ 2. ANTROPOLOGISMUL

În matematică, noi folosim constant cuvîntul „se poate" pentru a ne referi la posibilități teoretice. Dacă matematica ne preocupă în calitatea ei de activitate umană, posibilitățile practice devin mai interesante. În *Sur le platonisme* (1935), Bernays sugerează studierea unei atare folosiri a cuvîntului „se poate", dar afirmă explicit că nu pretinde că noi facem aritmetica, restrîngîndu-ne la procese „fezabile" („efectuabile") (p. 61-62). Bernays menționează faptul că noi trecem, fără ezitare, de la k și j la k^j, deși nimeni n-a dat și nu poate da, de exemplu, dezvoltarea zecimală a lui $67(_{257}{}^{729})$. Totuși intuiționiștii (ca și finiții în această privință) nu pun sub semnul întrebării semnificația și adevărul aserțiunii că există o asemenea dezvoltare. Ne putem întreba dacă în acest caz avem cu adevărat o evidență intuitivă. „Oare aici nu se aplică mai curînd metoda generală a analogiei, metodă care constă în extinderea la numerele inaccesibile a relațiilor verificabile concret pentru numerele accesibile? Într-adevăr, temeiul aplicării acestei analogii este cel mai puternic, cu atît mai mult cu cît nu avem o limită precisă între numerele care sînt accesibile și cele care nu sînt accesibile. S-ar putea introduce noțiunea de procese „fezabile" restrîngînd, implicit, domeniul de semnificație al definițiilor recursive la operații fezabile. Pentru a evita contradicții, nu ar trebui decît să ne abținem de la aplicarea legii terțului exclus la noțiunea de „fezabil". În *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956), Wittgenstein face multe observații critice (de exemplu, rîndurile 23—25, p. 65; rîndurile 16—22, p. 84; rîndurile 5—9, p. 156) care devin inteligibile, dacă ne amintim de preocuparea sa pentru concepția matematicii ca o activitate fezabilă. În recenzia sa la cartea lui Wittgenstein, Kreisel numește acest punct de vedere „finitism strict". Cuvîntul „antropologism" este ceva mai colorat.

Pe această bază putem deosebi o demonstrație finitistă de o demonstrație care poate fi realmente efectuată și păstrată în minte (și pe care Wittgenstein o numește demonstrație „inspectabilă" sau „transparentă)". De exemplu, din acest punct de vedere, o definiție, chiar explicită, nu este o „simplă" abreviere deoarece ea ne permite să vedem un aspect nou, să vedem într-o expresie veche ceva diferit, să sesizăm de fapt un domeniu mai larg de expresii. „Reducerea" aritmeticii numerelor la logica predicatelor cu identitate sau cea a notației zecimale la notația cu liniuțe atrage după sine, din acest punct de vedere, o pierdere însemnată constînd dintr-o micșorare considerabilă a domeniului numerelor cu care practic putem opera.

Inducția matematică codifică analogia dintre numerele accesibile și cele inaccesibile. Dacă justificarea principiului depășește sfera lucrurilor prezentabile în mod concret, acceptarea sa ne permite să aducem o mulțime de lucruri noi în domeniul lucrurilor inspectabile. Deși nu putem inspecta respectiva reprezentare printr-un șir de liniuțe a fiecărui numeral din sistemul zecimal, ne putem convinge prin inducție că pentru fiecare număr întreg pozitiv avem o notație unică, atît în sistemul zecimal, cît și în scrierea cu liniuțe. Tot astfel obținem și o inspecție indirectă a tuturor demonstrațiilor posibile dintr-un sistem, printr-o demonstrație inductivă de consistență.

Întrucît o mașină de calcul reală nu poate opera decît cu o cantitate restrînsă de date, trebuie să manevrăm și să transformăm notațiile și tehnicile, pentru a lărgi domeniul calculelor accesibile. Dacă se consideră că cercetarea fundamentelor urmărește, în primul rînd, determinarea acelui domeniu al matematicii cu care putem opera de fapt, atunci logica matematică, așa cum este ea practicată astăzi, ar putea juca cel mult un rol minor, iar dominația ei ne-ar crea o impresie greșită despre problemele de fundamente. De exemplu, dacă am dispune numai de notația cu liniuțe, nu am putea manipula numere mult mai mari ca 10; notația zecimală extinde domeniul, iar ridicarea la putere îl extinde și mai mult încă; în folosirea mașinilor de calcul, notația folosită pentru reprezentarea numerelor constituie o problemă importantă. Definițiile noi și teoremele noi îi interesează pe matematicienii activi, deși logica matematică poate pretinde că toate aceste definiții și teoreme erau conținute implicit în sistemul logic inițial. Antropologismul ne atrage atenția asupra acestei distincții neglijate de logica matematică.

Pe baza acestei abordări, alături de număr, mulțime, demonstrație, notația devine și ea în mod oficial un obiect de studiu. Pentru a expune un sistem, trebuie să prezentăm nu numai regulile de bază, ci și definițiile și demonstrațiile, deoarece măsura în care practic putem lucra cu sistemul depinde în mare parte de definițiile și demonstrațiile aflate la dispoziția noastră. Tot astfel, o propoziție își capătă sensul dintr-o demonstrare sau infirmare a ei, deoarece numai după aceea o putem situa la locul potrivit în intelectul nostru. Orice demonstrație modifică întrucîtva conceptul nostru actual și, s-ar putea spune, ne dă un concept nou. Sau, de asemenea, dacă reflectăm asupra elementelor umane implicate, este îndoielnic că o contradicție poate duce la prăbușirea unui pod.

Comparația cu mașinile nu trebuie să ne inducă în eroare. Oamenii angajați practic în folosirea și construirea mașinilor de calcul găsesc că studiile curente de automatică nu sînt chiar ceea ce vor ei; se simte cerința de a se studia, de exemplu, ce este lungimea unui calcul sau modul în care trebuie elaborat

în legătură cu operațiile mașinii un aspect similar cu teoria informației, acordîndu-se atenția cuvenită detaliilor cantitative. Totuși problemele acestea și chiar problemele privitoare la o mașină reală ale cărei structuri interne și tendință de a comite erori nu ne sînt clare, diferă de problemele care se pun în fața antropologismului. Pentru a opera cu asemenea mașini, ne putem gîndi la aplicarea statisticii în dinamica gazelor și, urmîndu-l pe von Neumann, am putea vorbi despre „logici probabiliste", dar și atunci am obține ceva similar cu logica matematică, în măsura în care toate aceste teorii operează cu lucruri cum sînt funcțiile de adevăr și distribuțiile acestora. Antropologismul nu preconizează o logică a staticului, ci a dezvoltării, a devenirii. Astfel, deoarece tratarea fructuoasă a omului ca mașină depășește cu mult cunoașterea și înțelegerea noastră prezentă, antropologismul propune o tratare mai mult behavioristă sau fenomenologică decît fiziologică a gîndirii matematice. Lucrul acesta pare să sugereze un cîmp vag de cercetări cu totul diferite de logica matematică, deși nu avem nici o justificare să credem că diferitele direcții de cercetare nu ar putea să coexiste.

Logica intuiționistă s-ar putea dovedi aplicabilă la antropologism. Dar cine dorește să adope în mod consecvent poziția antropologismului nu poate accepta formularea uzuală a calculului intuiționist care permite formule arbitrar de lungi și demonstrații arbitrar de lungi.

§ 3. FINITISMUL

Potrivit lui Hilbert, metodele finitiste constituie miezul combinatoric al demonstrațiilor matematice, așa că numai partea finitistă are un conținut matematic real, orice alt lucru fiind o simplă hipostaziere „ideală" comparabilă cu liniile și punctele de la infinit din geometria proiectivă. Pînă acum, se pare că nu am reușit să demonstrăm această teză, cu excepția notabilă a teoriei mulțimilor. Uneori, Bernays și Hilbert (precum și Frege, în ultimii ani de viață) au vorbit și despre intuiția noastră geometrică primară a continuului. Procedeul diagonalei sau teorema tăieturii a lui Dedekind par a avea un conținut real, deși cu greu putem pretinde că avem o reducere a lor la termeni combinatorici. În orice caz, avînd în vedere cunoașterea noastră actuală, dar poate că și pe viitor, se pare că avem nevoie în plus de ceea ce Bernays numește noțiuni „cvasicombinatorice", în sensul unei analogii dintre colecțiile infinite și colecțiile finite.

În primul volum al cărții sale *Grundlagen* (1934), Bernays dă o caracterizare a metodei finitiste. „Trăsătura distinctivă a acestui punct de vedere metodologic o constituie faptul că reflecțiile îmbracă forma unor *Gedankenexperimenten* cu obiecte considerate ca *așezate concret în fața noastră.* În cadrul teoriei numerelor, sînt tratate numere concepute ca fiind așezate în fața noastră, în algebră — expresii literale cu coeficienți numerici dați, așezate toate în fața noastră" (p. 20). „Ceea ce trebuie considerat ca esențial este doar că avem în numărul 1, ca și în orice adăugire a unui 1, un obiect intuitiv, care poate fi întotdeauna recunoscut din nou în mod univoc, și că în cazul fiecărui numeral putem cuprinde *(überblicken)* întotdeauna toate părțile discrete din care este format" (p. 21). Din context reiese clar că „putem" se referă la posibilitățile teoretice și că finitismul astfel specificat este o ideali-

zare. Această caracterizare generală la nivel epistemologic lasă loc la diferite interpretări. De exemplu, demonstrația de consistență pentru teoria numerelor pe care o dă Gentzen este în afara domeniului metodelor enumerate de fapt de Bernays în acest context. În același timp, demonstrația dată de Gentzen sugerează extinderi ale domeniului despre care s-ar putea spune că sînt conforme cu intențiile lui Bernays. Într-adevăr, în volumul doi din *Grundlagen* (1939), Bernays spune că demonstrația lui Gentzen deschide un capitol nou în teoria demonstrațiilor (p. 374). Așadar, am putea spune eventual că domeniul delimitat în primul volum este finitismul în sens restrîns, în timp ce domeniul considerat în volumul doi este finitismul (în sens mai larg). Dar nu sînt date suficiente indicații pentru a ne permite să stabilim o limită a metodelor finitiste.

Skolem și Kreisel au propus metode cu variabile libere (fără cuantori) care pot fi adecvat folosite la caracterizarea domeniului finitismului. De exemplu, demonstrațiile de consistență date de Gentzen și Ackermann au sugerat următorul sistem formal F: calculul propozițional, funcții primitive recursive, funcțiile recursive ordinale ale lui Ackermann, axiomele lui Peano, inducția transfinită fără cuantori pînă la ε_0, cu ordinali într-o notație standard, variabile funcționale libere, litere predicative libere. (Deși avem numai axiome privitoare la numere naturale, domeniul de valori al variabilelor individuale rămîne deschis în sensul că și alte obiecte pot fi considerate ca făcînd parte din domeniu.) Eventual, ar fi de dorit să includem și funcționale recursive primitive de tipuri finite. Am fi înclinați să stipulăm că toate demonstrațiile efectuabile în F, și numai ele, sînt finitiste; aceasta ar lipsi însă finitismul în mare parte de semnificația lui filozofică. Sau, tot așa, am putea bănui, pe temeiuri vagi, că nici un sistem formal nu poate include toate metodele finitiste, dar aceasta ar necesita o argumentație precisă. Introducerea unei caracterizări mai exacte a metodelor finitiste și rezolvarea — pe baza lor — a problemei dacă un sistem ca F cuprinde toate metodele finitiste, pare să prezinte un interes deosebit. O rezolvare pozitivă ar înlătura în mare măsură impresia neplăcută că ideea de metode finitiste este prea vagă.

§ 4. INTUIȚIONISMUL

Astăzi este un fapt general admis că metodele intuiționiste sînt mai largi decît metodele finitiste. De exemplu, Kronecker preconiza numai metodele finitiste, în timp ce intuiționismul mai adaugă metode logice noi. În aplicații, cele două tipuri de metode dau practic aceleași rezultate, întrucît deosebirea nu apare decît în cazuri complicate în mod artifical. Iată de ce von Neumann, de exemplu, le consideră ca unele și aceleași. Bernays subliniază concepția că intuiționismul trebuie considerat ca o extindere a finitismului. În timp ce finitismul operează numai cu propoziții decidabile (fără cuantori), intuiționismul permite și manipulații logice cu propoziții indecise cuantificate. Un intuiționist poate folosi asemenea propoziții indecise sau chiar implicații de asemenea propoziții ca premise ale implicațiilor. În acest mod, el face enunțuri care cuprind o formulare ipotetică a premisei, apelînd deci la totalitatea demonstrațiilor sau a construcțiilor care nu sînt specificate concret. Iată de ce finitismul nu pretinde o logică specială a predicatelor (calculul propozițional

uzual este aplicabil), în timp ce intuiționismul are o logică specială în care conectivele logice capătă interpretări speciale în termeni de absurd, construcție pe baza unei construcții ipotetice date, demonstrație pe baza unei demonstrații ipotetice date etc.

În discuțiile lor, intuiționiștii invocă adesea starea de fapt a matematicii la un moment dat, trăsătură care deosebește antropologismul de finitism. În această privință însă, intuiționiștii se preocupă, în primul rînd, de propozițiile cuantificate care n-au fost nici demonstrate, nici infirmate și care nu pot fi decise printr-o metodă generală. De exemplu, Mersenne a afirmat în 1644 că $2^{257} - 1$ este număr prim, iar această afirmație a fost infirmată abia de curînd. Dar și înaintea acestei infirmări, nici finiții, nici intuiționiștii n-ar fi ezitat să afirme că numărul $2^{257} - 1$ este sau nu este prim. Pe de altă parte, „sau există, sau nu există o infinitate de numere prime gemene" nu este o afirmație adevărată pentru intuiționiști, deoarece nici una dintre cele două alternative n-a fost demonstrată. În general, dacă $(x)\,(Ey)(z)R(x, y, z)$ înseamnă că există un f efectiv, astfel încît $(x)(z)R(x, f(x), z)$ iar — $(x)\,(Ey)(z)$ $R(x, y, z)$ înseamnă că nu există o funcție f pentru care $(x)\,(z)R(x, f(x), z)$, atunci „$(x)\,(Ey)\,(z)\,R(x, y, z)$ sau nu" este pur și simplu o afirmație neadevărată pentru un R convenabil ales astfel încît să existe doar o singură funcție neefectivă f, pentru care $(x)(z)R\,(x, f(x), z)$. În literatură întîlnim mai multe asemenea exemple.

Kleene și Gödel au dat interpretări ale aritmeticii lui Heyting care scot în evidență caracterul constructiv al sistemului. Adesea se afirmă că în timp ce aritmetica clasică are de-a face cu adevărul, aritmetica intuiționistă are de-a face cu demonstrabilitatea. Ținîndu-se seama de accentul pus pe starea actuală a matematicii, calculele intuiționiste ar mai putea fi interpretate prin folosirea expresiei „s-a demonstrat" în loc de: „este demonstrabil", dar paragraful precedent arată că trebuie luate precauții speciale în ce privește extinderea conceptului „s-a demonstrat", pentru ca acesta din urmă să poată reprezenta faptul că orice propoziție adevărată și decidabilă printr-o metodă generală a fost demonstrată.

Se spune că Heyting a obținut calculul său logic prin compilarea unei liste întregi de principii adevărate în ce privește noțiunea de demonstrație constructivă și prin eliminarea ulterioară a celor redundante. Interpretările date de către Kleene și Gödel pentru aritmetica lui Heyting propun un fel diferit de a vedea logica intuiționistă. Deși reține aparatul convenabil al cuantorilor, această logică diferă de cea clasică prin aceea că păstrează posibilitatea de a interpreta în termeni efectivi cu variabile libere toate concluziile obținute în teoria numerelor, inclusiv cele care conțin cuantori pe domenii numerice. În interpretarea lui Kleene, acest lucru este adevărat numai cînd concluzia se află în forma prenex, pe cînd în interpretarea lui Gödel lucrul este adevărat întotdeauna. Dacă preferați, putem spune că calculul intuiționist al predicatelor nu este decît un răspuns la problema restrîngerii operațiilor cu conective propoziționale și cuantori în așa fel, încît, cel puțin în domeniul teoriei numerelor, folosirea cuantorilor să nu ducă în final dincolo de domeniul nemijlocit acceptabil pentru cei care refuză să admită totalitatea funcțiilor recursive.

Comparînd starea actuală a intuiționismului cu situația din teoria mulțimilor de pe vremea lui Cantor, am putea crede că într-o zi se vor desco-

peri sisteme formale pentru intuiționism (pe baza conceptelor brouweriene de construcție, demonstrație constructivă și șiruri cu alegere liberă) care să fie adecvate (exact) intuiționismului, tot așa cum sistemele formale curente de teoria mulțimilor (bazate pe conceptul lui Cantor de mulțime) sînt adecvate teoriei mulțimilor. În măsura în care este în joc teoria numerelor, aritmetica lui Heyting este o formalizare tot atît de adecvată a teoriei intuiționiste a numerelor pe cît de adecvat este sistemul Z al lui Hilbert-Bernays pentru teoria clasică a numerelor. Deși — în lumina incompletitudinii lui Gödel — nu putem pretinde că Z constituie o formalizare completă, totuși el constituie o bază rezonabilă pentru numeroase considerații; pare acceptabil să privim în același spirit și aritmetica lui Heyting. Dincolo de această regiune, formalizarea lui Heyting nu este tot atît de satisfăcătoare. Astfel, axiomele lui Heyting pentru funcțiile de numere naturale sînt satisfăcute sau dacă variabilele sînt definite numai peste șirurile cu alegere absolut liberă, sau dacă admitem ca ele să fie definite pe reuniunea acestora cu funcțiile bine definite. Recent Kreisel adaugă alte axiome, astfel că rezultatul este satisfăcut numai dacă luăm exact șirurile cu alegere absolut liberă; Kleene adaugă axiome diferite, astfel că rezultatul este satisfăcut numai dacă luăm reuniunea acestora cu funcțiile bine definite. Alte axiome sînt necesare pentru specii. Comentariul lui Heyting sugerează că pentru a opera cu specii se poate folosi o teorie în genul teoriei ramificate a tipurilor (numai pentru tipuri finite).

§ 5. PREDICATIVISMUL: REZULTATE STANDARD. DESPRE NUMĂR CA ENTITATE

Dacă adoptăm axiomele lui Dedekind-Peano pentru aritmetică și adăugăm toate definițiile primitive recursive sau, în mod echivalent, pe baza unui rezultat al lui Gödel, adăugăm numai acelea pentru adunare și înmulțire, obținem — utilizînd sensul căutat al noțiunii de mulțime arbitrară care intervine în formularea principiului inducției — o caracterizare categorică a domeniului teoriei numerelor. Skolem demonstrează însă că, pentru a evita apelul la mulțimi arbitrare și a înlocui principiul general al inducției printr-un număr finit sau numărabil de cazuri speciale, nu mai dispunem de un sistem categoric. Sistemul formal standard obținut în acest mod este sistemul Z al lui Hilbert-Bernays, menționat mai sus, sistem în care se permite inducția peste toate formulele sistemului și numai peste ele (adică peste mulțimile definibile în sistem însuși). Skolem construiește de fapt un model pentru Z în care, pe lîngă numerele naturale, mai avem și anumite numere „nenaturale". Într-un sens oarecum slab, acest rezultat este echivalent cu teorema lui Gödel (anticipată parțial de către Finsler), potrivit căreia Z conține propoziții care nu sînt nici demonstrabile și nici infirmabile. Astfel, conform teoremei lui Gödel, trebuie să existe o propoziție adevărată însă nu demonstrabilă. Dacă adăugăm la Z negația acestei propoziții, trebuie să obținem, de asemenea, un sistem consistent care, conform unei extinderi a teoremei de completitudine a calculului predicatelor, are un model care trebuie să conțină anumite numere nenaturale, deoarece propoziția adăugată ar fi falsă , dacă am avea numai numerele naturale. Reciproc, putem extinde raționamentul lui Ryll-

Nardzewski, pentru a demonstra că Z nu admite nici o axiomatizare finită și să derivăm din rezultatul lui Skolem existența unor propoziții indecidabile în Z. Astfel, dacă înlocuim cuantorii prin funcții — așa cum face Skolem — și obținem un șir $f_1(n)$, $f_2(n)$,..., de funcții pentru toate axiomele lui Z, putem găsi, folosind numerația Gödel, un predicat $(Ej)\ B(j, f(m, n, k))$ care afirmă că j este o demonstrație în Z a formulei $f_m(n) = k$ pentru orice numerale m, n, k. Atunci $f_m(n) = \mu_k(Ej)B(j, f(m, n, k))$ este o formulă adevărată pentru orice m și n dați, dar nu este întotdeauna demonstrabilă cu variabila n, deoarece, în caz contrar, am putea urma construcția lui Ryll-Nardzewski, obținînd un caz al principiului inducției exprimat în Z dar indemonstrabil în Z.

Se lucrează în vederea descoperirii unor modele nonstandard, explicite, pentru sisteme parțiale ale lui Z. S-au făcut și încercări — pînă acum nereușite — de a găsi modele nonstandard pentru Z, în scopul demonstrării indecidabilității (și astfel, a adevărului, deoarece majoritatea lor pot fi formulate fără cuantori) unor ipoteze standard din teoria numerelor. După cum știm, dacă înlocuim principiul inducției din Z printr-o „regulă de inducție infinită" neefectivă, obținem o teorie completă. Rosser demonstrează că în cazul sistemelor care operează și cu mulțimi infinite, nici măcar regula inducției infinite nu le poate face complete. Rezultatele lui Gödel și Skolem creează impresia că Z nu este mai natural ca multe alte extinderi și sisteme parțiale ale sale, excepție făcînd faptul că principiul inducției în Z coincide cu cerințele puse de un ansamblu de reguli formative mai mult sau mai puțin naturale. O determinare reușită a domeniului metodelor finitiste ar putea eventual să susțină mai bine cauza preferării lui Z.

Folosirea pe scară largă a funcțiilor primitiv recursive de către Gödel și Skolem, împreună cu exemplul lui Ackermann de funcție recursivă, dar nu primitiv recursivă, i-a condus pe Herbrand și Gödel la două generalizări ale funcțiilor primitiv recursive. Definiția lui Gödel dă funcțiile general recursive pe care Church și Turing le-au putut identifica în mod convingător cu noțiunea intuitivă de funcții efectiv calculabile. Folosind această identificare, Church și Turing au dovedit că sisteme ca Z nu sînt efectiv decidabile și problema deciziei pentru calculul predicatelor nu este efectiv rezolvabilă. Funcțiile recursive Herbrand formează o clasă mult mai largă care poate fi identificată cu profit cu funcțiile „definibile efectiv". Pe baza funcțiilor general recursive și a cuantorilor, Kleene și Mostowski au introdus ierarhia aritmetică a predicatelor. Dintre mulțimile aritmetice, cele recursiv numărabile s-au bucurat de o atenție specială. Diferite forme ale unei teorii a numerelor reale calculabile au fost studiate de Goodstein, Specker, Grzegorczyk și alții.

În privința clasificării și ierarhiilor se mai pun multe alte chestiuni. De exemplu, Grzegorczyk dă o clasificare elegantă a funcțiilor primitiv recursive; nu posedăm însă o clasificare satisfăcătoare a totalității funcțiilor general recursive. S-au făcut pași preliminari către o clasificare a sistemelor formale prin noțiuni ca cea de consistență relativă, dar rezultatele nu admit comparație cu detaliile clasificării predicatelor din teoria numerelor. În altă direcție, Davis, Kleene, Kreisel, Myhill, Shepherdson au obținut rezultate interesante privitor la funcționalele constructive și clasificarea acestora.

Church și Kleene au introdus o clasă de ordinale recursive care se dovedește utilă în studiul ierarhiilor. Rezultate apropiate s-au obținut de către

Turing, Markwald și Spector în domeniul bineordonărilor recursive. În mod special, Turing a studiat logicile ordinale, în vederea unei clasificări a sistemelor și teoremelor prin numere ordinale.

Utilizînd numerele ordinale recursive, Davis, Mostowski și Kleene au introdus ierarhia hiperaritmetică. Addison, Kuznețov, Grzegorczyk-Mostowski-Ryll-Nardzewski au demonstrat că predicatele hiperaritmetice coincid cu predicatele reprezentabile prin funcții recursive Herbrand.

§ 6. PREDICATIVISMUL: ANALIZA PREDICATIVĂ ȘI DINCOLO DE EA

În mod tradițional se consideră că două tipuri de probleme au de-a face cu continuul. Primul tip include paradoxele lui Zenon și noțiunea de infinitezimale. În Ciuan-țe (secolul al IV-lea î.e.n.) citim: „Dacă un băț lung de un picior este scurtat în fiecare zi cu o jumătate din lungimea lui, din el va va mai rămîne ceva chiar și peste zece mii de generații". Aceste probleme nu privesc numai continuul, ci ar apare chiar dacă am avea de-a face numai cu fracții. Astăzi, noi considerăm, de regulă, că aceste probleme sînt, în esență, rezolvate, iar cei ce lucrează în domeniul fundamentelor nu le acordă prea multă atenție. Al doilea tip de probleme privește aproape exclusiv continuul și include problema definirii continuității și a clarificării conceptului de mulțime nenumărabilă.

O formalizare aproape standard a acestui domeniu al matematicii se obține folosind teoria simplă a tipurilor de ordinul doi sau, alternativ, adăugîndu-i și un al treilea tip predicativ. Problema descoperirii unei demonstrații de consistență pentru un asemenea sistem — problemă pe care Hilbert a pus-o pentru prima oară în 1900 — rămîne deschisă și astăzi.

Ideile predicativismului sînt mai puțin noi decît cele intuiționiste. Weyl a încercat pentru prima dată să dezvolte analiza pe linia predicativismului, dar nu a fost capabil să înlăture dificultatea că cea mai mică margine superioară a unei mulțimi de numere reale de ordin n nu mai este de același ordin. Anterior, această dificultate fusese înlăturată prin axioma cît se poate de impredicativă a reductibilității. În demonstrația sa de consistență pentru teoria ramificată a tipurilor, Fitch emite ideea că am putea eventual să recuperăm o parte din tăria axiomei reductibilității prin utilizarea de ordine infinite. Lorenzen face observația că dacă, de exemplu, luăm reuniunea numerelor reale de orice ordin finit, atunci fiecare număr real al reuniunii are un anumit ordin finit n, și fiecare număr real de ordin imediat următor aparține și el reuniunii. În acest mod, putem obține analiza clasică, cu demonstrațiile mai mult sau mai puțin standard, pe o bază predicativă cu ordine transfinite. Pare foarte natural să reformulăm abordarea lui Lorenzen în termenii unei teorii ramificate transfinite a tipurilor. Rezultatul este similar cu modelul lui Gödel pentru teoria mulțimilor dar, desigur, nu mai avem dreptul să folosim ordinale mari care presupun totalități impredicative.

Avem diferite locuri unde ne putem opri, de exemplu ω sau ε_0. Dar pentru a obține o proprietate de închidere, am vrea să ne oprim într-un loc unde indicii sînt întrebuințați numai cînd sînt deja accesibili în sisteme anterioare, iar toate ordinalele definibile în teoria finală sînt folosite ca indici. Un rezultat obținut de Spector arată că dacă folosim toate ordinalele recursive, și numai

pe acestea, atunci fiecare relație de bine-ordonare din teoria rezultantă are la rîndul ei ca tip ordinal un ordinal recursiv. Așadar, se pare că avem un motiv întemeiat de a folosi Σ_{ω_1}, unde ω_1 este cea mai mică margine superioară a ordinalelor recursive. Dacă cerem însă ca ordinalele pentru indici să fie definibile în sistemele anterioare într-un sens mai tare care urmează încă a fi determinat, probabil că ne-am opri la un ordinal mai mic. Pe de altă parte, se pot aduce argumente și în sprijinul dorinței de a merge dincolo de Σ_{ω_1}. Aceste argumente pot fi înțelese mai bine în legătură cu un rezultat obținut de Kleene.

Folosind anumite concepte brouweriene, Kleene demonstrează că predicatul de a fi notație a unui ordinal recursiv este un predicat recursiv de forma $(\alpha)(Ex)\, R(a, \overline{\alpha}(x))$, care ne duce astfel în ierarhia predicatelor analitice tratate de obicei în teoria simplă, de ordinul doi, a tipurilor. Acest lucru pare surprinzător, în măsura în care predicatul este introdus printr-o definiție inductivă, și totuși toate definițiile impredicative de forma $(\alpha)(Ex)\, R(a, \overline{\alpha}(x))$, R fiind recursiv, se reduc la acesta.

E adevărat că, reducînd definiția inductivă la una explicită, obținem o definiție impredicativă. Se consideră însă că definițiile impredicative necesare pentru transformarea definițiilor inductive (ca să ținem seama de condiția extremă) formează doar o mică submulțime bine înțeleasă a tuturor definițiilor impredicative posibile. Rezultatul lui Kleene conduce la întrebarea dacă nu s-ar putea obține predicate complete pentru forme mai complexe de predicate analitice, prin considerarea unor mulțimi mai largi de notații ordinale definite inductiv. În prima lor lucrare publicată cu privire la ordinalele recursive, Church și Kleene au introdus o mulțime mai largă; recent însă, s-a demonstrat că mulțimea nu constituie un predicat complet de forma $(\alpha)\,(E\beta)\,(x)\, R(a, \overline{\alpha}\,(x), \overline{\beta}\,(x))$. Pe de altă parte, dacă modificăm definiția lor, punînd cerința recursivității relative în locul recursivității, pentru extinderea unei „clase de numere" la clasa imediat următoare, nu pare a fi posibilă decît definirea mulțimii printr-un predicat de forma $(\alpha)\,(E\beta)\,(x)$ $R(a, \overline{\alpha}(x), \overline{\beta}(x))$. Nu s-a demonstrat însă că acesta este un predicat complet avînd forma cerută. Întreaga chestiune a obținerii unor predicate complete informative de forme mai complexe în ierarhia analitică pare să rămînă mai departe deschisă. Într-adevăr, înseși noțiunile de definiție „inductivă" și de ordinal „inductiv" par să necesite imperios o definiție mai precisă.

Se pare că este rezonabil să privim mulțimile definibile prin definiții inductive drept mulțimi predicative. Privitor la aceste mulțimi este adevărat nu doar că nu sîntem siliți să trecem dincolo de numărabil, ci și că, spre deosebire de ceea ce se întîmplă în cazul teoriei impredicative a mulțimilor, avem întotdeauna un model minimal unic, care este în fapt modelul vizat. Dacă acceptăm acest raționament, problema caracterizării noțiunii de definiție inductivă este legată intim de chestiunea determinării domeniului de predicativism, chestiune care ne-ar duce mult dincolo de Σ_{ω_1}.

În treacăt fie spus, în teoria ramificată uzuală a tipurilor, avem o distincție între nivele și ordine (finite). Dacă, de exemplu, considerăm numai mulțimi de numere naturale și nu mulțimi de mulțimi etc., mai avem încă mulțimi de ordine mai înalte, deși nu mulțimi de nivele mai înalte. S-ar putea crede că prin folosirea suplimentară a unor mulțimi de nivel mai înalt obținem mai multe mulțimi de numere naturale. Se dovedește însă că obținem exact

aceleași mulțimi de numere naturale, înlocuind cuantificarea peste mulțimi de nivel mai înalt prin cuantificarea unor mulțimi de ordin mai înalt de numere naturale. Acest considerent se poate folosi pentru a demonstra că mulțimile de numere naturale definibile în Σ_{ω_1} coincid cu mulțimile hiperaritmetice. Spector și, mai recent, Gandy au demonstrat un șir de rezultate privitor la Σ_{ω_1}. Extinderea demonstrațiilor cunoscute de consistență pentru teoria ramificată a tipurilor (numai cu tipuri finite) la Σ_{ω_1} nu pare dificilă. O problemă mai grea ar fi extinderea demonstrației lui Ackermann pentru Z sau a demonstrației lui Gödel pentru Z prin intermediul traducerii lui Z în teoria intuiționistă a numerelor și al interpretării date acesteia din urmă.

Dacă vrem să dăm o formulare satisfăcătoare a teoriei predicative a mulțimilor, se pare că putem folosi și variabile definite peste toate mulțimile din cadrul teoriei, precum și variabile definite peste șiruri cu alegere absolut liberă sau chiar peste mulțimi arbitrare, în maniera intuiționiștilor. Dacă dorim să „reconstruim" matematica clasică pe această bază, atunci porțiunile care nu presupun, în mod necesar, impredicativitatea se pot obține — ca la Lorenzen — iar porțiunile intrinsec impredicative și nenumărabile trebuie înlăturate. Mai poate exista și o porțiune medie; aici va trebui depusă multă muncă pentru a determina dacă avem o versiune predicativă satisfăcătoare — exemplul dat de Kreisel fiind teorema lui Cantor-Bendixson.

§ 7. PLATONISMUL

Teoria mulțimilor arbitrare cuprinde trei noțiuni, în afara noțiunii de infinitate, prezentă deja o dată cu numerele întregi: (1) definițiile impredicative și mulțimile nenumărabile; (2) formarea unor noi totalități de mulțimi și submulțimi ale acestor totalități; (3) totalitatea mulțimilor. Conform lui Cantor, „vom înțelege printr-o „mulțime" orice strîngere într-un întreg M a unor obiecte definite, distincte m (care se vor numi „elementele" lui M) ale intuiției sau ale gîndirii noastre" (1895). Paradoxele nu l-au tulburat pe Cantor, deoarece el simțea că acestea survin numai pentru că nu acordăm atenția cuvenită elementului „genetic" care intervine în procesul formării de noi mulțimi. După Cantor, totalitatea obiectelor matematice nu mai este obiect matematic. El distinge între colecții consistente și inconsistente, acestea din urmă fiind prea cuprinzătoare pentru a fi mulțimi și putînd fi doar tratate, fiecare în parte, ca o Multiplicitate și nu ca o Unitate; în caz contrar apar contradicții. Dacă ajungem la paradoxe cînd vorbim despre totalitatea mulțimilor care nu sînt și nu pot fi un întreg închis, vinovați sîntem numai noi înșine.

Zermelo și, recent, Ackermann au propus sisteme formale destinate să constituie formalizări ale conceptului cantorian inițial de mulțime, concept care subliniază „limitarea mărimii". Formularea lui Zermelo a fost dezvoltată, în continuare, de către Fraenkel, Skolem, von Neumann și a căpătat o elaborare definitivă la Bernays. Cu unele modificări, această formulare este descrisă concis în celebra monografie a lui Gödel și a fost acceptată pe scară largă de către matematicienii specialiști. Problemele de consistență și interpretare pentru sistemul lui Ackermann nu au fost prea mult discutate. De

exemplu, se poate demonstra că orice proprietate care nu conține însuși conceptul mulțimii M este diferit în extensiune de M, astfel încît este imposibil să adăugăm în mod consistent ceva similar cu formula lui Gödel $V = L$. Nu avem o demonstrație a consistenței sistemului relativ la sistemul din cartea lui Gödel, de exemplu. Ackermann dă o demonstrație că acest din urmă sistem este conținut în propriul lui sistem; se pare însă că e de dorit să modificăm demonstrația sa, pentru a folosi noțiunea mai satisfăcătoare de „proprietate definită" (Skolem) în locul noțiunii lui Fraenkel în termeni de „funcții". De asemenea, pare interesant să cercetăm dacă putem alege unele condiții minimale rezonabile pentru un model standard și putem decide dacă sistemul admite un model standard.

Inițial, Zermelo lasă nedefinită noțiunea de „proprietăți definite", iar astăzi se acceptă în mod uzual specificarea noțiunii dată de către Skoleme Desigur, dacă căutăm un sistem formal, ar trebui să adoptăm o formulare explicită de un fel sau altul. Noțiunile mai largi nu violează însă intenția inițială, care invocă, literal vorbind, „proprietăți definite" arbitrare. De aceea, dacă vrem să atenuăm cerința pusă în fața formalizării, pentru a căpăta astfel o reprezentare mai fidelă a noțiunii platonice de mulțime, acesta este locul cel mai firesc în care putem să introducem asemenea atenuări. De exemplu, s-ar putea spune că pentru orice mulțime dată și pentru orice proprietate definită, oricum ar fi ea exprimată, există o submulțime a mulțimii respective, compusă din toate elementele care au proprietatea respectivă.

Paradoxele presupun atît definițiile impredicative, cît și totalitatea mulțimilor. Întrucît conceptul lui Cantor reține definițiile impredicative dar exclude o mulțime universală, ne putem întreba dacă nu putem să păstrăm o mulțime universală, excluzînd însă definițiile impredicative. Acest lucru este imposibil, deoarece nu putem evita chestiunea impredicativă dacă nu cumva mulțimea universală își aparține. Încercările de evitare a definițiilor impredicative au dus la diverse forme ale teoriei predicative a mulțimilor (teoria ramificată a tipurilor), ceea ce revine la o abolire virtuală a platonismului intrinsec al noțiunii de mulțime arbitrară. Obținem astfel o formă sau alta de teoria mulțimilor, care constituie o „teorie fără clase", numită uneori și „conceptualism".

Russell a dezvoltat o atare teorie, dar a descoperit că nu putea obține ceea ce dorea. Astfel, el a introdus definiții impredicative sub deghizarea unei „axiome a reductibilității". Efectul net este ceea ce astăzi se numește teoria simplă a tipurilor. Deși, ca formalizare a teoriei mulțimilor, această teorie nu este tot atît de satisfăcătoare ca orientarea inițiată de Zermelo, ea rămîne un instrument util în studierea structurii detaliate a mulțimilor (ierarhii și clasificări). Acest sistem este, în esență, la fel de tare ca teoria mulțimilor elaborată inițial de către Zermelo luată împreună cu noțiunea lui Skolem de „proprietate definită". Dar, așa cum demonstrează Kemeny, această din urmă teorie conține mai multe mulțimi (și, în speță, mai multe mulțimi de întregi). Dacă însă slăbim întrucîtva *Aussonderungsaxiom* într-un mod natural, obținem un sistem cu aceleași mulțimi: în locul unui predicat $F(a)$ vom folosi numai predicatele în care fiecare cuantor este legat printr-o variabilă liberă, de exemplu, $(x)\,(x \in b \rightarrow G(x))$, $(Ey)(y \in c \,\&\, H(y))$ etc., unde b, c sînt libere în $F(a)$.

Sistemul inconsistent al lui Frege conținea deja o teorie a tipurilor pentru predicate, dar nu și o teorie a tipurilor pentru mulțimi. Într-adevăr, intro-

ducerea tipurilor relativ la predicate aproape că este, după cum se pare, o necesitate lingvistică.

Studierea pur formală a teoriei simple a tipurilor și ignorarea „metafizicii" din spatele acesteia l-a dus pe Quine la un sistem formal deconcertant, care păstrează atît mulțimea universală, cît și definițiile impredicative, dar impune anumite condiții „zigzag" („stratificarea") definițiilor admisibile pentru mulțimi. O variantă (și extindere) elegantă a sistemului este cuprinsă în cartea sa *Mathematical Logic* (ediția din 1951), lucrare care se bucură de o largă răspîndire în rîndurile filozofilor. Noi știm că ultimul sistem este consistent în cazul în care primul sistem este consistent. Aceste două sisteme prezintă trăsături speciale; în egătură cu primul sistem s-a demonstrat că, într-un sens determinat, el nu posedă nici un model standard și că axioma alegerii în forma ei uzuală este infirmabilă în cadrul sistemului. Pînă acum, nimeni nu a reușit să dobîndească o înțelegere intuitivă mulțumitoare a acestor sisteme: nu dispunem de o demonstrație a inconsistenței sistemelor și nici de o demonstrație a consistenței lor relativ, de exemplu, la sistemul din cartea lui Gödel.

Avem și o altă orientare în formalizarea teoriei mulțimilor, conform căreia definițiile supărătoare sînt comparate cu punctele de singularitate în analiză (Gödel). O formulare dată de Church și una dată de Hintikka pot fi privite ca exemplificări ale acestei abordări. Ambele sisteme s-au dovedit însă a fi inconsistente.

Inițial, Cantor a presupus că toate mulțimile pot fi bine ordonate și că numărul cardinal al continuului este imediat următor numărului întregilor (ipoteza continuului). Zermelo a demonstrat că prima ipoteză este echivalentă cu axioma alegerii. Mult mai tîrziu, D. Mirimanoff, von Neumann și Zermelo au introdus, în mod separat, *Fundierungsaxiom*, în vederea excluderii unor iregularități. În cartea lui Gödel, A,B,C sînt axiomele teoriei uzuale a mulțimilor, D este *Fundierungsaxiom*, E este o axiomă a alegerii. Problema independenței acestor principii a fost studiată foarte minuțios. Fraenkel și alții au demonstrat că D și E sînt, fiecare în parte, independente de $A - C$, dar mai rămîne deschisă problema dacă E este independentă de $A-D$. Von Neumann a demonstrat că dacă mulțimea $A - C$ este consistentă, D este consistentă. Gödel a demonstrat că dacă $A-D$ (sau, desigur, $A - C$) este o mulțime consistentă de axiome, atunci E, ipoteza continuului, și o axiomă de categoricitate ($V = L$) sînt toate trei consistente. Nu se știe însă dacă axioma de categoricitate este independentă de $A - D$ și dacă ipoteza continuului este independentă [2] de $A - E$.

Rezultatul obținut prin adăugarea axiomei de categoricitate a lui Gödel la teoria uzuală a mulțimilor este similar unei teorii predicative a mulțimilor, cu excepția faptului că sînt folosite numere ordinale mari care presupun totalități impredicative. Într-un asemenea sistem, toate trăsăturile impredicative se reduc la un tip special, și anume la existența unor anumite numere ordinale mari sau a unor mulțimi bine ordonate mari. Dacă secționăm sistemul și folosim numai numere ordinale definite predicativ, obținem pentru teoria predicativă a mulțimilor un cadru similar celui discutat în paragraful precedent.

[2] Independența ipotezei continuului față de celelalte axiome ale teoriei mulțimilor a fost demonstrată în 1962 de P. Cohen. N. T.

Problema numerelor ordinale este strîns legată de a doua noțiune pe care am menționat-o la începutul acestui paragraf, și anume de formarea unor totalități noi sau a unor extinderi repetate ale domeniului mulțimilor. Postularea unor numere ordinale tot mai înalte, permițînd mai multe nivele de extinderi, ar da, în mod natural, teorii ale mulțimilor din ce în ce mai bogate. Problema găsirii unor numere ordinale mai înalte, pare să fie strîns legată de cercetările întreprinse de Gödel în vederea obținerii unor axiome mai tari ale infinitului.

Caracterul destul de special al modelului lui Gödel, în care ipoteza continuului (generalizată) este adevărată, face foarte plauzibilă existența altor modele, în care ipoteza continuului este falsă. Lusin și Gödel au emis presupunerea că ipoteza cantoriană a continuului este independentă de axiomele mulțimilor și efectiv falsă, conform semnificației adevărate, neelucidate încă, a noțiunii de mulțime. Lusin sugerează că trebuie să căutăm un model pentru axiomele uzuale ale teoriei mulțimilor, în cadrul căruia ipoteza cantoriană a continuului să fie falsă, dar să avem $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

Paradoxul lui Skolem se aplică în orice sistem formal al teoriei platoniste a mulțimilor. Astfel, conform intenției cu care a fost creat, fiecare sistem de acest fel operează cu o mulțime nenumărabilă de obiecte, în timp ce orice limbaj specificat în mod explicit poate avea numai o mulțime numărabilă de expresii și teoreme, admițînd astfel și un model numărabil care constituie o interpretare nevizată. Acest aspect poate fi scos în evidență și printr-un raționament ușor diferit de cel al lui Skolem, în felul următor. Să luăm teoria simplă, de ordinul doi, a tipurilor. Conform concepției cvasicombinatorice, interpretarea vizată conține numerele naturale, precum și toate mulțimile posibile de aceste numere — adică putem să luăm sau să lăsăm de o parte pe 1, și, în ambele cazuri, putem să luăm sau să lăsăm la o parte pe 2, și așa mai departe, ad infinitum. În acest mod, constatăm că există $2^{\aleph_0}$ mulțimi posibile. Dacă admitem un asemenea model ca dat într-un fel sau altul, putem extrage cu ușurință un model numărabil. Avem astfel un model numărabil natural pentru mulțimile predicative și avem o mulțime numărabilă de axiome suplimentare de existență a unor mulțimi, pentru mulțimile impredicative. Dacă orice adăugare a unei axiome noi poate fi realizată prin adăugarea unei mulțimi numărabile de mulțimi noi, am reușit. Dar lucrul acesta poate fi făcut cu ajutorul modelului căutat. Să luăm un caz extrem de simplu. Să admitem că dispunem de o axiomă nouă, care afirmă că există o mulțime K care conține orice m, și numai pe acei m, astfel încît $(EY)F(m, Y)$; pentru concizie, să admitem și că F nu conține alte variabile pentru mulțimi și nu conține nici alte variabile libere. Dacă dispunem de un model numărabil încă înaintea adăugării acestei axiome, atunci pentru orice m_0 dat avem următoarele posibilități: sau modelul numărabil respectiv conține deja o mulțime Y_1, astfel încît $F(m_0, Y_1)$, iar atunci $m_0 \in K$, și nu modificăm modelul; sau nu există nici un mod de a face ca $F(m_0, Y_2)$ să fie adevărat, indiferent ce mulțime Y_2 alegem din cadrul modelului maximal urmărit și atunci $m_0 \notin K$ și nu schimbăm modelul dat; sau există o mulțime Y_3 în cadrul modelului maximal, dar nu există nici o mulțime în cadrul modelului numărabil dat care să facă adevărat $F(m_0, Y_3)$, iar atunci adăugăm această mulțime Y_3, și $m_0 \in K$ este o afirmație adevărată în cadrul modelului extins. În acest mod, dacă adăugăm toate mulțimile Y_3 (în număr cel mult numărabil), dacă adă-

ugăm mulțimea K astfel definită și adăugăm totodată un număr numărabil de mulțimi noi pentru a asigura închiderea cu toate axiomele date în prealabil, atunci obținem un model numărabil pentru mulțimea augmentată de axiome. (Atunci cînd noua axiomă conține mai mulți cuantori pentru mulțimi, va trebui să folosim un raționament ceva mai complicat).

În raționamentul de mai sus am folosit, pentru început, modelul urmărit; noi am fi putut să folosim însă orice model dat și raționamentul ar fi rămas valabil. Pe de altă parte, dacă vrem să demonstrăm ceva mai mult, de exemplu, dacă vrem să găsim un model numărabil în cadrul căruia axioma alegerii să fie adevărată, atunci devine necesar să folosim modelul (maximal) vizat. Întrucît axioma alegerii este adevărată în modelul maximal, dacă vom scoate mai multe mulțimi din modelul maximal pentru satisfacerea axiomei alegerii — după ce am obținut în prealabil un model numărabil pentru celelalte axiome — vom ajunge la un model numărabil pentru teoria inițială, în cadrul căruia axioma alegerii este și ea adevărată. Într-un asemenea model, ipoteza continuului și o aserțiune în genul axiomei de categoricitate a lui Godel ar putea fi amîndouă false, dar probabil că nu am dispune de suficiente informații despre model pentru a putea demonstra aceste concluzii. În mod similar, deși pare plauzibil ca unele considerații de acest fel să poată fi folosite în vederea obținerii unui model pentru corpul principal al teoriei mulțimilor, în care axioma alegerii este falsă, este foarte improbabil să obținem, pe baza unei asemenea abordări, o demonstrație formală de independență pentru axioma alegerii.

Frege și Dedekind au putut deduce teoria numerelor din teoria mulțimilor (de fapt, teoria simplă, de ordinul doi, a tipurilor este suficientă), cu ajutorul axiomei infinitului. Zermelo, Greiling și Bernays reușesc să facă aceasta, fără să apeleze la axioma infinitului. În cadrul unei discuții, Michael Dummett a sugerat o definiție care nu face apel la axioma infinitului, dar este legată mai strîns de definiția lui Frege-Dedekind. Astfel, dacă luăm mulțimea vidă ca 0 și luăm mulțimea n plus ea însăși ca element nou în calitate de succesor n' al lui n, și dacă notăm prin C_a formula $(u)\,(0 \in u \,\&\, (y)\,((y \in u \,\&\, y \neq a) \rightarrow \rightarrow y' \in u))$, atunci x este un număr natural, dacă și numai dacă $(Eu)\,C_x(u)$ și $(v)\,(C_x(v) \rightarrow x \in v)$. Definițiile recursive se pot defini în mod similar, folosind triplete ordonate. În toate aceste abordări, se admite existența tuturor mulțimilor finite, dar numai unele mulțimi finite sînt identificate cu numerele naturale. Un anumit interes prezintă chestiunea elaborării unei teorii a mulțimilor în care orice mulțime a cărei existențe este asertată ar constitui totodată un număr natural. Într-o asemenea teorie ar fi posibilă adăugarea consistentă a unei axiome de categoricitate, care enunță că toate mulțimile sînt numere naturale.

§ 8. LOGICA ÎN SENS RESTRÎNS

După ce consideră geometria pe baza reprezentării ei analitice, Frege și Dedekind caută să demonstreze că matematica este o parte a logicii. Frege obiectează lui Dedekind pe temeiul că clasele și relația de apartenență nu sînt uzuale în logică și nu se reduc la noțiuni logice acceptate. Dar atunci concep-

tele și relațiile, folosite de Frege în locul celor dintîi, sînt echivalente, din punct de vedere matematic, cu clasele. În orice caz, deși justificarea posibilității unor adevăruri sintetice apriori trebuie argumentată minuțios, a spune că matematica este analitică sau a spune că matematica este logică nu face decît să deplaseze dificultatea în direcția clarificării conceptelor acestei logici îmbogățite. Ca să dăm cîteva exemple simple: o singură aplicare a inducției matematice conține o infinitate de silogisme; definițiile recursive care cuprind, fiecare în parte, o infinitate de definiții explicite constituie o nouă categorie de definiții, care au fost numite uneori „creative". Dacă logica nu conține de la început procese infinite, va trebui să le scoatem din pălărie, pentru a reduce matematica la logică. Evident, dacă unii consideră că logica conține (în mod implicit, poate) procese infinite iar alții — că nu conține, avem două sensuri diferite ale logicii. Putem continua să folosim cuvîntul „logică" într-un sens mai larg și într-un sens mai îngust, dar o bună parte a agitației stîrnite în jurul relației dintre logică și matematică dispare, dacă ținem seamă de faptul că este absurd să identificăm matematica cu logica în sens restrîns și este banal să comitem o atare identificare, dacă ajustăm domeniul logicii pentru a se potrivi cu cel al matematicii.

Prin tradiție, logica tratează exemple ca „toate plăcerile sînt trecătoare, nemurirea este o plăcere, deci nemurirea este trecătoare". Încă de mult se știi că logica tradițională este inadecvată într-o serie de privințe, de exemplu este inadecvată la tratarea relațiilor. Drept urmare, unii consideră că apariția logicii moderne trebuie datată de la formalizarea calculului propozițional și a calculului predicatelor realizată de către Frege, în 1879. Completitudinea calculului propozițional al lui Frege a fost demonstrată prin 1920, de către Bernays și Post, iar cea a calculului predicatelor în 1930, de către Gödel, care a extins rezultate obținute de Herbrand și Skolem. O problemă interesantă este obținerea unei definiții satisfăcătoare a completitudinii — problemă strîns legată de o definiție a logicii și a adevărului logic.

În *Wissenschaftslehre* a lui Bolzano (1837, retipărită pe la 1930), găsim o anticipare parțială a definițiilor curente pentru completitudine, validitate și adevăr logic. De obicei se spune că o propoziție logic adevărată este o propoziție adevărată în virtutea formei sale. Bolzano spune că o propoziție este validă *(allgemeingültig)* relativ la constituentele sale $i, j,...$, dacă toate rezultatele obținute prin schimbarea arbitrară a acestor constituente sînt adevărate. Aceste propoziții sînt numite de către Bolzano analitice (analitic adevărate) în sens larg. Mai departe, el definește propozițiile analitice în sensul restrîns ca propoziții în care toate părțile invariabile aparțin logicii. Urmează un comentariu sobru: „Această distincție are, desigur, ceva vag în ea, deoarece sfera conceptelor care aparțin logicii nu este definită atît de precis, încît să înlăture posibilitatea apariției unor controverse în această chestiune" (§ 148). După el, „anumite propoziții, A, B, C, D,..., M, N, O,..., se află în relația de compatibilitate și, în particular, relativ la conceptele i, j...," dacă „există anumite concepte care, puse în locul lui i, j,..., fac adevărate toate propozițiile". El continuă: „și spunem că propozițiile M, N, O,..., sînt deductibile din propozițiile A, B, C, D,..., relativ la constituentele variabile i, j,..., dacă fiecare mulțime de concepte, care fiind pusă în locurile lui i, j,..., face ca toate propozițiile A, B, C, D..., să fie adevărate, face totodată ca toate propozițiile M, N, O, ..., să fie adevărate" (§ 155). Dacă adoptăm definiția deductibi-

lității dată de Bolzano ca criteriu al adecvării unei formalizări a logicii, vedem că completitudinea calculului predicatelor înseamnă, pur și simplu, că relația de deductibilitate axiomatic definită coincide ca putere cu conceptul lui Bolzano de deducție.

Problema definirii logicii rămîne nerezolvată. Definiția dată de Bolzano propozițiilor logic adevărate (analitice în sens restrîns) depinde de specificarea anterioară a constantelor logice al căror domeniu — după cum admite însuși Bolzano — nu este determinat precis. S-a sugerat, de exemplu, ca noi să dăm, pur și simplu, o enumerare a constantelor logice. Aceasta ne amintește de Protagoras, care definește virtutea, enumerînd dreptatea, cumpătarea, pietatea, curajul și înțelepciunea, despre care se spune că formează părți ale virtuții în același sens în care gura, nasul, ochii, urechile sînt părțile feței. În orice caz, pentru orice listă pe care am putea s-o propunem, trebuie să argumentăm într-un fel sau altul că lista conține toate constantele logice și numai constante logice. Iar istoria eterogenă a logicii face ca acest lucru să fie aproape imposibil.

Filozofii au tendința să se preocupe de problema dacă formalizarea reflectă fidel discursul cotidian și cel științific. Întrucît logica matematică a trăit pînă acum o viață proprie nu prea lungă și destul de încărcată cu evenimente, logicienii de profesie înclină să treacă cu vederea această problemă, care oricum, dat fiind că privește în primul rînd discursul matematic, nu este foarte serioasă. Dacă gîndim în termenii categoriilor tradiționale de cantitate, calitate, relație și modalitate, am putea pretinde, eventual, că calculul monadic al predicatelor tratează cantitatea, calculul propozițional tratează calitatea, calculul poliadic al predicatelor tratează relația, logică modală tratează modalitatea. În fapt, am înclina chiar să susținem că, în măsura în care este vorba despre matematică, logica modală este inutilă, deoarece intervenția conceptelor modale în matematică poate fi suplinită în mod justificat prin alte concepte logice sau metalogice. Este plauzibil totuși ca în formalizarea noțiunii de constructivitate să fie necesară o variantă anumită a logicii modale, care operează mai curînd cu demonstrabilitatea decît cu adevărul, de exemplu, calculul predicatelor al lui Heyting. Oricum, calculul clasic al predicatelor și ceva în genul calculului predicatelor al lui Heyting par să fie suficiente pentru matematică, în tratarea aspectelor neconstructive, respectiv constructive. Dacă considerăm că o logică suficientă pentru raționamentele logice din matematică trebuie să fie suficientă, într-un sens nebanal, și în alte scopuri, avem, pare-se, un motiv întemeiat de identificare cu titlu de probă a logicii în sens restrîns cu calculul clasic și cel intuiționist al predicatelor. Din punctul de vedere al „bunului simț", putem considera chiar că, dintre cele două calcule, cel clasic este fundamental, și să trecem cu vederea, provizoriu, calculul intuiționist.

Mai rămîn problemele includerii identității și a predicatelor de nivel superior ca și a folosirii calculelor cu predicate multisortate. Dacă includem identitatea dintre indivizi și predicatele de orice nivel finit, sau dacă folosim un calcul multisortat cu identitate adecvat, obținem cu ușurință un sistem formal despre care putem spune că este o formalizare a logicii. Orice propoziție din calcul care este adevărată în toate interpretările este, în acest caz, un adevăr logic. Aceasta nu înseamnă că orice propoziție a logicii care se dovedește a fi adevărată într-o interpretare preferată constituie un adevăr logic: „există

trei indivizi" şi „doi indivizi oarecare diferă în cel puţin trei privinţe" ar constitui contraexemple. Dacă doriţi puritatea, trebuie să folosiţi o formulare uşor modificată, în care pînă şi expresia „unii indivizi există" este exclusă, astfel că un adevăr logic trebuie să fie adevărat în toate domeniile, şi nu numai în toate domeniile nevide. A spune, aşa cum fac unii logicieni, că adevărul *logic* al unor propoziţii logice poate depinde de mărimea universului, sau a discuta dacă axioma infinitului este un adevăr logic denotă probabil o neînţelegere, care se datorează, în parte, dorinţei inutile de a ne dispensa de conceptul de model sau interpretare şi în parte lipsei de dorinţă de a separa matematica şi logica în sens restrîns de discursul cotidian.

Calculul predicatelor nu numai că dă o formalizare completă a tuturor metodelor uzuale de raţionament de natură strict logică, ci totodată oferă un cadru în care orice sistem axiomatic poate fi considerat ca o aplicaţie obţinută prin adăugarea unor axiome noi care restrîng interpretarea anumitor predicate, precum şi domeniul variabilelor. În acest mod ne putem aştepta şi la o teorie generală a interpretării sistemelor axiomatice ca ramură a teoriei mulţimilor de felul celei pe care Tarski o numeşte teoria modelelor.

Rezultatele cele mai importante asupra calculului predicatelor sînt cele obţinute de Herbrand şi Gentzen; ele ne permit să avem demonstraţii fără să folosim *modus ponens* (adică fără nici un ocol, *Umweg*). Un mare număr de lucrări care pleacă de la aceste rezultate au fost elaborate de către Bernays, Kreisel, Schütte, Stenius, Craig, Hintikka, Beth. Aceste rezultate sînt atît de importante, încît se pare că oferă o tratare uniformă a calculului predicatelor. De exemplu, teorema de completitudine urmează direct din rezultatul lui Herbrand; Herbrand însuşi nu a tras această concluzie, poate din cauză că, dată fiind preocuparea sa pentru metodele finitiste, el considera că noţiunea de completitudine nu are sens. Herbrand a început prin folosirea teoremei sale pentru a găsi o tratare uniformă a tuturor cazurilor speciale cunoscute ale problemei deciziei pentru calculul predicatelor, iar opera sa este continuată de Church şi Dreben. Procedeul lui Gentzen este conceput în vederea unei tratări simultane a calculului intuiţionist al predicatelor. Beth a reuşit să folosească abordarea lui Gentzen ca să dea o demonstraţie de completitudine pentru calculul intuiţionist şi să prezinte totodată o justificare a alegerii făcute de Gentzen în materie de reguli ale calculelor predicatelor. O demonstraţie mai exactă a teoremei lui Beth de completitudine ar fi de dorit şi mai rămîne chestiunea obţinerii unei demonstraţii de completitudine acceptabile din punct de vedere intuiţionist. Este probabil totuşi că în curînd vom avea o tratare uniformă a logicii în sens restrîns, incluzînd teoremele de completitudine, teoremele de tip Herbrand-Gentzen, rezultatele lui Bernays privitor la operatorul ε al lui Hilbert, precum şi cazuri speciale ale problemei deciziei.

§ 9. APLICAŢII

După cum ştim, rezultatele de completitudine pentru calculul predicatelor au fost aplicate în domeniul algebrei. Mai avem multe alte aplicaţii ale logicii matematice (în sens larg). Tarski a perfecţionat metoda lui Sturm de decidere a numărului rădăcinilor reale ale unei ecuaţii algebrice date cu o singură variabilă x, reuşind să dea un procedeu de decizie pentru algebra elementară

și geometria elementară. Un exemplu privilegiat de aplicare a logicii în rezolvarea unor probleme celebre din matematica uzuală îl constituie soluția negativă obținută de Novikov pentru problema cuvintelor la grupuri. S-au făcut încercări, pînă acum nereușite, de a obține o soluție negativă pentru a zecea problemă a lui Hilbert (aflarea unei metode efective de rezolvare a tuturor ecuațiilor diofantice)[3]. Referitor la topologie, Church menționează problema găsirii unei mulțimi complexe de invarianți pentru varietăți elementare de dimensiuni mai mari ca 2. Kreisel a aplicat logica matematică pentru determinarea marginilor într-o teoremă a lui Littlewood și o teoremă a lui Artin. Axioma de categoricitate a lui Gödel a fost aplicată de Addison și alții în tratarea problemelor deschise din teoria descriptivă a mulțimilor. În domeniul mașinilor de calcul, în afară de aplicarea calculului propozițional la simplificarea circuitelor considerate ca statice, adăugarea elementului timp la circuite pare să apeleze la o aplicare a funcțiilor propoziționale recursive. Mai mult, întreaga orientare în direcția formalizării generează posibilitatea folosirii mașinilor ca auxiliar al cercetării matematice. Deși aici ne ciocnim permanent de dificultatea că avem nevoie de mașini de 100 sau 1 000 de ori mai rapide, nu putem contesta că sarcini de calibru mediu, cum sînt umplerea lacunelor dintr-o demonstrație corectă, nu depășesc considerabil capacitățile mașinilor de astăzi și că vom face mai mult cu mașinile aflate pe cale de apariție.

Notă suplimentară. Ceva mai recent, autorul a discutat probleme referitoare la „antropologism" într-un articol intitulat *Process and Existence in Mathematics* (în: *Essays on the Foundations of mathematics in Honour of A. A. Fraenkel).* În conexiune cu teoria mulțimilor a lui Ackermann, discutată în acest articol și în § 6 din capitolul XVI, un studiu recent al lui Azriel Lévy („Journal of Symbolic Logic", **24**, 1959, pp. 154—166) a clarificat sistemul în mai multe moduri.

[3] Această soluție a fost dată în 1971 de către matematicianul sovietic V. Matiajasevici

CAPITOLUL III
DESPRE FORMALIZARE [1]

§ 1. SISTEMATIZAREA

Cele mai pregnante rezultate ale formalizării survin în logică și matematică. Aici, formalizarea oferă cel puțin un fel de sistematizare. Sîntem împinși să credem că există un sistem de axiome destul de simplu din care se pot deduce în mod automat aproape toate teoremele și adevărurile matematice. În prezent, aceasta constituie numai o posibilitate teoretică, deoarece, după cum se pare, nu s-a făcut nici o încercare serioasă de a demonstra, de exemplu, toate teoremele dintr-un manual elementar de calcul. Cu toate acestea, simțim ceva măreț la gîndul că un sistem axiomatic simplu pe care îl putem memoriza cu ușurință încorporează practic, într-un sens, toate adevărurile matematice. Nu este prea greu să ajungem să cunoaștem acest sistem axiomatic atît de bine, încît ceilalți să ateste că ai înțeles sistemul. Din păcate, faptul că ești în stare să înțelegi astfel sistemul nu-ți dă o înțelegere foarte aprofundată a naturii matematicii și nici nu face din tine un matematician foarte bun.

A spune că fizica folosește metoda experimentală nu înseamnă a spune mult despre fizică. A spune că toate teoremele matematicii se pot demonstra pe baza anumitor axiome prin lanțuri silogistice (sau prin *modus ponens*) înseamnă a spune tot atît de puțin despre matematică. Simpla stăpînire a metodei experimentale nu este stăpînirea întregii fizici; simpla cunoaștere a faptului că un sistem axiomatic este adecvat pentru dezvoltarea matematicii nu înseamnă cunoașterea întregii matematici.

Există un alt fel de sistematizare, mai puțin superficială decît învățarea sistemului axiomatic. Ea rezidă în sesizarea intuitivă a întregului domeniu, în reprezentarea vie a întregii structuri în mintea noastră, așa cum un bun jucător de șah își reprezintă jocul de șah. Acest al doilea mod de sistematizare este un lucru pe care formalizarea (sau cel puțin numai formalizarea) nu ni-l poate oferi.

Dacă, în genere, nu am fi folosit niciodată sisteme logistice, numeroasele rezultate interesante privitoare la sistemele logistice (de exemplu, cele ale lui Skolem, Herbrand și Gödel) nu ar fi fost exprimate, desigur, niciodată în forma specifică în care sînt exprimate acum. Nu este însă cert că nu ar fi fost obținute rezultate în esență aceleași, deși ele ar fi fost obținute în alte contexte și cu titlul de rezultate referitoare la alte lucruri. Cu toate acestea,

[1] Acest capitol a apărut în „Mind", 64, 1955, pp. 226–238.

axiomatica sau metoda axiomatică exercită o atracție puternică prin faptul că ne permite, după cum se pare, să demonstrăm concluzii cuprinzătoare despre domenii întregi. Multora dintre noi, o teoremă semnificativă care se referă la un domeniu întreg ni se pare mai importantă decît teoremele particulare ale domeniului respectiv. Generînd sisteme, formalizarea îndeplinește funcția de a ne face capabili să vorbim precis despre domenii întregi ale științei.

§ 2. COMUNICAREA

Este greu de spus dacă formalizarea în general face ca o teorie sau o demonstrație să fie mai ușor de înțeles.

Să considerăm, de exemplu, schițarea orală a unei demonstrații descoperite de curînd, un rezumat destinat să comunice numai ideea fundamentală a demonstrației, un articol care prezintă această demonstrație celor ce lucrează în probleme înrudite, o formulare de manual a aceleiași demonstrații și o prezentare a acesteia din urmă în maniera din *Principia Mathematica*. Demonstrația este formalizată din ce în ce mai minuțios, pe măsură ce trecem de la o versiune la cea următoare. Ne putem întreba totuși dacă, în general, o versiune formalizată mai complet este mai clară sau servește mai bine ca mijloc de comunicare. Fiecare pas în parte al demonstrației ar fi mai ușor de urmărit, deoarece nu se fac salturi. Dar pînă și aceasta nu este un lucru sigur, deoarece sîntem obișnuiți să facem atît de multe salturi, încît găsim că e mai firesc să le facem decît să nu le facem. Sau, în caz contrar, am putea spune că, de fapt, pasul respectiv nu conține salturi și că demonstrația noastră formală sugerează că ar conține, numai din cauză că, în calitate de hartă a logicii noastre intuitive, sistemul nostru formal este deficitar.

Faptul că cineva găsește o demonstrație mai ușor de urmărit în comparație cu o alta sau faptul că cineva înțelege mai repede o demonstrație sau alta depinde destul de mult de datele prealabile ale omului respectiv. În general, cu cît cunoaștem mai bine o problemă, cu atît urmărim mai ușor o demonstrație sumară. Dar există și o anumită limită dincolo de care chiar și expertul în materie nu mai poate suplini detaliile care lipsesc. Mai mult, întotdeauna este posibil ca prezentarea să fie mai succintă decît este. Se poate afirma totuși, în mod cert, că o demonstrație formalizată mai minuțios este în general mai lungă, cu condiția ca în prezentarea ei să nu apelăm la abrevieri și ca versiunea ei mai puțin formalizată să nu facă risipă de cuvinte.

Cunoaștem cu toții prescripția explicării unei teorii fizice fără folosirea matematicii și prescripția exprimării ideii principale a unei demonstrații fără a face uz de simboluri. De aceea, s-ar părea că, în general, cuvintele clare sau limbajul mai puțin tehnic oferă un mijloc mai eficient de comunicare. De fapt însă, putem concepe cu ușurință exemple care ne-ar arăta că lucrul acesta nu este întru totul adevărat.

Exprimarea unor idei din fizică prin simboluri matematice constituie un fel de formalizare. Prin acumulare și tradiție, acest fel de formalizare a devenit și un mijloc puternic de comunicare: pentru cei ce înțeleg limbajul respectiv, o formulă succintă poate exprima mai precis o idee a cărei explicare în cuvinte obișnuite ar necesita pagini întregi și ar fi mult mai puțin satisfăcătoare. Uneori, evitarea limbajului matematic în comunicarea cu alți oameni devine practic

imposibilă. O personalitate mai vîrstnică a vieții publice engleze deplînge faptul că nici unul dintre numeroșii fizicieni eminenți cu care a fost în contact nu are destul curaj pentru a formula o apreciere clară asupra noii teorii a eterului propusă de el. După aceea, subliniază similaritatea teoriei sale cu paragraful final al unui articol recent al lui Dirac, înlăturînd însă ca neesențiale pasajele matematice însoțitoare din articolul lui Dirac. Se poate presupune că dacă ar fi inclus și pasaje matematice neesențiale comparabile în teoria sa, ar fi primit răspunsuri mai precise.

§ 3. CLARITATE ȘI CONSOLIDARE

Ne ajută oare formalizarea în analiza și clarificarea conceptelor?

Atunci cînd formalizăm concepte uzuale, creăm adesea impresia că am reformulat platitudini, dîndu-le o formă obscură și pedantă; de exemplu, definiția matematică a continuității unei curbe sau definiția tehnică a noțiunii de calculabilitate efectivă. Mai mult, formalizările exacte deformează aproape întotdeauna limbajul nostru obișnuit, într-un loc sau altul. De exemplu, s-a pus în evidență faptul că teoria russelliană a descripțiilor nu se aplică la propoziții ca „balena este un mamifer" și că uneori, în folosirea ei obișnuită, propoziția „regele Franței este pleșuv" nu este luată ca adevărată și nici ca falsă.

În cadrul cercetărilor științifice, noi recunoaștem adesea avantajul și chiar necesitatea de a plăti prețul abaterii considerabile de la folosirea uzuală a cuvintelor, pentru ca să obținem, în schimb, o terminologie și o notație destul de precisă. Dar în ce sens oare noțiunea tehnică de calculabilitate efectivă, de exemplu, este mai clară decît conceptul corespunzător al bunului-simț? De regulă, am înclina să spunem că noțiunea tehnică este *mai puțin* clară, deoarece este mai greu de însușit, iar un concept este mai clar, dacă și numai dacă este mai accesibil. Am putea să vorbim despre feluri diferite de claritate, așa cum Mill vorbește despre feluri diferite de plăcere. Atunci putem vorbi și despre un principiu al preferinței: numai cei ce au resimțit claritatea noțiunii uzuale și totodată și claritatea noțiunii tehnice sînt calificați să judece care dintre ele este într-adevăr mai clară. Iar atunci, după cum sperăm, ei vor găsi că noțiunea formalizată este mai clară.

Poate că ar trebui să spunem totodată că, dacă o definiție a unui termen este mai clară în comparație cu altele, aceasta depinde pe de o parte parțial de scopurile cărora le este destinat termenul respectiv și parțial de gradul nostru de familiarizare cu noțiunile cuprinse în cadrul fiecărei definiții. Avantajul principal al unei definiții mai clare a unei noțiuni este probabil faptul că este mai precisă; de exemplu, avem multe cazuri în care putea da un răspuns determinat la întrebarea dacă anumite funcții date sînt efectiv calculabile, abia după ce am făcut apel la noțiunea tehnică de calculabilitate.

Avem multe cazuri cînd nu putem pune o întrebare univocă și nici nu putem obține un răspuns univoc, dacă nu sîntem în posesiunea noțiunii formalizate. De exemplu, înainte de a putea să punem întrebarea și să răspundem la întrebarea dacă există curbe continue care ocupă un spațiu dat, a trebuit să avem o definiție exactă a curbelor continue. Tot astfel, mai întîi a fost necesară formalizarea noțiunilor de completitudine și decidabilitate, pentru

ca să putem da un răspuns negativ la chestiunea dacă teoria numerelor este completă, respectiv decidabilă.

Formalizarea adecvată a unui concept presupune analiza conceptului, nu atît în sensul analizei întreprinse atunci cînd spunem că a fi celibatar atrage după sine a fi necăsătorit, ci mai mult în sensul analizei problemei cvadraturii cercului care ne este oferită de către demonstrația irezolvabilității acestei probleme. Efectuată la un asemenea nivel, formalizarea contribuie la clarificarea și explicarea conceptelor.

O altă funcție a formalizării este clarificarea și consolidarea raționamentelor sau demonstrațiilor. Uneori, nu sîntem absolut siguri că am înțeles o anumită demonstrație; alteori înțelegem o demonstrație la un moment dat dar, recitind-o după cîteva zile, nu reușim s-o mai înțelegem. Se naște atunci dorința de a reface demonstrația în mod minuțios, explicitînd toți pașii implicați pe care îi conține și consemnînd o dată pentru totdeauna rezultatul în formă dezvoltată. La unii, această dorință de formalizare și de dezvoltare minuțioasă a demonstrațiilor poate deveni o obișnuință și un impediment în studierea anumitor ramuri ale matematicii. Dar satisfacerea ocazională a acestei dorințe de minuțiozitate nu este neapărat nocivă.

În anumite cazuri nu avem o linie precisă de demarcație între formalizarea și descoperirea unei demonstrații. Sînt multe cazuri cînd schițe, în esență incomplete, conținînd uneori și erori, se dezvoltă, transformîndu-se în demonstrații mai exacte. Uneori, abia după ce dispunem de demonstrația minuțios elaborată începem să percepem conexiunea ei cu schița sau indicația existentă. Alteori pare dificil să decidem cine este adevăratul descoperitor al demonstrației — cel care a schițat-o, sau cel care a formalizat-o?

§ 4. RIGOAREA

Într-un sens, a formaliza înseamnă a da rigoare.

Am putea menționa atacul lui Berkeley la adresa matematicienilor contemporani cu el, atac intitulat: „Analistul — un discurs adresat matematicianului infidel. În care se examinează dacă obiectul, principiile și inferențele analizei moderne sînt concepute mai distinct sau deduse mai evident decît misterele religiei și problemele credinței". Avem lunga poveste a modului în care Lagrange, Cauchy, Weierstrass și alții se străduiau să formalizeze exact noțiunile fundamentale de limită, continuitate, derivată etc., oferind astfel fundamente riguroase (deși nu neapărat certe) analizei matematice.

Pe scena contemporană, avem logicieni care deploră nepăsarea cu care matematicienii obișnuiți mînuiesc cuvintele și simbolurile lor. Unii logicieni sînt uimiți de faptul că nenumăratele confuzii aparente din matematică nu duc mai des la erori. Pe de altă parte, matematicienii deplîng, la rîndul lor, inacuratețea pretinselor demonstrații pe care le dau teoremelor matematice fizicienii și inginerii.

În cealaltă direcție, fizicienii consideră că matematicienii își pierd timpul îngrijindu-se de „criza fundamentelor"; matematicienii consideră că logicienii obișnuiesc să despice savant firul în patru, atunci cînd consacră pagini și volume întregi discutării sensurilor sensului sau folosirii ghilimelelor și parantezelor.

Orientarea justă constă în a fi riguros și minuțios în măsura în care împrejurările sau scopul urmărit cer acest lucru. Dar este mai ușor să spui decît să faci acest lucru. De exemplu, anumiți autori par să sublinieze neobosit lucrurile evidente, omițînd totodată pașii cruciali, mai dificili.

Problema distingerii expresiilor de ceea ce este exprimat poate să contribuie la ilustrarea unor chestiuni legate de rigoare. Au fost situații cînd trecerea cu vederea a acestei distincții a frînat, într-adevăr, în mare măsură progresul logicii. A devenit astăzi un lucru obișnuit în logică și filozofie să se sublinieze această diferență, folosindu-se de regulă ghilimele, pentru a deosebi, de exemplu, orașul Pekin de cuvîntul „Pekin". În prezent, chiar cei ce nu vor să-și piardă timpul folosind riguros ghilimelele, consideră necesar de multe ori să declare, de exemplu, că „ghilimelele sînt omise de cele mai multe ori, deoarece considerăm că această omitere nu va crea nici o confuzie". În fiecare clipă întîlnim anumite articole în care autorii folosesc atît de meticulos ghilimelele, încît devine foarte dificil să citim și să înțelegem ceea ce se spune.

Am putea chiar să-i împărțim pe logicieni în două grupe, după cum ei încearcă sau nu încearcă întotdeauna să folosească ghilimelele în mod coerent și exact. Poate că este o chestiune de temperament la mijloc; sau poate că este vorba și de faptul că unii sînt prea leneși sau prea harnici.

§ 5. APROXIMAREA INTUIȚIEI

Exprimarea ideilor în cuvinte sau descrierea unei anumite experiențe presupune o formalizare a intuiției. S-a afirmat că nici un număr finit de propoziții nu ar putea descrie exhaustiv întregul conținut al unui experiment particular. Cu alte cuvinte, formalizarea fără reziduuri a intuiției complete de la un moment dat este imposibilă.

Chestiunea aproximării intuiției prin formalizare este mai clară în ce privește matematica. De exemplu, noi cunoaștem intuitiv o mulțime de lucruri despre numerele întregi. Dacă ni se cere să caracterizăm ideea noastră despre numerele întregi, un mod de a răspunde constă în a spune că întregii formează un grup față de adunare, că formează o mulțime ordonată în raport cu relația uzuală „mai mare", și așa mai departe. Noțiunile de grup, mulțime ordonată etc. sînt definite mai exact sau formalizate mai mult decît noțiunea de număr întreg. În consecință, răspunsurile de acest fel contribuie, într-o anumită măsură, la clarificarea ideii noastre de număr întreg; de regulă, ele sînt totuși inadecvate, deoarece nu reușesc să caracterizeze fără ambiguitate numerele întregi.

Am putea să comparăm locul pe care structuri abstracte, ca grupul, cîmpul, mulțimea ordonată etc., îl ocupă în matematică cu locul conceptelor generale în viața cotidiană. Toate conceptele pot fi considerate ca niște rezultate ale formalizării sau abstractizării, servind ca instrumente ale gîndirii și cercetării. După cum s-a remarcat de multe ori, ca instrumente, ele ne ajută să facem economie de gîndire. De exemplu, nu numai întregii, ci și transformările în spațiu etc. formează grupuri; orice lucru pe care îl putem demonstra despre grupuri, în general, se aplică, desigur, și la grupurile speciale care se deosebesc între ele în mai multe privințe. Tot așa cum există nenumărate scaune deosebite

între ele pe care ne putem aşeza. În modul acesta, formalizarea, strîns legată de abstracţie, produce instrumente folositoare.

Pe de altă parte, de multe ori este greu să caracterizăm adecvat intuiţia noastră prin folosirea unor structuri formale. De exemplu, nu este uşor să descriem exact culoarea, aspectul etc. unui anumit scaun. Se consideră că axiomele lui Peano ar fi capabile să caracterizeze complet ideea noastră de număr întreg pozitiv; cu toate acestea, după cum a observat cu mult în urmă Russell, axiomele lui Peano sînt satisfăcute de orice progresie, cum ar fi şirul întregilor pozitivi impari sau şirul întregilor negativi. Russell considera că numai dacă apelăm la o teorie şi mulţimilor am putea face o caracterizare univocă. Progresele mai recente din logică dovedesc că el se înşela, crezînd chiar şi aceasta.

În fapt, după cum ştim, dispunem de rezultate importante care atestă, fără putinţă de eroare, că nu putem formaliza fără reziduuri nici noţiunea intuitivă fundamentală de număr întreg pozitiv şi nici noţiunea fundamentală de mulţime sau clasă.

Astfel, avem celebra teoremă a lui Gödel, după care, pentru orice sistem destul de bogat, putem găsi o anumită proprietate exprimabilă în sistem, astfel încît putem demonstra că fiecare întreg 1, 2,..., se bucură de această proprietate, dar nu putem să demonstrăm enunţul general că toţi întregii pozitivi se bucură de proprietatea în cauză. Cu alte cuvinte, deşi intuitiv dacă $P(1)$ (adică: 1 se bucură de proprietatea P), $P(2)$, $P(3)$, ..., sînt toate adevărate, atunci trebuie ca toţi întregii pozitivi să aibă proprietatea P, nu putem formaliza adecvat intuiţia noastră în nici un sistem logistic suficient de tare, în aşa fel încît să garantăm efectuabilitatea unei atare inferenţe pentru toate proprietăţile P exprimabile în sistem. Urmează de asemenea că nici un sistem obişnuit de axiome nu poate exclude interpretarea că alături de numerele uzuale 1, 2,..., mulţimea întregilor pozitivi mai conţine şi anumite alte obiecte stranii; nu dispunem de nici un mijloc de formalizare într-un sistem logistic obişnuit a intuiţiei noastre că 1, 2,..., sînt singurele numere întregi.

Pe de altă parte, nu avem nici un sistem axiomatic în care să obţinem *toate* numerele reale sau toate clasele de întregi pozitivi. Acest fapt decurge cu uşurinţă din faimosul raţionament al lui Cantor pentru nenumărabilitate. Astfel, pentru orice sistem de axiome dat, putem să enumerăm toate clasele de întregi pozitivi despre care se poate demonstra că există în cadrul sistemului, fie aplicînd teorema lui Löwenheim, fie reflectînd la faptul că teoremele de existenţă din cadrul sistemului pot fi enumerate. Aşadar, dacă definim împreună cu Cantor o clasă K de întregi pozitivi, astfel încît pentru orice n, n aparţine lui K, dacă şi numai dacă n nu aparţine la a n-a clasă din enumerare, atunci existenţa lui K nu poate fi demonstrată în cadrul sistemului. Cu alte cuvinte, deşi putem vorbi în cadrul sistemului şi despre toate clasele de întregi pozitivi, nu putem să formalizăm fără rest în mod real noţiunea intuitivă „toţi" cu privire la clasele de întregi pozitivi; pentru fiecare sistem axiomatic formalizat există întotdeauna o clasă de numere întregi pozitive care rămîne în afara sistemului.

§ 6. APLICAREA ÎN FILOZOFIE

Aplicarea logicii matematice la tratarea problemelor filozofice poate fi privită și ca o tentativă de formalizare. Asemenea aplicări creează de multe ori impresia că o carte tehnică formidabilă exprimă, cu o exactitate obositoare, idei mai mult sau mai puțin banale, pe care am fi putut să le formulăm cu mai multă ușurință și într-un mod mai direct în cîteva propoziții într-un limbaj limpede. Cu toate acestea, nu încape îndoială că avem cazuri cînd apelul la formalizare nu este o simplă pedanterie. De exemplu, formalizarea de către Heyting a concepției intuiționiste despre logică și matematică contribuie, în mare măsură, la propagarea ideilor lui Brouwer în rîndul celor ce adoptă o orientare cu totul opusă. Un alt exemplu îl constituie formalizarea treptată a ideii de a fi o proprietate definită, idee folosită în definirea mulțimilor, în cadrul axiomatizării teoriei mulțimilor de către Zermelo.

Am putea compara eventual numeroasele încercări de formalizare cu folosirea unui avion pentru vizitarea unui prieten care locuiește în același oraș cu noi. Afară de cazul cînd, pur și simplu, vă place să călătoriți cu avionul și vreți să folosiți vizita ca un pretext pentru a zbura, procedeul ar fi absolut inutil și cît se poate de inconvenabil. Am mai putea să comparăm acest lucru cu construirea sau utilizarea unui calculator imens numai în scopul de a afla cît face șapte ori unsprezece. Cînd problemele sînt așa de simple, pînă și traducerea lor într-un limbaj pe care, ca să spunem așa, mașina îl poate înțelege, ar necesita, din capul locului, mai mult timp decît cel necesar ca să calculăm rezultatele în gînd sau cu creion și hîrtie.

Alegerea mijlocului de comunicație pe care îl vom folosi pentru ca să facem o anumită călătorie sau decizia dacă are rost să construim un calculator pentru a rezolva un anumit tip de problemă este o chestiune de ordin practic. După cum știm, înainte de adoptarea unei decizii sînt luați în considerație, de obicei, o mulțime de factori diferiți. La fel, o problemă practică este și de a decide, în fiecare caz în parte, dacă este profitabil să aplicăm logica matematică pentru a trata o problemă de un anumit tip. Singura deosebire constă în faptul că factorii care trebuie luați în considerație sînt de multe ori mai ascunși și mai puțin determinați.

Să luăm principiul verificării. Diverse încercări de a da o definiție exactă a noțiunii de verificabilitate au eșuat. Folosirea sistematică a metodei logistice s-a impus ca singurul mod de a ajunge la o soluție satisfăcătoare. Pe de altă parte, există și concepția după care importantă este atitudinea generală care își găsește expresia vagă în principiul sumar al verificării, și nu definiția exactă a verificabilității. La baza acestei dispute se află, probabil, diversele atitudini față de dezideratul general al cristalizării ideilor.

Aici se ridică probleme mai vaste. De ce urmărim în filozofie această cristalizare? Care este funcția și scopul filozofiei? Din fericire, putem face observații generale fără să intrăm în asemenea chestiuni dificile.

§ 7. PREA MULTE CIFRE

După ce a schițat un sistem de axiome pentru teoria probabilităților, F.P. Ramsey continua, spunînd: „Nu am elaborat în detaliu logica matematică a acestei teorii, deoarece cred că aceasta ar echivala cu elaborarea pînă la

şapte zecimale a unui rezultat valabil numai pînă la două zecimale". Elaborarea cu exactitate prea mare a unui rezultat prezintă mai multe dezavantaje. Ea consumă un timp pe care l-am fi putut cheltui altfel. Totodată, aceasta face ca rezultatul să fie mai greu de memorizat sau de inclus în calcule viitoare, cînd cineva ar vrea să-l folosească. De asemenea, în legătură cu ultimele cinci zecimale ar apare probleme inutile: prezintă oare ele o formă interesantă care ar indica legitatea naturii? Coincid ele oare cu primele cinci cifre începînd cu a 101-a cifră din dezvoltarea zecimală a lui π? Şi aşa mai departe.

Cum decidem dacă un rezultat este valabil numai pînă la două zecimale? Dacă acelaşi experiment este repetat în circumstanţe diferite dar, după cîte ştim, la fel de favorabile, cu rezultate care concordă satisfăcător numai cu primele două zecimale atunci sîntem înclinaţi să conchidem că zecimalele de după a doua nu prezintă certitudine deplină. Dacă majoritatea oamenilor refuză să calculeze mai multe zecimale şi numai o singură persoană are dorinţa irezistibilă de a prezenta fiecare rezultat cu cel puţin şapte zecimale, s-ar putea să fie destul de greu să decidem dacă rezultatul său este corect.

Chestiunea construirii unei teorii exacte a probabilităţii bunăoară, cuprinde un factor suplimentar. Deoarece limbajul obişnuit nu este exact, noi făurim cuvinte noi sau dăm o accepţie tehnică cuvintelor uzuale. Pentru evaluarea teoriei trebuie mai întîi s-o înţelegem. Pentru ca s-o înţelegem, trebuie mai întîi să învăţăm un nou limbaj. Întrucît de obicei este imposibil să explicăm clar şi exact chiar şi uzanţele tehnice, o teorie formală sau exactă poate fi apărată întotdeauna împotriva acuzaţiei că nu este conformă cu faptele. Cînd sîntem puşi în faţa unui sistem destul de complicat şi al unui grup de oameni destul de mare şi de energic care, dintr-un motiv sau altul, găsesc de cuviinţă să elaboreze sistemul, avem o şcoală ştiinţifică puternică — de exemplu, teoria sensului, sociologia cunoaşterii sau logica inducţiei. Întotdeauna nutrim speranţa că dezvoltarea viitoare a teoriei va da cheia unor enigme vechi sau va fecunda spiritul unor invenţii noi. În orice caz, întrucît părţile diferite ale unui sistem dat se sprijină între ele, pericolul discreditării sistemului din cauza discrepanţei dintre o parte a sistemului şi fapte este mic. Desigur, dacă ne interesează „fundamentele", nu trebuie să ne temem de nici un test imediat. Lucrul cel mai rău care se poate întîmpla acestor teorii nu este infirmarea, ci neglijarea lor.

§ 8. LIMBAJUL IDEAL

Limbajul este folosit pentru exprimarea şi comunicarea gîndurilor. Eşecul comunicării se poate datora fie stăpînirii inadecvate a limbajului, fie deficienţelor interne ale limbajului, bineînţeles atunci cînd există gînduri de comunicat. Limbajul mai este folosit uneori pentru a spune absurdităţi. În acest caz, de asemenea, anumite limbaje par anume făcute ca să ne ducă în ispită. În sfîrşit, uneori, cel care foloseşte limbajul nu este destul de atent sau nu face decît să-i îngîne pe alţii. În aceste cazuri, el nu are de exprimat idei sau sentimente şi, desigur, problema comunicării corecte nici nu se pune. O maladie mai puţin serioasă este gîndirea confuză, care de multe ori implică incoerenţă lăuntrică. Din nou, aceasta constituie uneori o deficienţă a limbajului — datorită, de exemplu, unei ambiguităţi a cuvintelor sau unei gramatici susceptibile să inducă în eroare.

Crearea unui limbaj ideal ar da o soluție definitivă a tuturor acestor dificultăți. Un astfel de limbaj trebuie să fie atît de bogat, clar și exact, încît să fie suficient atît pentru exprimarea tuturor gîndurilor și simțirilor cu o claritate de nerăstălmăcit, cît și pentru prevenirea nonsensurilor. Dacă ar exista un asemenea limbaj, multe probleme cunoscute astăzi ca filozofice ar dispare. Dezacordul în jurul a ceea ce trebuie considerat nonsens ar duce la construirea unor limbaje ideale diferite. S-ar pune atunci problema înțelegerii limbajului ideal al fiecăruia.

O alternativă la limbajul ideal este tratarea minuțioasă și separată a fiecărui caz individual. Explicarea pe larg a ceea ce vrem să spunem, furnizarea unor exemple concrete, cînd este posibil, invitația la interogare și dezbatere. Totodată, să reflectăm minuțios și să ne întrebăm ce vrem de fapt să spunem, dacă avem ceva de spus, dacă nu sîntem induși în eroare de niște analogii false sau de o sinteză naivă.

În multe privințe, sarcina construirii unui limbaj comprehensiv ideal este similară găsirii unui procedeu automat pentru a decide răspunsurile la toate problemele matematicii. Amîndouă sarcinile sînt la fel de imposibile. Dar și atunci cînd aceste două sarcini sînt formulate clar, imposibilitatea poate fi demonstrată precis în ambele cazuri. În anumite zone simple din logică și matematică, sîntem în posesiunea unor procedee de decizie. La fel, în logica matematică și în fizica teoretică dispunem de limbaje mai exacte. Nu există însă o metodă automată de găsire a procedeelor de decizie și fiecare problemă matematică semnificativă necesită o tratare specială. Se poate demonstra că este imposibil să reducem întreaga matematică la porțiunea ei decidabilă. De asemenea, este la fel de imposibil să exprimăm adecvat în limbajul logicii și fizicii tot ceea ce avem de spus. Mai mult, aceste limbaje sînt mai exacte în structurarea lor abstractă decît în folosirea lor reală. Este bine cunoscut faptul că matematicienii care cunosc limbajul matematicii dau adesea demonstrații eronate.

Căutarea unui limbaj ideal este probabil inutilă. Problema formalizării constă mai curînd în construirea unor limbaje artificiale adecvate în tratarea diferitelor probleme.

§ 9. CÎT DE ARTIFICIAL ESTE UN LIMBAJ?

Contrastul dintre limbajele naturale și cele artificiale sugerează o distincție profundă. Limba rusă este naturală, în timp ce esperanto este o limbă artificială. Dar limbajul biologilor sau cel al filozofilor este oare natural sau artificial? Oare limbajul propus de dl. Woodger pentru biologie este natural sau artificial? Limbajul lui Hilbert pentru geometria euclidiană este mai exact și mai artificial decît cel al *Elementelor* lui Euclid. În măsura în care intră în joc dezvoltarea activităților umane de ordin științific, crearea limbajului mecanicii clasice sau al teoriei axiomatice a mulțimilor a fost destul de naturală.

Am putea să vorbim despre grade de artificialitate, măsurate eventual prin mărimea abaterii de la cursul natural. Limba chineză vorbită astăzi diferă, într-o măsură destul de mare, de cea folosită acum două mii de ani, deși schimbările intervenite au fost cît se poate de naturale. Dacă acum două mii de ani am fi încercat să producem aceleași schimbări în interval de un an,

am fi trebuit să creăm în acel timp o limbă extrem de artificială. Introducerea unui limbaj artificial constituie o revoluție. Dacă nu avem nevoi naturale care să ne constrîngă la aceasta, vom întîmpina o rezistență puternică și proiectul va eșua. Pe de altă parte, atunci cînd un limbaj artificial vine în întîmpinarea unor probleme urgente reale, el va fi în curînd acceptat în mod general și nu va mai fi considerat artificial. Așadar, ar fi mai potrivit să comparăm limbajele artificiale cu proiectele utopice.

Uneori, încercările de formalizare a teoriei probabilităților sînt criticate pe motivul că eforturile depuse în acest sens nu reușesc să intre în contact cu problemele cruciale și arzătoare ale științelor naturii. La aceasta se răspunde imediat că situația se prezintă în același fel cu numeroase cercetări interesante într-o serie de ramuri ale matematicii, ca algebra abstractă, teoria mulțimilor și topologia. S-ar putea argumenta totuși că, pe baza acestor studii, sînt introduse mai multe idei și metode noi decît pe baza cercetărilor în fundamentele teoriei probabilităților. Sau poate că noile limbaje ale algebrei și teoriei mulțimilor au mai multă substanță, iar rezultatele obținute aici nu sînt discreditate atît de ușor de micile deplasări de accent sau de erorile subtile ale analizei inițiale.

D-na Joan Robinson remarcă undeva că, de obicei, economiștii rămîn în urma timpului lor. O problemă practică urgentă începe adesea de multe ori să fie urgentă sau practică cu mult înainte de a se descoperi o soluție satisfăcătoare din punct de vedere teoretic. Dacă cercetările pentru găsirea soluției unei probleme care nu mai e urgentă merită continuate — aceasta depinde în mare măsură de faptul dacă problema respectivă este legată intim de chestiuni mai ample, dacă este destul de atractivă din punct de vedere intelectual și dacă are șanse să se pună din nou în viitorul apropiat. La fel, valoarea unui limbaj artificial trebuie apreciată în conformitate cu eleganța acestuia și cu eficiența sa în aplicațiile sale directe sau în calitate de model care trebuie urmat în construcțiile viitoare. Într-un anumit sens, un limbaj artificial interesant nu trebuie să fie excesiv de artificial.

§ 10. PARADOXELE

Discutarea paradoxelor sau contradicțiilor logice a ocupat un timp și un spațiu întins. Uneori se afirmă că aceste paradoxe scot la lumină caracterul contradictoriu al intuiției noastre logice. Într-adevăr, după cum știm, formalizarea logicii și a teoriei mulțimilor a fost determinată, în mare măsură, de dorința evitării paradoxelor, astfel încît să obținem totuși ceea ce urmărim de obicei.

S-a emis ideea că noi luăm paradoxele mult prea în serios, și aceasta în mare măsură din cauza preocupării noastre de a formaliza, precum și din cauza lipsei noastre de suplețe.

Se pare că ceea ce se propune, în schimb, rezidă în următoarele. Să presupunem că găsim o contradicție, aplicînd un raționament în aparență plauzibil. Întrucît obținem o contradicție, vedem că raționamentul nu este de fapt corect și că el trebuie să fie negreșit eronat. Așadar, să luăm aminte să nu folosim niciodată din nou raționamentul respectiv. Și cu aceasta, problema este închisă.

Cu toate acestea, atunci cînd spunem că raţionamentul pare plauzibil, vrem să spunem, printre altele, că fiecare pas al raţionamentului pare, la rîndul său, plauzibil. S-ar spune că este necesar nu numai să respingem întregul raţionament în ansamblu, ci şi să indicăm exact care anume pas sau paşi ai raţionamentului au cauzat dificultatea. Prin urmare, avem diverse încercări de a respinge ca neautorizat un pas sau altul. Dar de ce nu putem spune că deşi fiecare pas, în sine însuşi, este corect, paşii nu trebuie să fie combinaţi în modul special în care duc la o contradicţie? Într-adevăr, am putea chiar să folosim această posibilitate pentru ca să justificăm atitudinea de indiferenţă faţă de paradoxe a multor matematicieni de profesie.

Abia cînd sîntem puşi în situaţia de a construi un sistem formal, care să încorporeze raţionamentele noastre, procedeul amintit se dovedeşte deficient. Într-un sistem logistic, noi descompunem demonstraţiile şi raţionamentele în paşi izolaţi, astfel încît dacă un pas este în genere valid, el este valid, indiferent de locul unde survine. Cu alte cuvinte, anumite combinaţii sau configuraţii sînt adoptate ca axiome, astfel că ele pot fi asertate ca valide, indiferent de locul unde figurează; iar anumite secvenţe (finite) de combinaţii sau configuraţii sînt adoptate ca justificate prin regulile de inferenţă, astfel că orice asemenea secvenţă, oriunde ar figura, este considerată ca determinînd paşi validi. De exemplu, dacă convenim să adoptăm ca axiomă, pentru două mulţimi specifice numite a şi b, aserţiunea „Sau a aparţine lui b, sau a nu aparţine lui b“, nu mai putem respinge acelaşi enunţ, drept un pas neautorizat, atunci cînd figurează în cadrul unui raţionament care duce la o contradicţie.

Două alternative la metoda logistică uzuală sînt: (1) să nu încercăm să facem nici o caracterizare exactă a tuturor raţionamentelor valide dintr-o ramură importantă a matematicii; (2) să enumerăm toate, sau numai mostre din toate raţionamentele specifice, autorizate şi neautorizate, ca unităţi inseparabile, în loc de a încerca să descompunem toate raţionamentele autorizate într-un număr mic de paşi atomici elementari. Alternativa (2) va duce la rezultate foarte confuze sau se va solda cu un produs greu de deosebit de un sistem logistic.

CAPITOLUL IV
AXIOMATIZAREA ARITMETICII [1]

§ 1. INTRODUCERE

Mi-am pus cîndva întrebarea: Cum au fost obținute inițial celebrele sisteme de axiome, ca sistemul lui Euclid pentru geometrie, sistemul lui Zermelo pentru teoria mulțimilor, sistemul lui Peano pentru aritmetică? Pentru mine, aceasta era mai mult ca o simplă chestiune istorică și doream să știu modul cum au fost alese conceptele și axiomele fundamentale și modul în care, o dată alese, s-a putut stabili adecvarea lor. O abordare posibilă, care se impune de la sine, constă în a lua teoreme, demonstrații și definiții tipice, examinîndu-le una cîte una, în privința ipotezelor și conceptelor pe care le implică. Obstacolul care se ridică în calea unui asemenea studiu empiric constă, pe lîngă nevoia evidentă de a nu cheltui timp și energie excesivă, în faptul că atît rezultatul, cît și justificarea sa nu sînt concludente.

Tentativa de a găsi un răspuns la această chestiune m-a dus la cîteva episoade istorice interesante. De exemplu, în 1899, Cantor făcea o distincție între colecțiile consistente („mulțimile") și colecțiile inconsistente ([1], p. 443), anticipînd parțial distincția dintre cele două feluri de clase, subliniată de către von Neumann și Quine. Cantor a propus deja o formă a axiomei substituției ([1], p. 444, rîndul 3), deși Fraenkel și Skolem au trebuit s-o adauge cu titlu de supliment la lista axiomelor lui Zermelo, peste mai bine de douăzeci de ani. În altă direcție, istoria dezvoltării axiomelor geometriei arată cît de natural a fost pentru Hilbert să ridice, în 1900, problema consistenței analizei ([2], p. 299), în mod cu totul independent de accentul pus pe paradoxele teoriei mulțimilor.

Dar piesa cea mai importantă pe care am avut norocul s-o găsesc în cadrul acestor cercetări istorice constă, fără îndoială, în descoperirile pe care le-am făcut în legătură cu axiomele lui Peano pentru aritmetică. Se știe destul de bine, pe baza celor atestate de Peano însuși ([3], p. 273), că Peano a împrumutat axiomele sale de la Dedekind și a folosit pe scară largă opera lui Grassmann, atunci cînd și-a elaborat axiomele. Mai puțin cunoscut este faptul că Grassmann poseda, în esență, caracterizarea mulțimii tuturor întregilor pe care o întîlnim astăzi, în mod uzual, în textele de algebră modernă — și anume că această mulțime formează un domeniu de integritate ordonat în care fiecare mulțime de elemente pozitive are un cel mai mic membru. Puțină lume știe (cf. [4], p. 490) că Dedekind a scris o scrisoare foarte interesantă (datată 27 februarie, 1890, adresată directorului de școală dr. H. H. Keferstein din Hamburg) în care

[1] Acest capitol a apărut în „Journal of Symbolic Logic", 22, 1957, pp. 145—157.

explică cum a ajuns la axiomele lui Peano. În cele ce urmează, îmi propun să citez in extenso (pe baza permisiunii scrise, acordată de Niedersächsische Staats — und Universitätsbibliotek din Göttingen în toamna anului 1954) și să comentez această scrisoare. Noțiunea de modele nestandard (interpretări nedorite) ale axiomelor pentru întregii pozitivi este, de exemplu, reliefată cît se poate de clar în scrisoarea lui Dedekind. Pentru a clarifica scrisoarea, mă voi referi pe larg la conținutul celebrului eseu al lui Dedekind cu privire la natura și sensul numerelor întregi pozitive ([4], pp. 335—391).

§ 2. CALCULUL LUI GRASSMANN

O chestiune mai elementară legată de axiomatizarea aritmeticii ar fi, se pare, enunțarea explicită a unui grup adecvat de reguli naturale și convenții care să ne permită să justificăm toate formulele numerice adevărate care conțin 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $+$, $\times$, $=$, (,), de exemplu $7 + 5 = 12$. Deoarece nu trebuie să folosim „expresii infinit de lungi" sau inevitabile „și așa mai departe", sarcina nu este atît de simplă pe cît pare la prima vedere. De exemplu, ar trebui să avem tabla înmulțirii, „tabla adunării", convenția cu privire la sistemul pozițional de notație, legile uzuale de comutativitate, asociativitate și distributivitate, substituirea egalilor prin egali. Ar fi mult prea obositor să reproducem aici rezultatul unei asemenea încercări, deși eu sînt înclinat să cred că acest exercițiu ar prezenta interes de ordin pedagogic, dacă am vrea să explicăm într-un manual elementar procesul formalizării unor presupuneri implicite. Avantajele constau în aceea că adunarea și înmulțirea numerelor întregi pozitive sînt familiare tuturor și că ele au peste tot o importanță fundamentală. Bineînțeles, nu pretind că aș putea prezice dacă un asemenea exemplu va stîrni respect pentru formalizare sau va nimici interesul elevilor față de logică. În orice caz, pe noi nu ne interesează aici formulele numerice în notație arabă, ci în primul rînd enunțurile generale din aritmetică.

Numeroși matematicieni au studiat numerele naturale cu totul izolat de aplicațiile lor. În acest mod s-a acumulat un corp dezvoltat de concepte și teoreme privitoare la numerele naturale. Această regiune, mai mult sau mai puțin determinată, constituie teoria matematică a numerelor naturale. O caracterizare limpede a domeniului ar prezenta interes prin ea însăși și ar contribui la înțelegerea conceptului de număr. Sîntem familiarizați cu cele două metode uzuale de dezvoltare a matematicii: abordarea genetică sau constructivă, folosită în mod frecvent în extinderea numerelor la întregi, fracții, numere reale, numere complexe, și metoda axiomatică, adoptată, de regulă, în predarea geometriei elementare. Există multe diferențe între manualele elementare de geometrie și formulările mai precise ale axiomelor geometriei, încît am putea să numim primele — axiomatici intuitive, iar pe cele din urmă — axiomatici formale. Aplicarea metodei axiomatice în expunerea teoriei numerelor nu este naturală. Dovadă, în acest sens, este apariția tardivă a acestei metode. Dacă însă problema noastră constă în a avea o cuprindere sistematică a domeniului teoriei numerelor, metoda axiomatică se impune de la sine. Într-adevăr, acum ne dăm seama că metoda poate fi aplicată la numere și că aplicarea ei este adecvată, în cazul anumitor scopuri. Predarea aritmeticii pe baza unei abordări axiomatice rămîne o raritate.

În 1861, Hermann Grassmann a publicat *Lehrbuch der Arithmetik* ([5]). Această lucrare a constituit, probabil, prima încercare serioasă, destul de reușită, de a pune teoria numerelor pe o bază mai mult sau mai puțin axiomatică. În loc de a trata numai numerele întregi pozitive, Grassmann operează cu ansamblul tuturor numerelor întregi, pozitive, negative și 0. În mare parte, metoda sa poate fi folosită și pentru tratarea ansamblului mai restrîns al tuturor numerelor întregi pozitive. Grassmann a fost, probabil, primul care a introdus definiții recursive pentru adunare și înmulțire, demonstrînd pe această bază legile uzuale ale aritmeticii prin inducție matematică. Lucrarea prezintă interes nu numai prin reușita lui Grassmann de a explica lucruri implicite, ci și prin eșecul sau prin opțiunea lui de a nu caracteriza formal anumite concepte care sînt neutre sau aparțin logicii.

Voi compara sistemul lui Grassmann cu caracterizarea prin postulate a numerelor întregi, frecventă în algebra abstractă din zilele noastre. Conform algebrei abstracte, numerele întregi formează un domeniu de integritate ordonat, în care fiecare mulțime de numere întregi pozitive are un cel mai mic element (A se compara, de exemplu, [6], p. 36, p. 3, p. 7).

Cu unele modificări neesențiale, acest sistem poate fi formulat printr-un **calcul L_1:**

I. Atomi: 0, 1; $+$, $-$; *Pos:* a, b, c etc. (variabile).

II. Termeni: 0 este un termen; 1 este un termen; o variabilă este un termen; dacă s și t sînt termeni, $(-s)$, $(s + t)$, $(s \cdot t)$, sînt termeni.

III. Formule: dacă s și t sînt termeni, $s = t$ este o formulă, $s \in Pos$ este o formulă.

IV. Axiome:

(2.1) $a + (b + c) = (a + b) + c$.
(2.2) $a + b = b + a$.
(2.3) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
(2.4) $a \cdot b = b \cdot a$
(2.5) $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$.
(2.6) $a + 0 = a$.
(2.7) $a \cdot 1 = a$.
(2.8) $a + (-a) = 0$.
(2.9) $c \neq 0$, $c \cdot a = c \cdot b$ „$\rightarrow$“ $a = b$.
(2.10) $a \in Pos$, $b \in Pos \rightarrow a + b \in Pos$.
(2.11) $a \in Pos$, $b \in Pos \rightarrow a \cdot b \in Pos$.
(2.12) Sau $a \in Pos$ sau $a = 0$, sau $-a \in Pos$.
(2.13) Dacă $1 \in A$ și pentru orice b, $b \in A$ „$\rightarrow$“ $b + 1 \in A$, atunci pentru orice a, $a \in Pos \rightarrow a \in A$.

Se poate observa că, în formularea de mai sus, particulele logice ca „sau“, „$\rightarrow$“, „pentru orice“, „$=$“, „$\in$“, precum și variabila de mulțimi „A“ sînt întrebuințate fără a fi menționate în prealabil. Regulile care guvernează folosirea acestora sînt de asemenea adoptate ca date.

Grassmann nu prezintă expunerea sa în formă axiomatică, deși această reformulare nu prezintă dificultăți. Pentru ca să evit detaliile anoste, voi da această reformulare fără a indica la fiecare loc referirea exactă la cartea lui. Cititorul interesat va putea să verifice, consultînd cartea lui Grassmann, exactitatea istorică, în linii mari, a prezentării care urmează, după cum va descoperi unele abateri minore.

Calculul lui Grassmann L_2:

A. Atomi: $=$, $(,)$; a, b, c, d, etc. (litere); 1, $+$, $-$, $\cdot$; Pos.

B. Termeni: 1 este un termen; -1 este un termen; o literă este un termen; dacă s și t sînt termeni, atunci $(s + t)$ și $(s \cdot t)$ sînt termeni.

C. Definiții (trebuie observat că Grassmann ia numai „negativul lui", aplicat la 1 ca primitiv și definește cazul general împreună cu „diferența" de acolo; un purist ar prefera să folosească două simboluri distincte pentru cele două întrebuințări ale lui „ $-$ "):

(2.20) $0 = 1 + -1$.

(2.21) Pentru orice a și b, $a - b$ este numărul pentru care $b + (a \cdot b) = a$.

(2.22) $-a = 0 - a$.

(2.23) $a > b \leftrightarrow a - b \in Pos$.

D. Axiome:

(2.26) $a = (a + 1) + -1$.

(2.27) $a = (a + -1) + 1$.

(2.28) $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

(2.29) $a \cdot 0 = 0$.

(2.30) $1 \in Pos$.

(2.31) $a \in Pos \rightarrow a + 1 \in Pos$.

(2.32) $b = 0$ sau $b \in Pos \rightarrow a \cdot (b + 1) = (a \cdot b) + a$.

(2.33) $b \in Pos \rightarrow a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

(2.34) Dacă $1 \in A$, pentru toți b, $b \in A \rightarrow b + 1 \in A$, și $b \in A \rightarrow b + -1 \in A$; atunci pentru toți a, $a \in A$.

(2.35) Dacă $1 \in A$, și pentru toți b, $b \in A \rightarrow b + 1 \in A$, atunci pentru toți a, $a \in Pos \rightarrow a \in A$.

În fapt, adoptînd reguli care guvernează noțiunile logicii elementare, putem deriva toate axiomele (2.1) — (2.13) ale lui L_1 din definițiile și axiomele lui L_2. Nu voi prezenta aceste demonstrații, ci voi indica numai, cu referire la cartea lui Grassmann, cum am putea face acest lucru. (2.1) este demonstrat la nr.22 din cartea sa; (2.2) la nr. 23; (2.3) la nr. 70; (2.4) la nr. 72; (2.5) la nr. 66; (2.6) la nr. 18; (2.7) poate fi demonstrat plecînd de la (2.6), (2.2.) (2.32), (2.29); (2.8) poate fi demonstrat prin (2.21), (2.22) și nr. 2.6; (2.9) este demonstrat la nr. 96 din cartea lui Grassmann; (2.10) la nr. 88; (2.11) la nr. 93; (2.13) este (2.35). Derivarea lui (2.12) folosește în primul rînd (2.21), (2.22), (2.30), (2.31), (2.34). Aceasta poate servi ca exercițiu pentru cititor.

Putem observa că definiția (2.21) întrebuințează o descripție. Pentru a formaliza minuțios lucrarea lui Grassmann, ar trebui să considerăm, în mod explicit, reguli pentru conectivele din domeniul funcțiilor de adevăr „sau", „și", „ $\rightarrow$ ", cuantorii „pentru toți", egalitatea „ $=$ ", apartenența „ $\in$ ", variabila de mulțimi „A" și descripții. Îndeplinirea acestui program ar da aproape o formalizare a logicii. De exemplu, putem considera lucrările moderne ale lui Frege, Whitehead-Russell, Quine ca realizări ale acestui program, excepțînd faptul că lucrările acestora se complică prin propriile lor teorii ale mulțimilor. O altă abordare ar consta în folosirea proprietăților, în locul claselor, și formalizarea teoriei numerelor în mod cu totul izolat de teoria mulțimilor. O atare abordare ar beneficia de o logică de bază mai pură, neafectată de dificultățile formalizării teoriei mulțimilor.

Calculul lui Grassmann prezintă deficienţe importante cel puţin într-o anumită privinţă. Nu se menţionează nicăieri în mod explicit faptul că numerele diferite au succesori diferiţi, sau faptul că 1 nu este succesorul nici unui număr întreg pozitiv. Drept consecinţă, axiomele lui Grassmann ar fi satisfăcute dacă am considera că toţi întregii sînt identici între ei. Această omisiune este uşor de înţeles, deoarece noi considerăm mai mult sau mai puţin ca cert faptul că numeralele diferite reprezintă obiecte diferite. Surprinzător nu este atît faptul că Grassmann a omis să menţioneze această stare de lucruri, ci mai curînd faptul că puţin timp după aceea alţii au enunţat-o în mod explicit.

Se afirmă adesea că Peano a fost cel care a arătat că întreaga teorie a numerelor naturale ar putea fi derivată din trei concepte primitive şi cinci axiome, adăugate la axiomele logicii pure. Conceptele fundamentale sînt: 1, număr, succesor. Axiomele sînt:

(P 1) 1 este un număr.
(P2) Succesorul unui număr oarecare este un număr.
(P3) Două numere oarecari diferite nu au niciodată acelaşi succesor.
(P4) 1 nu este succesorul nici unui număr.
(P5) Orice proprietate care revine lui 1, precum şi succesorului oricărui număr care se bucură de această proprietate, revine tuturor numerelor.

Dintre aceste concepte şi axiome putem să absorbim conceptul de „număr" şi primele două axiome într-o specificare explicită a notaţiei, folosind numai două concepte primitive şi trei axiome ([7], p. 219). Dacă lăsăm însă la o parte aceste simplificări sau altele asemănătoare, putem analiza problema neformală a posibilităţii şi justificării alegerii acestor concepte şi axiome fundamentale.

Istoriceşte vorbind, Peano a împrumutat axiomele sale de la Dedekind care, în remarcabila sa broşură, *Was sind und was sollen die Zahlen*? (1888, retipărită în [4]), a definit numerele naturale ca o mulţime arbitrară de obiecte care satisfac aceste axiome, pentru o relaţie de succesiune adecvat aleasă. Din fericire, s-a păstrat o scrisoare a lui Dedekind, în care acesta explică amănunţit cum a ajuns el pentru întîia oară la ceea ce acum este cunoscut sub denumirea de axiomele lui Peano. Întrucît această scrisoare este edificatoare în cel mai înalt grad, o voi cita pe larg. (Trebuie observat că Dedekind foloseşte cuvîntul „sistem" în modul în care noi am folosi astăzi cuvîntul „mulţime" sau „clasă").

§ 3. SCRISOAREA LUI DEDEKIND

„Aş dori să vă cer să vă îndreptaţi atenţia spre următoarea înlănţuire de idei care constituie geneza eseului meu. Cum a ajuns să fie scris eseul meu? Fără îndoială, nu într-o singură zi, ci este mai curînd rezultatul unei sinteze elaborate după eforturi îndelungate. Sinteza este precedată şi se bazează pe o analiză a şirului numerelor naturale, aşa cum acesta se prezintă, ca să spunem aşa, în practică, cugetului nostru. Care sînt proprietăţile fundamentale independente între ele ale acestui şir N, adică acele proprietăţi care nu sînt deductibile una din alta şi din care decurg toate celelalte? Cum ar trebui să despuiem aceste proprietăţi de caracterul lor specific aritmetic, încît să fie subsumate unor concepte mai generale şi unor activităţi ale intelectului, care sînt *necesare* oricărei gîndiri, dar totodată *suficiente*, pentru a garanta certitudinea şi completitudinea demonstraţiilor, şi pentru a permite construirea unor concepte şi definiţii coerente?

Cînd problema se pune în modul acesta, sîntem siliţi, după părerea mea, să acceptăm următoarele fapte:

(1) Şirul numerelor N este un *sistem* de indivizi sau elemente numite numere. Aceasta conduce la studiul general al sistemelor ca atare (§ 1 al eseului meu).

(2) Elementele sistemului N se află într-o anumită relaţie între ele, ele sînt într-o anumită ordine, determinată în primul rînd de faptul că fiecărui număr determinat n îi *revine* iar un număr determinat n', numărul care succede sau este următorul imediat după n. Aceasta duce la considerarea conceptului general de *aplicaţie* Φ a unui sistem (§ 2). Întrucît imaginea $\Phi(n)$ a fiecărui număr n este iarăşi un număr n' şi, în consecinţă, $\Phi(N)$ este o parte a lui N ne ocupăm aici de aplicaţia Φ a unui sistem N *în el însuşi*. Iar acest lucru trebuie studiat în întreaga sa generalitate (§ 4).

(3) Fiind date numere distincte a, b, succesorii a', b' sînt de asemenea distincţi; aplicaţia Φ are, aşadar, caracteristica de a conserva distincţia sau *similaritatea* (§ 3).

(4) Nu fiecare număr este un succesor n', adică nu întotdeauna $\Phi(N)$ este o parte proprie a lui N; acest fapt (împreună cu cel din alineatul precedent) determină infinitudinea şirului numeric N (§ 5).

(5) Mai precis, 1 este *singurul* număr care nu este situat în $\Phi(N)$. Astfel am înşiruit faptele pe care dumneavoastră le consideraţi ca o caracterizare completă a unui sistem infinit simplu ordonat N.

(6) Dar am arătat în răspunsul meu că aceste fapte sînt încă departe de a fi adecvate pentru o caracterizare completă a naturii şirului numerelor. Într-adevăr, toate aceste fapte sînt valabile, de asemenea, pentru orice sistem S care, pe lîngă şirul numerelor N, mai conţine un sistem de alte elemente arbitrare t. Întotdeauna putem defini aplicaţia Φ astfel încît să păstrăm caracterul de similaritate şi astfel încît să facem $\Phi(T) = T$. Dar un astfel de sistem S este, în mod evident, ceva cu totul diferit de şirul nostru de numere N, şi aş putea să aleg în aşa fel sistemul, încît nici o teoremă aritmetică nu ar fi valabilă pentru el. Ce trebuie să adăugăm atunci faptelor de mai sus pentru ca să curăţim sistemul nostru S de aceşti intruşi t, care perturbă orice vestigiu de ordine şi ca să ne restrîngem la sistemul N? Acesta a fost unul dintre momentele cele mai dificile ale analizei mele şi elucidarea lui a necesitat un efort de gîndire. Dacă admitem cunoaşterea şirului N al numerelor naturale ca punct de plecare şi adoptăm o terminologie aritmetică, chestiunea se rezolvă cu uşurinţă. Nu trebuie decît să spunem: un element n aparţine şirului N, dacă şi numai dacă, plecînd de la elementul 1 şi continuînd numărătoarea, adică printr-un număr finit de iteraţii ale aplicaţiei Φ (comparaţi aceasta cu concluzia lui 131 din eseul meu), putem atinge, în cele din urmă, elementul n; pe de altă parte, eu nu ajung niciodată la un element t dinafara şirului, prin intermediul acestui proces. Dar pentru ceea ce urmărim este absolut inutil să adoptăm acest mod de distingere între elementele t, care urmează să fie expulzate din S şi elementele n care vor rămîne singure în S. Un asemenea procedeu ar implica, cu siguranţă, cel mai pernicios şi evident fel de *circulus vitiosus*. Simpla expresie «obţinute aici în cele din urmă» nu ar fi nici ea de nici un folos. Ea nu ar folosi mai mult decît cuvintele «*karam sipso latura*» pe care le-am născocit ad-hoc, fără ca să le dau vreo semnificaţie definită în mod limpede. Prin urmare: cum pot, fără ca să presupun nici o cunoştinţă aritmetică, să determin formal şi fără excepţie distincţia dintre elementele n şi t? Pur şi simplu — şi totuşi complet: — considerînd *lanţurile* (37 şi 44 al eseului meu). Dacă aş vrea să evit expresia mea «lanţ», voi spune: un element n al lui S aparţine şirului N, dacă şi numai dacă n este un element al *fiecărei* părţi K din S, care posedă cele două proprietăţi (i), că elementul 1 aparţine lui K şi (ii) că imaginea $\Phi(K)$ este o parte a lui K. În limbajul meu tehnic: N este intersecţia 1_0 sau $\Phi_0(1)$ a tuturor acelor lanţuri K (în S) la care aparţine elementul 1. Numai după această adăugire este determinat caracterul complet al şirului N. În această ordine de idei observ, în treacăt, următoarele. Pentru un timp scurt, în vara trecută (1889) am intrat pentru prima oară în pose-

siunea lucrărilor lui Frege *Begriffsschrift* şi *Grundlagen der Arithmetik*. Am remarcat cu plăcere faptul că metoda sa de definire a relaţiei între un element şi altul care îi urmează, nu neapărat imediat, în cadrul unui şir, concordă, în *esenţă*, cu conceptul meu de lanţ (37, 44). Numai că nu trebuie să ne lăsăm derutaţi de terminologia lui, care prezintă unele inconveniente.

(7) După ce natura esenţială a sistemului infinit simplu, al cărui tip abstract este şirul N al numerelor, a fost recunoscută pe baza analizei mele (71, 73), s-a pus problmema: *există* oare, în genere, un asemenea sistem în imperiul nostru de idei? În absenţa unei demonstraţii logice de existenţă ar rămine întotdeauna o îndoială, în ce priveşte faptul dacă conceptul acestui sistem nu conţine contradicţii interne. De aici, necesitatea unor atare demonstraţii (66 şi 72 din eseul meu).

(8) După ce s-a soluţionat şi această problemă, s-a pus problema dacă analiza de pînă acum conţine şi o *metodă* generală *de demonstraţie* suficientă pentru stabilirea teoremelor care trebuie să fie valabile pentru *toate* numerele n. Aşa şi este: faimoasa demonstraţie prin inducţie se bazează pe fundamentul cert al conceptului de lanţ (59, 60, 80 din eseul meu).

(9) În sfîrşit, este posibil oare să construim, în mod consistent, *definiţii* ale numerelor şi operaţiilor pentru *toate* numerele n? Aşa şi este. În fapt, acest lucru este îndeplinit pe baza teoremei 126 din eseul meu.

Aşadar, analiza a fost completă şi sinteza a putut începe. Totuşi ea mi-a creat destule dificultăţi: nici cititorul nu are o sarcină uşoară; pentru a străbate totul, el are nevoie nu numai de un bun-simţ pronunţat, ci şi de multă tenacitate".

§ 4. ESEUL LUI DEDEKIND

Scrisoarea prezintă mult interes istoric şi poate sluji totodată ca ghid în studierea eseului lui Dedekind despre natura şi sensul numărului. Cîteva observaţii suplimentare asupra eseului său vor întregi scrisoarea.

Primul paragraf al eseului lui Dedekind se ocupă de principiile generale ale teoriei mulţimilor. Astfel, pentru două lucruri (obiecte de gîndire) oarecare a şi b, $a = b$, dacă nu există nici o proprietate a unuia care să nu fie o proprietate a celuilalt. O mulţime M este determinată complet dacă, relativ la orice lucru, este determinat faptul că acesta este un element al lui S, sau că nu este; se enunţă, în mod explicit, menţionîndu-se concepţia opusă a lui Kronecker, că determinarea nu trebuie să fie efectivă. Două mulţimi sînt identice, $M = N$, dacă fiecare element al lui M este un element al lui N, şi viceversa (axioma extensionalităţii). Incluziunea mulţimilor este definită în modul obişnuit, în termenii relaţiei de apartenenţă; M este o parte a lui N, dacă fiecare element al lui M este un element al lui N. Cu toate acestea, incluziunea şi apartenenţa sînt notate prin acelaşi simbol. Fiind dată o mulţime M de mulţimi, există o mulţime care conţine orice element ce aparţine vreunei mulţimi din M (axioma reuniunii sau a mulţimii sumă), precum şi o mulţime (intersecţia) care conţine fiecare element care aparţine la toate mulţimile din M. Fiind dat un lucru oarecare a, există o mulţime unitate care conţine ca element numai pe a. Deşi recunoaşte posibilitatea unei mulţimi vide, Dedekind o exclude din expunerea sa „din anumite motive". Interesul istoric al acestui paragraf rezidă în faptul că el reprezintă probabil prima încercare parţială de a enunţa explicit principiile intuitive de formare a mulţimilor. Ulterior, în construirea sistemului său de axiome, Zermelo a folosit acest paragraf precum şi alte paragrafe din eseul lui Dedekind.

Al doilea paragraf se ocupă de conceptul general de funcție (aplicație, transformare), urmindu-l mai mult sau mai puțin pe Dirichlet. Corespondențele biunivoce ((transformările asemenea) sînt tratate în § 3. Aplicația unei mulțimi în ea însăși este tratată în § 4, în cuprinsul căruia este introdus și conceptul important de lanț: o mulțime M formează un lanț relativ la o aplicație Φ, dacă mulțimea tuturor imaginilor elementelor lui M, $\Phi(M)$ se include în M. Intersecția tuturor lanțurilor (relativ la o aplicație Φ) care conține pe a ca element este *lanțul* lui a: $\Phi_0(a)$.

În § 5 Dedekind introduce definiția sa a infinității: o mulțime este infinită, dacă există o corespondență biunivocă între această mulțime și o submulțime proprie a ei. Se demonstrează că o mulțime care conține ca parte o mulțime infinită este infinită și că o mulțime infinită rămîne infinită după eliminarea unui singur element. Se dă o demonstrație în maniera lui Parmenide și Bolzano că există mulțimi infinite. Ulterior, atunci cînd a construit sistemul său axiomatic, Zermelo a trecut cu vederea această demonstrație, dar enunță ca axiomă (axioma infinitului) existența unei mulțimi similare celei construite în demonstrația lui Dedekind.

Mulțimea numerelor naturale este definită în § 6. O mulțime N este simplu infinită, dacă există o aplicație biunivocă a lui N în el însuși, astfel încît există un element în N, pe care îl vom desemna prin 1 și îl vom numi elementul-bază al lui N, astfel încît 1 nu aparține la $\Phi(N)$ și lanțul $\Phi_0(1)$ coincide cu N. Orice mulțime simplu infinită poate fi luată ca mulțimea numerelor naturale, exceptînd faptul că nu mai avem, după cum se pare, o mulțime unică a numerelor naturale. Dedekind propune să neglijăm cu totul caracterul special al elementelor și se pare că el identifică mulțimea numerelor naturale cu ceea ce este comun (adică ceea ce constituie esența) tuturor mulțimilor simplu infinite. Acest lucru este negreșit în spiritul adoptării postulatelor ca alcătuind o definiție implicită. Dedekind revine la filozofia sa favorită a numărului: „Avînd în vedere această eliberare (abstragere) de orice alt conținut al elementelor, sîntem îndreptățiți să spunem că numerele sînt o creație liberă a cugetului uman". Într-adevăr, Dedekind demonstrează, în § 10, că două sisteme simplu infinite oarecare N și M sînt izomorfe în raport cu aplicațiile lor Φ și ψ și elementelor lor bază 1 și 1*: avem o corespondență biunivocă între N și M, astfel încît 1 corespunde lui 1*, iar dacă a corespunde lui a^* atunci $\Phi(a)$ corespunde lui $\psi(a^*)$. Urmează că structura abstractă a unei mulțimi simplu infinite este determinată în întregime prin definiția ei. Identificînd mulțimea numerelor naturale cu un sistem infinit simplu N, Dedekind dă în § 10 axiomele lui Peano: 1, elementul de bază, aparține lui N; $\Phi(N)$ se include în N, sau, altfel spus, succesorul unui număr este de asemenea un număr; Φ este o aplicație biunivocă, astfel încît două numere diferite nu pot avea același succesor; 1 nu aparține lui $\Phi(N)$, sau, altfel spus, 1 nu este succesor; $N = \Phi_0(1)$, astfel încît inducția este valabilă, dat fiind că orice mulțime M care satisface ipoteza inducției ($1 \in M$, $a \in M \rightarrow \Phi(a) \in (M)$ este un lanț care conține pe 1 și ca atare include $\Phi_0(1)$ care, prin definiție, este intersecția tuturor lanțurilor care îl conțin pe 1.

În § 7, un număr n se definește ca mai mic decît m, $n < m$, dacă $\Phi_0(n)$ conține $\Phi_0(m)$ ca parte proprie. Pentru fiecare număr natural n se introduce o mulțime „contor": Z_n este mulțimea alcătuită din toate numerele de la 1 la n. Proprietățile lui $<$ și Z_n sînt demonstrate în § 7 și § 8. În § 8 se de-

monstrează, de asemenea, că orice mulțime nemărginită de numere naturale este simplu infinită.

§ 9 conține cea dintîi tratare în spiritul teoriei mulțimilor a definițiilor recursive (definițiile prin inducție), de exemplu, cele ale adunării și înmulțirii. După cum știm, aceste definiții nu sînt întru totul explicite, deoarece operațiile definite figurează și în condițiile definitorii; drept urmare, putem să eliminăm simbolurile definite numai atunci cînd în context nu figurează nici o variabilă. Admiterea directă a acestor definiții într-o teorie revine la a le adopta ca axiome adoptînd totodată ca operații primitive operațiile definite. Întrucît aceste operații nu au de-a face direct cu mulțimi, cel ce dorește să expună aritmetica pe baza teoriei mulțimilor este obligat să dea o metodă de eliminare a acestor operații. Dedekind demonstrează aici o teoremă generală: fiind dată o aplicație arbitrară θ a unei mulțimi oareare M în ea însăși și fiind dat un element arbitrar b din M, putem să găsim întotdeauna o funcție ψ, astfel încît $\psi(1) = b$ și $\psi(n + 1) = \psi(\theta(n))$. Teorema generală este aplicată apoi în § 11, § 12, § 13, pentru a defini adunarea, înmulțirea, ridicarea la putere, precum și pentru a deriva proprietățile uzuale.

În sfîrșit, în § 14, Dedekind definește *Anzahl*-ul unei mulțimi finite M, ea fiind acel număr n pentru care mulțimea „contor" Z_n este asemenea cu M și dă totodată o demonstrație migăloasă a echivalenței dintre propria sa definiție a infinității și definiția uzuală conform căreia o mulțime nonvidă este infinită dacă nu este asemenea cu nici un Z_n. Demonstrația prezintă interes din două motive: pentru că o concluzie în aparență evidentă necesită o demonstrație complicată și pentru că demonstrația conține un apel nemărturisit la axioma alegerii, acea metodă de demonstrație pe care Zermelo a făcut-o celebră pentru prima oară după șaisprezece ani.

§ 5. ADECVAREA CARACTERIZĂRII DATE DE DEDEKIND

Faptul că Dedekind a obținut axiomele lui Peano în întregime prin analiza șirului numerelor naturale este remarcabil. Și mai remarcabil încă este faptul că, după ce și-a dus pînă la capăt analiza, a considerat că proprietățile numerelor naturale și teoremele referitoare la acestea se pot deriva toate din caracterizarea dată de el. Această convingere a fost confirmată în mare măsură de evenimentele ulterioare. Este clar că Dedekind nu a cercetat un număr mare de teoreme și demonstrații privitor la numerele naturale pentru ca să constate că nu sînt necesare alte caracteristici. Mai curînd, el a verificat —spre propria lui satisfacție — că șirul numerelor naturale este complet determinat prin axiomele sale și a tras apoi concluzia că axiomele sînt adecvate și pentru derivarea teoremelor Misterul este cum a făcut această verificare.

Scrisoarea lui Dedekind oferă un indiciu prețios în acest sens, în pasajul în care autorul discută la punctul (6) chestiunea excluderii interpretărilor indezirabile ale mulțimii N, pentru care unele teoreme aritmetice uzuale nu ar mai fi valabile. Aceasta sugerează, în linii mari, următorul raționament pe care l-a putut face și Dedekind. Definiția numerelor naturale pe baza lanțului lui 1 ne permite să determinăm integral caracterul abstract al mulțimii numerelor naturale; dovadă-demonstrația sa, că două mulțimi oarecare care satisfac definiția sînt izomorfe între ele. Dacă o teoremă este independentă

de definiția lui, avem două interpretări posibile ale definiției; în conformitate cu una, teorema este adevărată, iar în conformitate cu cealaltă, teorema este falsă. Dacă definiția ar determina o interpretare unică a teoriei, situații de acest fel nu pot să survină. În consecință, conform unicității interpretării, toate teoremele privitoare la numerele naturale trebuie să fie derivabile. Acest raționament este plauzibil fără a fi însă absolut riguros deoarece, printre altele, noțiunea de interpretare nu a fost explicitată în măsură suficientă, pentru ca să ne garanteze că orice teoremă indecidabilă va da, în mod necesar, două interpretări diferite ale definiției.

Concluzia lui Dedekind că aceste axiome determină adecvat șirul numerelor naturale este exprimată adesea în mod echivalent, spunîndu-se că axiomele lui Peano sînt *categorice* sau nu admit interpretări esențial diferite. După cum știm, axiomele admit interpretări diferite, de exemplu, adoptînd 100 în calitate de 1 sau luînd pătratul unui număr ca succesorul acestuia din urmă. Dar toate aceste interpretări sînt în esență una, în sensul tehnic de a fi izomorfe între ele.

Demonstrația acestui fapt este foarte ușoară, de îndată ce admitem că axioma inducției (P 5) asigură că șirul numerelor nu conține „intruși" în afara numerelor naturale veritabile, fiecare dintre aceste numere fiind sau elementul de bază, sau un element pe care îl putem obține printr-un număr finit de pași pornind de la elementul de bază. Acceptînd pentru moment acest lucru, putem admite ca date două interpretări ale axiomelor lui Peano: de exemplu, $1^{\#}$, Φ și N desemnează respectiv 1, succesor și număr în cadrul unei interpretări, iar 1*, ψ, M — în cealaltă interpretare. Să corelăm $1^{\#}$ cu 1*, iar pentru fiecare succesor $\Phi(a)$, dacă a este corelat cu a^* să corelăm $\Phi(a)$ cu $\psi(a^*)$. Întrucît am admis că în nici o interpretare nu se pot strecura „intruși", corelația asigură o corespondență biunivocă între toate obiectele în N și M, care păstrează trecerea de la fiecare element la succesorul său. Și tocmai acesta este sensul în care se spune că axiomele lui Peano sînt categorice: două modele arbitrare pentru ele sînt izomorfe.

Demonstrația va eșua în cazul cînd axioma inducției nu va putea exclude integral „intrușii". Într-adevăr, atunci vom avea două modele pentru axiome, dintre care unul corespunde intențiilor noastre, în timp ce celălalt conține elemente suplimentare străine pe care nu le putem obține printr-un număr finit de pași, pornind de la elementul de bază.

Problema specificării adecvate a clasei numerelor naturale independent de ideile aritmetice poate fi privită și ca dorință de a analiza modul în care cineva folosește „și așa mai departe", fără a apela explicit la conceptul general al numerelor finite. Discuția întreprinsă de Dedekind în scrisoarea sa, îndeosebi la punctul (6), este foarte clară și instructivă, exceptînd faptul că ultimul pas al raționamentului său, care duce la concluzia că N este complet determinat, admite o dezvoltare în continuare. Aceeași concluzie apare în calitate de teoremă în eseul său (la punctul 79). Demonstrația sa revine la următoarele: clasa numerelor naturale satisface condițiile că 1 aparține ei și succesorul unui element al ei aparține de asemenea ei. Dacă considerăm toate clasele care satisfac aceste două condiții, partea comună, sau intersecția lor trebuie să fie exact clasa căutată: ea nu poate avea mai puțini membri, deoarece fiecare număr trebuie să fie conținut în fiecare din clasele inițiale; ea nu poate avea

mai mulți membri, deoarece în caz contrar am avea o clasă mai mică, clasă care ar satisface de asemenea condițiile.

Se pune însă problema specificării claselor arbitrare. Cum știm dacă o anumită specificare de clase va include toate clasele sau cel puțin suficiente clase pentru a da ca intersecție clasa căutată a numerelor? Sau, ce sînt în mod explicit proprietățile la care este aplicabil (P 5)? În ultimii ani, o bună parte din cercetările de logică matematică au fost consacrate problemei interpretărilor necăutate (modelele nonstandard) ale teoriilor întregilor pozitivi. De aceea, este interesant să găsim această problemă ridicată în scrisoarea lui Dedekind. Voi da un exemplu simplu.

O interpretare destul de banală a principiului inducției (P 5) poate fi construită, dacă restrîngem proprietățile doar la acelea care sînt exprimabile într-un limbaj destul de slab. De exemplu, ne putem imagina o notație în care orice proprietate exprimabilă este valabilă sau numai pentru o mulțime finită (eventual vidă) de numere, sau pentru toate numerele, cu excepția unei mulțimi finite de elemente. O astfel de notație se obține dacă a_1, a_2, ..., sînt denumiri constante și fiecare proprietate $F(n)$ poate să fie numai o funcție de adevăr de un număr finit de egalități $n = a_i$. De exemplu, nici o expresie în această notație nu poate reprezenta mulțimea tuturor numerelor întregi pozitive impare.

Dacă convenim să folosim un asemenea limbaj, putem găsi cu ușurință un model nedorit pentru întreaga mulțime de axiome (P 1) — (P 5). Astfel, putem considera că domeniul este alcătuit nu numai din întregii pozitivi, ci în plus și din fracțiile pozitive și negative de forma $(2b + 1)/2$ (b fiind un număr întreg), 1 ca 1, și $a + 1$ ca succesorul lui a. Se poate verifica faptul că (P 1) — (P 4) sînt satisfăcute. Mai mult, (P 5) este satisfăcut, deoarece orice proprietate pentru care sînt valabile „$F(1)$" și „$F(\mathrm{m}) \rightarrow F(m + 1)$" trebuie să fie valabilă pentru toate numerele. Aceasta este evident în cazul întregilor pozitivi „veritabili". Dacă am avea un „întreg pozitiv" $a/2$, astfel încît „$F(a/2)$" să nu fie adevărat, „$F(a - 2)/2)$" ar fi și el fals, $a/2$, fiind „succesorul" lui $(a - 2)/2$ și „$F(m)$" implicînd „$F(m + 1)$"; în mod similar, „$F((a - 4)/2)$", „$F((a - 6)/2)$" etc. ar fi toți falși. Așadar, am dispune de o proprietate exprimabilă în limbajul dat, astfel încît există o infinitate de numere care posedă această proprietate și mai există o infinitate de numere care n-o posedă, contrar ipotezei noastre. Așadar, obținem două modele neizomorfe pentru axiomele lui Peano slăbite. Presupunerea este adevărată numai pentru limbaje foarte restrînse. Pentru orice limbaj destul de bogat, problema modelelor nedorite se complică. Din unele rezultate fundamentale obținute de Gödel și Skolem urmează totuși că atunci cînd putem construi efectiv un limbaj, iar demonstrațiile pot fi controlate efectiv, avem întotdeauna modele nedorite ale întregilor pozitivi care satisfac toate axiomele lui Dedekind-Peano, cu condiția ca proprietățile vizate de axioma inducției să se restrîngă la cele exprimabile în limbajul respectiv. De regulă, modelele obținute direct din aceste teoreme generale sînt extrem de complicate sau artificiale și găsirea unor modele nedorite, dar intuitiv clare, este de cele mai multe ori foarte dificilă. Într-adevăr, se știe că pentru limbaje rezonabil adecvate, asemenea modele nonstandard vor trebui să fie compuse din mulțimi mai curînd neconstructive, de exemplu mulțimi care nu sînt recursiv numerabile.

§ 6. DEDEKIND ŞI FREGE

Să revenim la scrisoarea lui Dedekind. În ea se face o referire la lucrările lui Frege din 1879 şi 1884, apărute amîndouă înaintea eseului lui Dedekind (1888). După cum spune Dedekind, definiţia pe care Frege o dă mulţimii întregilor pozitivi concordă, în esenţă, cu propria lui definiţie bazată pe ceea ce el numeşte lanţuri. Amîndoi urmăreau să caracterizeze proprietăţile aritmetice prin noţiuni generale independente de aritmetică. Concepţia lui Frege că aritmetica este o parte a logicii este bine cunoscută; „aritmetica devine astfel, pur şi simplu, o dezvoltare a logicii şi fiecare propoziţie a aritmeticii devine o lege a logicii, deşi una derivată" ([8] § 87). În prefaţa la eseul său, Dedekind afirmă şi el:

„Vorbind despre aritmetică (algebră, analiză) ca o parte a logicii, vreau să spun că consider conceptul de număr absolut independent de ideile sau intuiţiile de spaţiu şi timp, şi că consider aceasta ca un rezultat imediat din legile gîndirii".

Însă, ei nu au aceeaşi părere despre logică. Frege foloseşte conceptul şi relaţia ca pietrele de temelie ale construcţiei sale. Dedekind foloseşte clasele şi relaţia de apartenenţă a unui element la o clasă. Astăzi, am considera că ei folosesc, în esenţă, acelaşi lucru. Frege însă nu: în *Grundgesetze* el afirmă:

„Dedekind este şi el de părerea că teoria numerelor este o parte a logicii; dar lucrarea sa cu greu contribuie la întărirea acestei opinii, deoarece expresiile folosite de el « sistem » (« clasă ») şi « un lucru aparţine unui lucru » nu sînt uzuale în logică şi nu se reduc la noţiuni logice acceptate". [9], p. 139).

În plus, Frege considera că reducerea sa infirmă aserţiunea lui Kant că adevărurile aritmetice ar fi sintetice. Reducerea intersectează însă ambele drumuri. Nu este uşor de văzut cum poate să infirme Frege raţionamentul în aparenţă frivol că dacă reducerea pe care a întreprins-o este într-adevăr încununată de succes, cel ce este convins ferm de caracterul sintetic al aritmeticii poate conchide că în felul acesta s-a demonstrat că logica lui Frege este sintetică şi nicidecum că aritmetica este analitică. Într-adevăr, la un moment dat, Russell s-a apropiat mult de această concluzie.

„În primul rînd, Kant nu se îndoia nici o clipă de faptul că propoziţiile logicii sînt analitice în timp ce sesiza just că cele ale matematicii sînt sintetice. De atunci încoace s-a înţeles că logica este tot atît de sintetică pe cît sînt celelalte genuri de adevăr" ([10], p. 457).

În aceeaşi stare de spirit, dacă cineva este ferm convins de ireductibilitatea aritmeticii la logică, el va conchide pe baza reducerii reuşite efectuate de Frege sau Dedekind că ceea ce aceştia consideră că este logica înglobează o bună parte dintre lucrurile dinafara domeniului logicii. Ţinînd seama de ambiguităţile fundamentale ale cuvintelor „logică", „aritmetică", „analitic", aceste raţionamente cuprind elemente mai mult decît suspecte.

În opoziţie cu Dedekind, Frege încearcă să lege mai direct definiţia pe care o dă numărului de aspectul aplicativ şi defineşte numerele individuale. Frege începe cu 0, şi nu cu 1, definindu-l pe 0 ca extensiune a conceptului „egal cu conceptul neidentic cu sine însuşi". Dacă trecem cu vederea distincţia dintre concept şi clasă, definiţia revine la identificarea lui 0 cu clasa tuturor claselor

vide adică, întrucît conform axiomei de extensionalitate există o singură clasă vidă, la identificarea cu clasa care are ca unic element clasa vidă. Pentru Frege, distincția este însă importantă căci după toate aparențele, el consideră că o clasă vidă constituie o absurditate, deși un concept vid este ceva absolut în regulă ([9], p. 150). Frege definește separat și funcția succesor, care se reduce la funcția care aplică o clasă n de clase asemenea la o nouă clasă $\Phi(n)$ de clase, fiecare dintre ele fiind obținută dintr-o clasă în n prin adăugarea unui element nou. Clasa numerelor naturale este definită apoi ca lanțul astfel definit (în sensul lui Dedekind) al numărului 0 relativ la funcția succesor astfel definită.

Încă în *Begriffsschrift* Frege prezenta ideile fundamentale ale derivării aritmetice, precum și o formulare exactă a logicii subiacente de deducție, conținînd atît calculul propozițional, cît și legile de cuantificare (calculul restrîns al predicatelor). Dedekind nu a încercat niciodată să formuleze explicit logica deducției. *Grundlagen* de Frege conține o amplă discuție filozofică, foarte interesantă, în legătură cu natura numărului.

BIBLIOGRAFIE

[1] Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, 1932.

[2] David Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, Berlin, 1935.

[3] Philip E. B. Jourdain, *The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics*, în „Quar. Jour. Math.", **43**, 1912, pp. 219—314.

[4] Richard Dedekind, *Gesammelte Werke*, vol. 3, 1932, Berlin.

[5] Hermann Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik*, 1861 (retipărită parțial în operele sale alese, vol. 2, partea I,) 1904, pp. 295—349.

[6] G. Birkhoff și S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, 1941.

[7] D. Hilbert și P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, 1934.

[8] G. Frege, *Grundlagen der Arithmetik*, 1884 (traducere engleză de J. L. Austin, 1950.).

[9] P. Geach și M. Black, *Translations from the Philosophical Writings of G. Frege*, 1952.

[10] Bertrand Russell, *Principles of Mathematics*, 1903.

CAPITOLUL V
CALCULUL

§ 1. CONCEPTUL DE CALCULABILITATE

Există procedee sistematice sau rutine automate pentru tratarea anumitor chestiuni. De exemplu, este un număr natural dat pătratul unui număr natural? Avem un procedeu sistematic prin care putem să decidem, pentru fiecare număr natural n, dacă n este pătratul unui alt număr.

Turing recurge la un exemplu mai viu, și anume șarada numită uneori „15". Ea constă dintr-un cadru pătrat împărțit în 16 pătrățele de mărime egală. Cincisprezece locuri sînt ocupate de piese marcate 1,...,15, un singur loc este lăsat liber; în acest spațiu poate fi mutată orice piesă învecinată, lăsînd un nou spațiu gol îndărătul ei. Se cere să transformăm un aranjament dat de 15 pătrate într-un alt aranjament, printr-o succesiune de asemenea deplasări. Se întîmplă că pentru orice aranjament inițial dat avem aranjamente la care putem să ajungem precum și aranjamente la care nu putem să ajungem. Se cere acum să se afle dacă există un procedeu sistematic prin care să putem decide pentru două aranjamente oarecare, A și B, dacă A poate fi transformat în B. Întrucît avem în total numai 16! aranjamente posibile și pentru fiecare aranjament avem numai 2 sau 3 sau 4 mișcări imediate posibile, putem în principiu să clasificăm toate aranjamentele posibile printr-un procedeu sistematic: să enumerăm toate configurațiile posibile și să le corelăm pe fiecare în parte cu cele 2 sau 3 sau 4 configurații transformate imediat, care se pot obține printr-o singură mutare. Două configurații sînt reciproc convertibile dacă și numai dacă există un drum care le leagă, drum care în genere parcurge configurații intermediare. În practică, acest procedeu nu este prea fezabil. O metodă mai fezabilă se obține dacă ne dăm osteneala să observăm și să demonstrăm că A și B sînt reciproc convertibile dacă și numai dacă unul poate fi transformat în celălalt printr-un număr par de schimbări reciproce de perechi de pătrate numerotate. În orice caz, problema este rezolvabilă și o soluție sau alta este acceptabilă, chiar dacă nu dispunem de o idee destul de precisă despre procedeele sistematice pentru ca să putem afirma că o anumită problemă de același gen este insolubilă.

Să considerăm acum conceptul de procedeu sistematic. Din punct de vedere matematic, procedeele de calcul constituie cel mai interesant procedeu sistematic. Mai mult, putem reprezenta prin numere numeroase lucruri, astfel încît multe procedee care nu au de-a face în mod explicit cu numere se pot reduce și ele la probleme de calcul. De exemplu, cercetări asupra demonstrațiilor matematice, traduceri automate brute din rusă în engleză. Dintre

toate calculele, cele care operează cu numerele naturale sînt cele mai importante.

Dacă la piață și în școlile elementare sîntem preocupați în primul rînd de probleme individuale de calcul, matematicienii sînt angajați în cea mai mare parte în demonstrarea teoremelor sau, cu alte cuvinte, în deciderea adevărului și falsității propozițiilor matematice. Cu toate acestea, matematicianul este și el foarte interesat de problema găsirii unor algoritmi sau rutine de calcul, deși chestiunile particulare care se pot calcula ușor, cum ar fi „cît face 353 ori 267" sau „cît face 27 plus 76" sînt prea simple pentru a putea să-l intereseze.

Un algoritm este o mulțime de directive care, atunci cînd sînt urmate sistematic, vor da răspuns nu la o singură întrebare, ci la orice întrebare dintr-o clasă întreagă de întrebări înrudite. De exemplu, avem algoritmi pentru aflarea sumei și produsului, pentru a decide dacă un număr natural dat este număr prim. Drept urmare, înclinăm să credem că putem efectua o adunare, o înmulțire sau putem verifica dacă un număr este număr prim prin simpla respectare a unui mic număr de reguli ușoare și credem, totodată, că și mașinile pot răspunde la asemenea întrebări. Astfel, pe cînd elevul vrea să cunoască suma și produsul unor anumite numere, matematicianul se preocupă de problema dacă și cum o clasă anumită de întrebări poate căpăta răspuns printr-o metodă generală.

Uneori, se întîmplă ca o problemă specială de calcul să fie atît de complicată, încît să devină interesantă din punct de vedere matematic.De exemplu, problemele dacă numerele particulare de forma

$$2^{(2^n+9)}+1$$

sînt numere prime. Aici avem de fapt mai multe tipuri diferite de chestiuni. În primul rînd, se pune întrebarea dacă toate numerele de forma de mai sus sînt numere prime. Aceasta constituie o propoziție matematică tipică, pe care matematicienii caută s-o demonstreze sau s-o infirme. Deoarece ea include o infinitate de cazuri diferite după cum n ia diferite valori, nici o cantitate de muncă fără har nu ar putea stabili un răspuns pozitiv, în cazul cînd răspunsul este într-adevăr pozitiv. Un răspuns pozitiv la o întrebare generală ar constitui o teoremă matematică semnificativă. În al doilea rînd, avem un procedeu sistematic pentru a decide dacă un număr dat este număr prim; cu alte cuvinte, clasa problemelor de forma „este oare $2^{(2^n+9)}+1$ număr prim?" este sistematic decidabilă, cel puțin în teorie. În al treilea rînd, calculul practic pe care-l implică deciderea chestiunii chiar și pentru un n dat este atît de complicat, încît efectuarea lui în strictă concordanță cu rutina automată întîmpină dificultăți considerabile. Așadar, se cere ingeniozitate pentru ca să evităm un volum formidabil de calcule, astfel încît probleme, care în teorie sînt automat decidabile, se transformă totuși în probleme matematice semnificative. Acest gen de lucruri reprezintă totuși mai curînd o excepție decît o regulă generală. În cele mai multe cazuri, prezintă interes matematic fie găsirea unei rutine sistematice pentru rezolvarea unei întregi clase infinite de probleme, fie deciderea adevărului sau falsității unei anumite propoziții generale, care înglobează o infinitate de cazuri particulare decidabile.

Contrastul dintre activitatea de găsire a algoritmilor și cea de demonstrare a teoremelor conduce la noțiuni diferite de problemă și soluție. Fiind dată

o clasă de metode de demonstrație, de exemplu, printr-un sistem formal, o problemă matematică este irezolvabilă prin aceste metode, dacă pe baza lor nu putem decide adevărul sau falsitatea propoziției care enunță problema. Aceasta, desigur, nu exclude posibilitatea ca problema să fie rezolvabilă prin alte metode. Există oare probleme absolut irezolvabile în sensul că nu avem metode care ar putea decide adevărul sau falsitatea anumitor propoziții matematice? Dacă vom construi suficient de larg noțiunea de metodă, răspunsul trebuie să fie negativ. Orice propoziție este sau adevărată, sau falsă; o metodă de decidere a adevărului sau falsității unei propoziții constă, pur și simplu, în a scrie „adevărat" sau „fals", după cum ea este adevărată sau falsă; Se va obiecta că aceasta, în genere, nu este nici o metodă. Să observăm totuși că noi sîntem preocupați doar de o singură propoziție. Dacă A are o metodă care constă pur și simplu în a răspunde *da* la întrebarea dacă propoziția este adevărată, iar B are o metodă care constă pur și simplu în a răspunde *nu* la aceeași întrebare, una dintre cele două metode trebuie să fie eficientă. Este greu să contestăm că acestea sînt metode, deoarece ele sînt absolut simple și automate. În mod similar, același subterfugiu s-ar aplica în cazul cînd ne preocupăm de o clasă finită arbitrară de propoziții. Ceea ce ne tulbură în legătură cu aceste procedee este aderarea noastră tacită la ideea că o metodă trebuie sau să eșueze într-un cadru general oarecare, sau să fie aplicabilă la o clasă largă de chestiuni înrudite. Răspunsul este desprins din cunoașterea noastră și totuși nu știm a cui „metodă" a dat răspunsul corect. Acest fapt nu infirmă răspunsul că nu avem probleme individuale absolut irezolvabile, în orice caz — pentru cel care susține în mod insistent că orice propoziție este sau adevărată, sau falsă: el arată doar că chestiunea nu este prea interesantă, dacă nu va căpăta un sens mai precis.

Pe de altă parte, dacă avem o infinitate de probleme, nu mai putem enumera toate răspunsurile. Dacă problema constă în a găsi o metodă sistematică care va da răspunsuri la o întreagă clasă infinită de chestiuni, putem întreba din nou dacă există probleme absolut irezolvabile. Numai că, de data aceasta, întrebarea privește existența sau inexistența unei metode generale de rezolvare nu a unei probleme izolate, ci a rezolvării simultane a unei întregi clase infinite de probleme. Deși numărul problemelor este infinit, dorim să avem o metodă finită. Pentru a distinge aceste două lucruri, vorbim uneori despre probleme de decizie irezolvabile și nu doar despre probleme irezolvabile. Studiul problemelor de decizie irezolvabile este legat, în mod evident, de problema formalizării conceptului intuitiv de metodă sau procedeu sistematic.

Fiind dată o clasă de probleme, putem reprezenta orice problemă printr-un număr natural, iar răspunsul la fiecare problemă printr-un alt număr natural. Dacă întrebările sînt chestiuni la care se răspunde prin *da* sau *nu*, nu avem nevoie decît de două numere naturale pentru răspunsuri; dacă chestiunile au de-a face cu calculul, avem nevoie adesea de o infinitate de numere ca răspunsuri. Așadar, o metodă de rezolvare a clasei de probleme nu este altceva decît o metodă de corelare a numerelor naturale cu numere naturale. În același timp, funcțiile de numere naturale sînt tocmai metode de corelare a numerelor naturale cu numere naturale. Așadar, este firesc să reprezentăm procedeele sistematice prin funcții de numere naturale. Dar prin ce tip anume de funcții? Dacă identificăm o metodă sistematică cu un procedeu automat sau efectiv, atunci funcția trebuie să fie calculabilă sau automat calculabilă. Astfel, fiind dată orice clasă de probleme, există o funcție arbitrară care reprezintă o soluție

a clasei prin faptul că oferă corelația cerută. A întreba dacă problema deciziei pentru clasa respectivă este rezolvabilă înseamnă exact a întreba dacă funcția corespunzătoare este calculabilă. Problema generală constă în determinarea ansamblului tuturor funcțiilor calculabile de numere naturale. Orice determinare a ansamblului poate fi privită ca definiție propusă pentru conceptul de procedeu sistematic sau de calculabilitate.

Nu avem motiv să presupunem că toate funcțiile sînt calculabile. De fapt, este rațional că credem că există funcții care nu sînt calculabile. O funcție calculabilă sau o corelare a numerelor naturale cu numere naturale dă o ordine destul de simplă de numere naturale. Dar funcțiile calculabile nu epuizează orice ordine a spiritului sau a lumii. Există corelații sistematice de numere naturale cu numere naturale, care nu sînt reprezentate prin funcții calculabile. În particular, ar fi arbitrar să identificăm șirurile aleatorii de numere naturale cu șiruri nereprezentate prin funcții calculabile. Funcțiile necalculabile pot fi și ele clasificate și cercetate.

Pentru ca să determinăm ansamblul tuturor funcțiilor calculabile, putem să începem sau dinafară, sau dinăuntru. Pentru a determina frontiera unei regiuni ne putem servi fie de puncte exterioare, fie de puncte interioare. Dacă ni se dă un număr mare de funcții care nu sînt calculabile, reușim să cunoaștem lucruri care nu au de-a face cu funcțiile calculabile, dar apoi și lucruri care au de-a face cu funcțiile calculabile. Pe de altă parte, dacă cunoaștem de la început suficient de multe funcții calculabile, putem să încercăm a găsi caracteristicile lor comune și să procedăm apoi la o generalizare și abstractizare.

Procedeul uzual de găsire a funcțiilor demonstrabil necalculabile constă în a presupune dată totalitatea funcțiilor calculabile și a „diagonaliza" apoi, ca să obținem o funcție diferită de fiecare membru al totalității. Evident funcțiile necalculabile obținute în acest mod depind de un concept anterior al calculabilității și ca atare nu aduc o contribuție directă la proiectatul program de determinare a totalității funcțiilor calculabile.

Pe de altă parte, cunoaștem un număr mare de funcții despre care este știut că nu sînt calculabile. Calea evidentă pe care trebuie s-o urmăm constă în a analiza procesul de calcul implicat în căutarea valorilor unor funcții familiare.

Turing și Post au analizat pentru prima oară procesul activității de calcul a omului, descompunîndu-l în pași simpli de bază și au dezvoltat ideea că un calcul este, în esență, un procedeu automat. Rezultatul net poate fi descris succint după cum urmează. Să ne imaginăm o bandă care se poate prelungi la infinit, împărțită în celule și o mașină care, la fiecare moment dat, inspectează o celulă dată. Să admitem, mai departe, că mașina este capabilă să efectueze trei lucruri, de la bun început: să se deplaseze la stînga cu o celulă, să se deplaseze la dreapta cu o celulă și să imprime un asterisc. Apoi putem da instrucțiuni pentru ca mașina să execute aceste trei feluri de acte în numeroase ordine diferite. Dar acest lucru nu este adecvat din cel puțin două motive. Noi întrebuințăm numai liste finite de instrucțiuni, astfel că fiecare listă în parte indică mașinii să parcurgă un număr de celule mai mic decît un număr stabilit. În general însă, noi vrem să fie posibil ca numărul celulelor cu care se operează să crească indefinit chiar cu o mulțime fixată de instrucțiuni. Un defect mult mai serios este, evident, acela că o metodă trebuie să ne permită să dăm răspunsuri diferite la chestiuni diferite, și că, prin urmare, în cadrul instrucțiunilor trebuie să intervină un element de recunoaștere și alegere. Toate aceste defecte pot fi

înlăturate prin adăugarea unui tip suplimentar de instrucțiune numit transfer condiționat în mașinile de calcul folosite în momentul de față. Prin acest tip de instrucțiune, mașina trebuie să recunoască dacă celula așezată în dreptul ei este goală și apoi să urmeze două instrucțiuni diferite, după cum celula este goală sau nu.

După ce mașina este înzestrată cu aceste aptitudini, putem adopta o convenție oarecare pentru a reprezenta numerele naturale prin șiruri de asteriscuri, n fiind, de exemplu, un șir de n asteriscuri. Apoi, putem să determinăm domeniul funcțiilor calculabile în felul următor. O funcție este calculabilă, dacă și numai dacă există o listă finită de instrucțiuni, astfel încît atunci cînd mașina începe prin a inspecta un număr arbitrar n, instrucțiunile indică mașinii să execute anumite mișcări, iar mașina se va opri în cele din urmă, cînd valoarea funcției pentru valoarea argumentului n este imprimată. Această definiție cere, pur și simplu, ca pentru fiecare valoare a argumentului n valoarea funcției să fie imprimată mai devreme sau mai tîrziu. Nu se stipulează în nici un fel să se dea, în prealabil, o estimare oarecare a timpului necesitat de efectuarea calculului. Cu alte cuvinte, se cere, doar, ca pentru fiecare n să existe un număr m, astfel încît după m pași valoarea funcției să fie obținută. Nu se cere să specificăm modul în care m depinde de n. Am putea crede că o funcție care satisface definiția este într-adevăr calculabilă, dar nu efectiv calculabilă, deoarece, pentru a fi efectiv calculabilă, trebuie să știm destul de bine cît timp va lua efectuarea calculului pentru orice valoare a argumentului n. În orice caz pare clar că de foarte multe ori ne preocupă nu numai existența unei margini, ci și o estimare a acesteia. Această chestiune va fi discutată mai jos, în legătură cu o definiție echivalentă a funcțiilor calculabile, respectiv definiția lor în termeni de funcții recursive.

Întrucît adunarea și înmulțirea sînt funcțiile calculabile cele mai familiare, este firesc să studiem mai întîi regulile care guvernează algoritmii lor. Aceste reguli sînt întruchipate, după cum se știe, în definițiile recursive:

$$a + 1 = a',$$

$$a + b' = (a + b)'.$$

$$a \cdot 1 = a,$$

$$a \cdot b' = ab + a.$$

a' este, desigur, succesorul lui a.

Este ușor să ne convingem că toate funcțiile definite prin asemenea recurențe împreună cu alte scheme simple sînt calculabile. În acest mod obținem rapid clasa funcțiilor primitive recursive și concluzia că toate funcțiile primitive sînt calculabile.

Sîntem tentați puternic să identificăm calculabilitatea efectivă cu recursivitatea primitivă, deoarece, în aparență, toate funcțiile efectiv calculabile care sînt folosite vreodată în matematica uzuală sînt primitiv recursive. După cum știm însă, cu mulți ani în urmă, Ackermann a descopeit o funcție efectiv calculabilă, care nu este primitiv recursivă. Așadar, numărul funcțiilor calculabile este mai mare decît al celor primitiv recursive. Se pune problema de a introduce și folosi o noțiune mai largă de recursivitate, iar răspunsul constă în funcțiile general recursive. În 1934, Gödel a introdus o definiție a funcțiilor

general recursive pe care a atribuit-o parțial unei sugestii orale venite din partea lui Herbrand. Folosind o variantă, datorată lui Kleene, a acestei definiții, Church a propus în 1936 să identificăm noțiunea intuitivă de calculabilitate cu noțiunea de recursivitate generală.

Cum teza lui Church are două părți, ponderea cade de obicei asupra jumătății care enunță că toate funcțiile care sînt calculabile, conform ideii intuitive, sînt general recursive. Într-adevăr, aceasta este jumătatea care a dus la multe rezultate negative importante: nu există funcții efectiv calculabile sau procedee de decizie pentru cutare și cutare probleme; cu alte cuvinte, anumite probleme de decizie sînt insolubile. Valoarea tezei lui Church în demonstrarea acestor rezultate este evidentă: ea realizează o simplificare considerabilă a formei tuturor funcțiilor care pot fi efectiv calculabile. Dacă descoperim o frontieră precisă, astfel încît o anumită regiune nedeterminată să cadă integral în interiorul frontierei, atunci orice lucru situat dincolo de frontieră se situează și în exteriorul regiunii nedeterminate inițiale. Este limpede că trasarea unei frontiere precise este de ajutor atunci cînd dorim să stabilim că ceva anumit nu este așezat în interiorul regiunii inițiale.

Deși s-au adus o serie de argumente în sprijinul identificării, ar fi greu să pretindem că dispunem de o demonstrație concludentă. De fapt, problema dacă în general este posibil să cerem o demonstrație concludentă într-un caz ca acesta este, în mare măsură, o chestiune de opinie.

Dacă cineva ar fi inventat o mașină, care de fapt poate îndeplini ceea ce nouă ne apar ca decizii aleatorii luate doar prin experiența noastră, și dacă deciziile sînt confirmate în mod general de descoperirile noastre întîmplătoare ulterioare, am putea oare să spunem în acest caz că toate funcțiile calculabile de mașină sînt efective? Se pare că conceptul de efectivitate cuprinde un miez — formulat în termeni de automatică — și totodată o idealizare, care introduce infinitatea. Un lucru pe care un obiect fizic îl poate face în mod sigur și sistematic ar părea că este efectiv, indiferent dacă noi înțelegem sau nu procesul. Ar reieși, în acest caz, că recursivitatea generală a tuturor funcțiilor efective este o chestiune empirică.

Văzută în această lumină, recursivitatea tuturor funcțiilor efective ar apărea ca o ipoteză despre lumea fizică. Dacă nu vrem să ne preocupăm de elementele empirice, s-ar părea că avem un motiv temeinic ca toate funcțiile calculabile să fie general recursive sau calculabile Turing. Astfel, se poate demonstra cu ușurință că diverse concepții, aparent mai puternice, despre dispozitivele de calcul, dau același domeniu de funcții calculabile ca și mașinile Turing; de exemplu, mașinile care dispun de benzi multidimensionale, deplasează mai multe celule în același timp sau generează celule noi între celule date etc., cu condiția ca toate acestea să fie construite într-un mod sistematic. Cu alte cuvinte, clasa funcțiilor general recursive se bucură de proprietăți de închidere puternică. Pe de altă parte, am înclina să credem că dacă vom întîlni, în mod empiric, mașini într-adevăr mai puternice, conceptul nostru de funcție efectivă se va modifica.

În cursul unei conversații, Specker a sugerat o altă posibilitate. Dacă definim o funcție de n, care ia valoarea 0 sau 1, după cum în ziua a n-a începînd de astăzi se produce sau nu un cutremur pe glob, atunci, după cîte știm, funcția poate să fie sau să nu fie general recursivă. Dacă se întîmplă cumva să nu fie, nu putem spune totuși că funcția este, cel puțin în teorie, efectiv calculabilă?

Un răspuns la aceasta este faptul că infinitul este, în mod primar, un concept matematic, care se aplică numai în mod derivat la descrierea lumii fizice. Aşadar, credem că putem cel puţin să separăm conceptul matematic de procedeu efectiv de asemenea consideraţii.

Acceptînd această separare, rămîne problema dacă toate funcţiile general recursive sînt într-adevăr efective.

Raţionamentele uzuale care se fac în sprijinul acestei afirmaţii sînt, în linii mari, de trei tipuri. Clasa se bucură de coerenţă şi proprietăţi de închidere fine: dacă adoptăm ideea la un loc anumit, o vom regăsi într-un alt loc. De exemplu, dacă pretindem recursivitate paşilor consecutivi ai procedeului de demonstraţie al unui sistem formal oarecare, atunci în cadrul unui sistem formal destul de simplu, putem calcula toate funcţiile recursive, dar aceeaşi clasă o obţinem chiar în sisteme mai puternice. Un argument înrudit îndeaproape este stabilitatea relativă la diferite formulări, de exemplu, echivalenţa lui general recursiv, lambda-definibil, calculabil Turing. Asemenea argumente pot fi desigur extrem de slabe, dacă nu sînt întărite în mod adecvat. Ele ne asigură că am obţinut o noţiune definită, deşi nu neapărat cea pe care o doream iniţial. Un al treilea tip de argument este că ceea ce considerăm, în mod uzual, că sînt funcţii efective se dovedesc că sînt funcţii general recursive. Acest argument are o anumită greutate, dacă vrem să spunem că toate funcţiile calculabile sînt recursive, dar sprijină prea puţin afirmaţia reciprocă, deoarece funcţiile calculabile întîlnite în fapt formează o clasă destul de mică şi ar putea să existe clase mai restrînse care să le înglobeze pe toate.

Argumentul cel mai puternic este probabil analiza lui Turing care vizează în mod direct explicarea noţiunii intuitive şi face să pară firesc să admitem că toate funcţiile Turing calculabile sînt într-adevăr efective. Dar, aşa cum se observă mai jos, ca şi în cazul funcţiilor general recursive, se pune şi aici problema opoziţiei dintre simpla existenţă şi estimarea paşilor necesari.

În treacăt fie spus, Kleene a emis sugestia că un sistem efectiv sau formal ar trebui identificat cu un sistem ale cărui teoreme formează o mulţime recursiv numărabilă. Această identificare pare mai plauzibilă în lumina noţiunii echivalente a lui Post despre mulţimi generate sau limbaje canonice.

§ 2. FUNCŢII GENERAL RECURSIVE

În linii mari, o funcţie f este general recursivă dacă există o mulţime finită E de ecuaţii care conţin $=$, variabile, numerale şi simboluri funcţionale astfel încît, prin substituirea numeralelor pentru variabile, şi a egalilor prin egali, există pentru fiecare numeral n exact o singură ecuaţie derivată de forma $f(n) = p$, unde p este şi el un numeral care dă valoarea corectă a lui $f(n)$. Este posibil să enumerăm toate aceste mulţimi de ecuaţii şi să definim un predicat primitiv recursiv T, astfel încît $T(m, n, k)$ unde a k-a ecuaţie derivată a celei de a m-a mulţimi E este prima ecuaţie de forma cerută $f(n) = p$, pentru numeralul dat n. Este posibil să definim şi o funcţie primitiv recursivă U, astfel încît $U(j)$ este p, dacă j este (numărul Gödel al) $f(n) = p$. Aşadar, definiţia poate fi formulată după cum urmează.

Definiție. O funcție f este general recursivă, dacă există un număr natural m, astfel încît:

(a) $(n)\,(Ek)\;T(m, n, k)$;

(b) $(n)\,(f)\,(n) = U(\mu_k T(m, n, k)))$.

În termeni de numărare a cuantorilor, definiția este de forma *EAE*. Dacă, așa cum se întîmplă de multe ori, ne interesează numai o mulțime dată *E* de ecuații, atunci numărul *m* este fixat și condiția (a) este de forma *AE*. Cuantorul (Ek) are un sens definit și clar în (a), care spune că pentru fiecare numeral *n* există un numeral *k*, astfel încît $T(m, n, k)$ este verificabil sau numeric demonstrabil pentru *m* dat. Totuși definiția nu precizează modul în care *k* depinde de *n* și nici metoda prin care trebuie să fie stabilit (a).

Church anticipează chestiunea și răspunde că nu trebuie să facem altceva decît să interpretăm expresia „există" din cadrul condiției (a) într-un sens constructiv, sau să certificăm că aserțiunea de existență este demonstrată constructiv. După aceea, el lasă cititorilor săi sarcina de a determina criteriul de constructivitate. În felul acesta, se pare că problema funcțiilor efectiv calculabile se reduce la cea a caracterizării demonstrațiilor constructive.

În prezent pare clar că noțiunea de recursivitate poate fi considerată cel mult ca un înlocuitor satisfăcător al noțiunii intuitive de procedee efective într-un sens clasic, nu în sens strict constructiv. Deși fiecare funcție despre care știm că este recursivă este constructivă, ideea generală de recursivitate nu este constructivă, deoarece nu avem o metodă generală pentru a ajunge în mod constructiv la condiția (*a*). Această situație nu a împiedicat elaborarea unei teorii bogate a funcțiilor recursive. Dar ea înseamnă că un finitist sau un intuiționist ar dori să examineze mai îndeaproape chestiunea. În orice caz, pentru el ideea de demonstrație constructivă ar avea o însemnătate mai mare decît cea de funcție efectivă. Dacă este profund în convingerile sale, el ar trebui să nege, probabil, că ideea, așa cum se prezintă ea, îi dă conceptul corect de funcție efectivă, deoarece interpretarea clasică a cuantorilor pe domeniul numerelor nu este acceptabilă pentru dînsul. Independent de poziția cuiva în privința acestor concepții diferite, se pare că este de dorit și o clasificare a tuturor funcțiilor general recursive prin mijloace mai constructive.

Pare posibil ca un intuiționist să vrea să spună despre considerațiile privitoare la toate funcțiile general recursive lucruri asemănătoare cu cele spuse de Brouwer, în 1912, despre clasica a doua clasă numerică a lui Cantor („Bull. Amer. Math. Soc.," 20, 1914, p. 91).

Să considerăm acum conceptul: „numere ordinale numărabil infinite". Din faptul că acest concept are un sens clar și bine definit atît pentru formalist, cît și pentru intuiționist, formalistul conchide că avem dreptul să creăm „mulțimea tuturor numerelor ordinale numărabil infinite", mulțime a cărei putere el o numește alef-unu; intuiționistul nu recunoaște acest drept. Dat fiind că este posibil să argumentăm, spre satisfacția comună a formalistului și intuiționistului, că (1) mulțimile numărabil infinite de numere ordinale numărabil infinite pot fi construite în diverse feluri și că (2) pentru fiecare asemenea mulțime putem desemna un număr ordinal numărabil infinit care nu aparține la această mulțime — formalistul conchide: „alef - unu este

mai mare ca alef-zero", o propoziție care pentru intuiționist nu are nici un sens.

Am putea dori să folosim funcțiile parțial recursive pentru ca să evităm asemenea probleme, deoarece condiția (a) nu este cerută de aceste funcții. Totuși este mai mult decît îndoielnic că putem pretinde că toate funcțiile parțial recursive ar fi strict efective. În cazul lor, situația pare a fi chiar și mai puțin constructivă: nu numai că nu dispunem de o estimare a momentului cînd procesul se va opri, dar nu știm nici dacă în genere el se va opri. De exemplu, putem să enumerăm toate propozițiile unui sistem formal ca Z și să enumerăm toate demonstrațiile, obținînd o funcție parțial recursivă care dă o demonstrație în cazul cînd propoziția este demonstrabilă, dar în caz contrar nu se oprește niciodată. Este cam greu să putem să considerăm o atare funcție ca fiind efectiv calculabilă.

Intuitiv vorbind, nu este absolut sigur că noi vrem să admitem întotdeauna că toate funcțiile general recursive sînt efectiv calculabile. De exemplu, simțim precis că demonstrația lui Herbrand sau a lui Gentzen pentru eliminarea lui *modus ponens* dă un procedeu efectiv. Pe de altă parte, noi putem deriva și din completitudinea calculului predicatelor un procedeu general recursiv de eliminare a lui *modus ponens*. Nu este încă cert că oricine va dori să considere acest din urmă procedeu ca un procedeu efectiv. Sau să luăm demonstrația teoremei că toate sistemele complete (închise) sînt decidabile, sau, cu alte cuvinte, că dacă o mulțime și complementara acesteia sînt ambele recursiv numărabile, mulțimea este recursivă (Cf. Cap. I, t. 8, mai sus). Uneori avem impresia neplăcută că, deși s-a demonstrat corect recursivitatea generală a mulțimii, nu s-a demonstrat în mod real calculabilitatea ei efectivă. În cartea sa despre funcții recursive, Péter observă că, în general, deși putem să decidem efectiv, dacă orice număr dat are o proprietate P, și se știe că există un număr care se bucură de proprietatea P, nu sîntem întotdeauna capabili să găsim cel mai mic număr care are proprietatea P (§ 1, nr. 8). Pe de o parte, aceasta ar contrazice identificarea funcțiilor general recursive cu cele efective. Pe de altă parte, am înclina probabil să fim de acord cu afirmația de mai sus.

Conform explicației standard a conceptului de demonstrație constructivă, un enunț existențial este demonstrat constructiv, atunci cînd demonstrația produce, în fapt, un exemplu sau cel puțin indică o metodă prin care am putea să găsim în principiu un asemenea exemplu. Dar ce metode sînt acceptabile?

În ce privește condiția (a) din definiția funcțiilor general recursive, noi dispunem de o metodă de găsire a numărului corespunzător k pentru fiecare număr dat n, sau, altfel spus, de găsire, pentru fiecare n, a ecuației corespunzătoare de forma „$f(n)$ egal un numeral". Metoda constă în a enumera toate ecuațiile derivate ale mulțimii respective de ecuații pînă cînd ajungem la una cu $f(n)$ ca membru stîng și un numeral ca membru drept. Într-adevăr, indiferent de felul cum am obținut afirmația existențială, această metodă este aplicabilă întotdeauna, în sensul că mai devreme sau mai tîrziu vom ajunge la ecuație, deoarece ea *există* în cadrul șirului infinit de ecuații derivate. Mai exact, există un procedeu automat de scriere una după una a ecuațiilor derivate, astfel încît pentru orice argument dat n se va găsi, în cele din urmă, o ecuație care are forma cerută. Dacă aceste metode ni se par acceptabile, atunci problema dacă afirmația existențială a fost demonstrată constructiv nu prezintă

importanță. Sau poate credem că metodele nu sînt efective, și vom spune că o metodă de aflare a ecuațiilor cerute este efectivă numai dacă ne facem, în legătură cu procedeul automat, *o idee destul de precisă* despre rapiditatea cu care procesul se va termina pentru fiecare valoare a argumentului n. În acest caz, necesitatea unei demonstrații constructive pentru stabilirea condiției (a) poate fi justificată pe temeiul că demonstrațiile constructive ne permit să ne facem o idee destul de precisă.

Chestiunea deciderii calculabilității efective a unei funcții se poate reduce așadar la a cunoaște intuitiv funcțiile ei de viteză: corespunzător fiecărei mulțimi de ecuații care definește o funcție general recursivă $f(n)$, există o anumită funcție de viteză $f_s(n)$ care, pentru fiecare constantă n_0, dă o margine superioară a numărului de pași necesari pentru obținerea valorii lui $f(n_0)$ din mulțimea dată de ecuații. Cu alte cuvinte, în condiția (a):

$$(1) \qquad (n)\,(Ek)\,T(m, n, k);$$

Vrem să aflăm o funcție $f_s(n)$ astfel că

$$(2) \qquad (n)\,(Ek)\,(k \leqslant f_s(n)\ \&\ T(m, n, k))$$

este de asemenea adevărat.

Acum se pare că este destul de rezonabil a afirma că demonstrația lui (1) este constructivă, dacă și numai dacă putem descoperi o funcție efectiv calculabilă $f_s(n)$ pentru care (2) este adevărat. Dacă admitem în plus că o funcție general recursivă este efectiv calculabilă numai dacă condiția (a) este demonstrată constructiv, intrăm într-un cerc care nu este neapărat dăunător, deoarece intuitiv noi știm de la bun început că anumite demonstrații sînt constructive și anumite funcții sînt efectiv calculabile.

În orice caz, nici un sistem formal individual nu poate oferi demonstrații pentru toate cazurile condiției (a), deoarece funcțiile care sînt în mod demonstrabil general recursive într-un sistem pot fi enumerate și raționamentul diagonalei poate fi aplicat pentru ca să obținem o nouă funcție general recursivă.

Pe de altă parte, este interesant de știut că multe demonstrații se cunosc a fi constructive în sensul de mai sus. Lucrări datorate lui Ackermann au stabilit că toate demonstrațiile teoriei actuale a numerelor, ca teorie formalizată, de exemplu, în Z, sînt demonstrații constructive în acest sens. Este interesant să studiem probleme similare în legătură cu sisteme mai tari.

Există, de asemenea, demonstrații constructive care nu sînt formalizabile în unele sisteme formale bogate date. De exemplu, demonstrațiile de consistență a teoriei numerelor datorate lui Gentzen și Ackermann, deși nu sînt formalizabile în teoria numerelor, sînt totuși, după cum se știe, constructive. În mod firesc, se pune întrebarea dacă toate aserțiunile adevărate privitor la consistență și recursivitate generală nu pot fi demonstrate constructiv în mod similar. Dar nu este ușor de văzut cum vor putea fi obținute rezultate generale în această problemă.

Abordarea cea mai promițătoare în problema unei clasificări edificatoare a funcțiilor calculabile pare să fie conceptul de funcție recursivă ordinală introdus de Ackermann în 1940. În opoziție cu funcțiile general recursive, ele sînt, ca și funcțiile primitiv recursive, de așa natură, încît valoarea unei funcții pentru valoarea unui argument n este determinată atunci cînd valorile funcției pentru toate argumentele care îi preced (într-un anumit sens dinainte

stabilit) sînt determinate. Ele se deosebesc însă de funcțiile primitiv recursive prin faptul că putem folosi diferite moduri de ordonare a numerelor, astfel că un număr poate fi precedat de o infinitate de alte numere, iar valoarea funcției pentru un argument dat n poate depinde de valorile funcției pentru mai mult decît n valori precedente ale argumentelor. De exemplu, dacă ordonăm numerele naturale astfel, încît numerele impare să preceadă numerele pare, există o infinitate de numere care preced numărul 2.

Dacă pentru fiecare ordinal infinit α mai mic ca un ordinal dat am ales o relație de bună ordonare efectivă unică R a numerelor naturale, atunci o funcție este recursivă de ordinul α, dacă este definită printr-un șir de scheme care sînt de un ordin inferior lui α, sau au una dintre formele pentru definirea funcțiilor primitiv recursive sau sînt de forma:

$$f(0, x) = g(x),$$
$$f(y', x) = h(y, f(\theta(y'), x), x).$$

Aici, g, h, 0 sînt funcții date, astfel încît pentru toți y, $R(\theta(y'), y')$, și admitem arbitrar că numărul 0 este întotdeauna cel dintîi în orice bine-ordonare.

Este ușor de văzut că toate aceste funcții sînt general recursive, deoarece dacă plecăm de la un număr oarecare, în cadrul unei bine-ordonări, și trecem la numere anterioare, trebuie să ne oprim după un număr finit de pași.

Pentru a fi mai corecți, trebuie să admitem intrări „în serie" ale funcției f. Atunci, schema ar fi:

$$f(0, x) = g(x),$$
$$f(y', x) = h(y, f(G(y', x), x), x).$$

Aici, $(x)\, R(G(y', x), y')$ și G pot să conțină orice alte funcții date și pe însăși f, cu singura condiție ca pentru fiecare parte a formei $f(F(y', x), x)$ în G să avem întotdeauna $(x)R(F(y', x), y')$.

Folosind funcții recursive ordinale în locul celor general recursive, păstrăm continuitatea de mișcare de la funcții date la funcții noi, și de la valori date ale unei funcții la argumente noi ale funcției. Mai mult, obținem mai multe moduri naturale de clasificare a funcțiilor calculabile, dacă le identificăm cu funcțiile recursive ordinale: conform relației folosite pentru rearanjamentul numerelor naturale, conform tipului ordinal al rearanjamentului, conform demonstrației că acest rearanjament este o bine-ordonare, conform modului în care valorile pentru un argument depinde de valorile pentru argumente precedente. Aici ne găsim în fața a mai multor programe de cercetare matematică. Rezultatele acestei cercetări vor perfecționa modul nostru de a înțelege conceptul de calculabilitate; pe de altă parte sîntem conduși la asemenea probleme matematice de către problema mai mult sau mai puțin vagă a precizării noțiunii intuitive de calculabilitate.

§ 3. TEOREMA LUI FRIEDBERG-MUCINIK

În ultimii ani, teoria funcțiilor recursive a devenit o ramură independentă a matematicii, comparabilă, de exemplu, cu teoria grupurilor în secolul trecut. Deși teoria a luat ființă în mare măsură prin intermediul cercetărilor în funda-

mentele matematicii, ea se află astăzi în stadiul în care poate fi parcursă fără a cunoaşte prea mult alte ramuri ale logicii matematice. Drept urmare, ea exercită o atracţie specială pentru cei ce vor să găsească un domeniu autonom interesant, în care capacitatea de gîndire matematică pură a cuiva să se verifice rapid.

Dispunem de cărţile lui Péter, Kleene, Markov şi Davis, care tratează, toate, cu precădere această teorie. Progresul este atît de rapid, încît ar trebui scrise cărţi pentru a lua în consideraţie lucrările mai recente. Nu vom încerca aici să trecem în revistă această teorie. În schimb, vom da cu titlu de ilustrare un exemplu ales aproape la întîmplare. Sînt presupuse unele cunoştinţe elementare despre teorie.

Exemplul este o soluţie a „problemei lui Post" din 1944, obţinută independent de către Mucinik şi Friedberg în jurul lui 1956. Problema constă în a decide dacă există o mulţime B recursiv numărabilă dar nu recursivă, astfel încît nu toate mulţimile recursiv numărabile sînt recursive în B. Soluţia constă în a defini o asemenea mulţime B şi totodată o mulţime recursiv numărabilă A care nu este recursivă în ea.

Demonstraţia foloseşte faptul că o mulţime S este recursivă, dacă şi numai dacă atît S, cît şi complementara ei S' sînt recursiv numărabile. Mulţimile A şi B sînt definite simultan în aşa fel, încît B' diferă de toate mulţimile recursiv numărabile, iar A' diferă de toate mulţimile numărabile printr-o funcţie recursivă în B. Urmează că B nu este recursivă iar A nu este recursivă în B.

Pe baza unor rezultate din teoria funcţiilor recursive, putem să admitem ca date funcţiile general recursive d, e, f şi funcţiile parţial recursive g, h care se bucură de următoarele proprietăţi:

3.1. Funcţia d enumeră toate definiţiile funcţiilor parţial recursive.

3.2. Funcţia e enumeră toate definiţiile funcţiilor parţial recursive într-o mulţime arbitrară B. Aceste definiţii sînt independente de constituţia lui B, dar valorile funcţiilor pentru argumente date depind, desigur, de constituţia lui B.

3.3. Funcţia f enumeră toate situaţiile finite posibile pentru o mulţime arbitrară B: fiecare situaţie constă dintr-un număr finit de condiţii, care asertează dacă un anumit număr aparţine lui B.

3.4. Funcţia $g_i(j)$ dă valoarea celei de a j-a ecuaţii derivate prin definiţia $d(i)$. Astfel, funcţia este definită numai cînd a j-a ecuaţie derivată a lui $d(i)$ este de forma $p_i(k) = q$, unde p_i este principalul simbol funcţional al lui $d(i)$, şi k, q sînt numerale. Atunci $g_i(j) = q$, indiferent de k. Pentru fiecare k, noi definim doar aceasta pentru cel mai mic j care are proprietatea de mai sus.

3.5. Funcţia $h_i(j, k)$ dă valoarea ecuaţiei derivate a j-a a definiţiei $e(i)$ în baza ipotezei că $f(k)$ este valabil. Întrucît orice evaluare depinde de un număr finit de valori ale lui B, avem întotdeauna un k, astfel încît $f(k)$ conţine toate condiţiile impuse lui B, necesare pentru fiecare evaluare în parte. Pentru orice k şi i, lăsăm funcţia nedefinită atunci cînd o aceeaşi ecuaţie derivată se repetă.

Trecem la definirea lui A și B, imaginîndu-ne construirea unei tabele infinite:

0 1 2 3 ...

A

B

În linia pentru B, fiecare coloană va conține, în cele din urmă, sau —, sau altfel $d(m)$ pentru un numeral m, cu sau fără un $+$ însoțitor. Mulțimea B trebuie să conțină toate numerele pentru care avem, $d(m)$ însoțit de un $+$ și numai pe ele. În acest caz, numărul este comun lui B și mulțimii enumerate prin $d(m)$. Este esențial că pentru fiecare m avem o coloană în linia lui B care conține $d(m)$ însoțit de $+$; în acest caz, B' nu poate fi o mulțime recursiv numărabilă. În linia pentru A, fiecare coloană va conține sau —, sau altfel un $e(m)$, sau un $+$, sau și una și alta. Mulțimea A trebuie să conțină toate numerele în care figurează $+$, sau singur, sau însoțit de un $e(m)$ și numai pe ele. Cînd $e(m)$ și $+$ figurează în n la linia A, numărul n aparține lui A și mulțimii enumerate prin e. Este esențial că pentru fiecare m, există o coloană în care figurează $e(m)$ și $+$; atunci A' nu poate fi enumerată prin nici o funcție recursivă în B.

Pentru ca să evităm circularitatea în definirea simultană a lui A și B, folosim un procedeu pentru ordinea de prioritate, cu scopul de a garanta că deciziile anterioare nu vor fi modificate în baza unor cerințe ulterioare, cu excepția unui număr foarte restrîns de cazuri. Astfel, în orice linie, de îndată ce o coloană primește —, nu mai este permisă nici o modificare la locul respectiv. Mai mult, în linia B, de îndată ce o coloană capătă $d(m)$ și $+$, locul nu va fi modificat din nou. Singurele modificări posibile sînt de două tipuri. Un $d(m)$ care nu este însoțit de $+$ își poate schimba poziția. Un $e(m)$ își poate schimba poziția.

Mulțimile A și B se definesc inductiv. La fiecare stadiu, un număr $f(k)$ se zice că concordă cu starea actuală în linia B, la stadiul respectiv, dacă pentru fiecare condiție pozitivă „p aparține lui B“ în $f(k)$ spațiul de sub p din linia B este ocupat de un $d(m)$ urmat de $+$.

Pasul 0. Scriem $e(0)$ sub 0 în linia A. Constatăm dacă $h_0(0, 0) = 0$. Dacă nu, nu facem nimic și continuăm cu pasul 1. Dacă da, verificăm dacă $f(0)$ concordă cu starea reală a liniei B la stadiul respectiv. Întrucît pînă acum nu s-a scris nimic în linia B, concordanța poate surveni numai atunci cînd $f(0)$ nu include condiții pozitive. Dacă nu există nicio concordanță, nu facem nimic și continuăm cu pasul 1. Dacă se constată o concordanță, scriem — sub toate numerele i pe linia B, astfel încît „i nu aparține lui B“ figurează în $f(0)$, și scriem $+$ după $e(0)$ sub 0 în linia A. În acest din urmă caz vom fi stabilit că 0 este în A, și chiar că B trebuie să fie astfel, încît 0 este în mulțimea enumerată prin $e(0)$, deoarece B nu trebuie să conțină numere sub care figurează — în linia B.

Pasul 1. Scriem în linia B, sub primul numeral întîlnit p —, adică primul numeral din stînga sub care spațiul în B este încă alb, $d(0)$. Să calculăm dacă $g_0(0) = 0$. În caz afirmativ, scriem $+$ după $d(0)$, și vom fi decis că 0 este în B. În caz contrar nu întreprindem nimic. În orice caz continuăm cu pasul 2.

Pasul $2(n+1)$. Scriem $e(n+1)$ sub primul numeral întîlnit în linia A, și denumim numeralul $a(n+1)$. Calculăm $h_i(j, k)$ pentru toate argumentele $i, j, k \leqslant n+1$ și aflăm, dacă există, pentru toate cazurile cînd $h(j, k)$ este egal cu $a(i)$, numărul sub care $e(i)$ figurează în linia A. Dacă nu există un asemenea caz sau dacă în toate aceste cazuri $e(i)$ este deja însoțit de $+$ (sub $a(i)$ în linia A), continuăm cu pasul $2n+3$. Dacă există cazuri cînd $e(i)$ nu este însoțit de $+$, (unde acei i formează o clasă C), vom lua cel mai mic i din C și vom compara $f(k)$, unde $h_i(j, k) = a(i)$ pentru unii (și de fapt, conform cu 3.5, cel mult un) j, cu starea reală a liniei B la acest stadiu. Dacă nu concordă între ele, considerăm cel mai mic i restant în C și să repetăm. Dacă nu avem o concordanță în nici un caz, continuăm cu pasul $2n+3$. În cazul cînd ele concordă — adică $f(k)$ concordă cu starea de fapt a liniei B la acest stadiu, punem $+$ după acel $e(i)$ și ajustăm linia B, pentru a evita un conflict. Conform cu definiția concordanței, pentru fiecare condiție pozițională „p este în B“, p obține $+$ în linia B. Printre condițiile negative „q nu este în B“, sub orice q, linia B se prezintă astfel: sau (i) loc alb (blanc); sau (ii) $-$; (iii) $d(s)$, $s < i$; (iv) $d(s)$, $s \geqslant i$. Să punem $-$ în linia B sub q în cazul i). În cazurile ii) și iii) nu facem nimic. În cazul iv) mutăm $d(s)$ pînă la primul blanc din linia B și scriem $-$ în linia B sau q inițial (după eliminarea lui $d(s)$). Procesul se repetă cu toți i-ii din C. Cînd nu mai există i, continuăm cu pasul $2n+3$. Se poate observa că $d(s)$ își schimbă poziția, numai cînd există unii i, $s \geqslant i$ astfel încît $e(i)$ capătă $+$ înainte ca $d(s)$ să capete $+$. Aceasta se poate întîmpla de cel mult s^s ori pentru un s dat.

Pasul $2n+3$. Scriem $d(n+1)$ în primul loc gol de pe linia B. Pentru fiecare i, $0 \leqslant i \leqslant n+1$, presupunem că $d(i)$ este situat pe linia B mai jos de $b(i)$ și, bineînțeles, unii sau toți acești $d(i)$ pot fi urmați de $+$. Calculăm $g_i(j)$ pentru toate argumentele i, $j \leqslant n+1$ și aflăm, dacă există, toate cazurile cînd $g_i(j) = a(i)$. Conform cu 3.4, pentru fiecare i poate exista cel mult un j. Dacă nu avem asemenea i, continuăm cu pasul $2n+4$. Dacă clasa C compusă din acești i nu este vidă, începem cu cel mai mic i din C. Scriem $+$ după $d(i)$ sub $b(i)$ pe linia B. Examinăm linia A pentru ca să determinăm dacă este necesară o ajustare. Facem aceasta, verificînd dacă există vreun s, $s < i$, astfel încît $e(s)$ și $+$ figurează pe linia A sub $a(s)$, iar la semnul $+$ după $e(s)$ s-a ajuns pe baza unei situații $f(k)$, care conține o condiție negativă „$b(i)$ nu este în B“. Dacă nu există un asemenea caz, continuăm cu cel mai mic element rămas în C. Pentru orice s astfel încît $a(s)$ nu este element comun al lui A și al mulțimii enumerate prin $e(s)$ relativ la B, trebuie să deplasăm $e(s)$ la primul loc liber rămas pe linia A, lăsînd $+$ sub $a(s)$. Procedeul se repetă cu fiecare asemenea s, de la mai mic la mai mare. După ce am terminat acest întreg proces cu un i din C, facem același lucru cu următorul element al lui C, pînă cînd epuizăm toate elementele lui C. Atunci sîntem în măsură să continuăm cu pasul $2n+4$.

Întrucît un $d(i)$ pe linia B poate căpăta $+$ o singură dată, iar un $e(s)$ pe linia A își schimbă poziția numai dacă pentru unii k, $k < s$, $d(k)$ capătă $+$ după ce $e(s)$ capătă $+$, $e(s)$ își schimbă poziția de cel mult s ori, pentru fiecare s.

Fiecare $d(i)$, care este general recursiv, capătă în mod cert semnul $+$ în B, la un moment dat, deoarece, fiind dată orice mulțime finită de $b(p)$, există întotdeauna pentru fiecare i unii q în afara mulțimii finite, astfel, încît avem un j

care verifică $g_i(j) = q$. În mod similar, orice $e(i)$ general recursivă relativ la un B arbitrar trebuie să primească $+$ în A, la un anumit stadiu.

Aşadar, am demonstrat:

Teoremă. Există mulţimi recursiv numărabile A şi B astfel încît A nu este recursivă în B şi B nu este recursivă.

§ 4. METAMATEMATICA

Întrucît procedeele de decizie trebuie în general să fie efective, teoria demonstraţiilor sau metamatematica operează în mare măsură cu funcţii calculabile. În consecinţă, nu este deplasat să dăm în cele de faţă o schiţă succintă a unor rezultate şi orientări standard în acest domeniu.

În cadrul matematicii, noi demonstrăm, de regulă, rezultate ale unor ramuri speciale prin anumite metode speciale. Uneori avem şi rezultate despre domenii întregi sau despre toate metodele de un anumit gen. De exemplu, independenţa postulatului al cincilea al lui Euclid, inexistenţa trisectoarei unui unghi arbitrar, imposibilitatea de a rezolva ecuaţiile algebrice de ordinul cinci, principiul dualităţii în geometria proiectivă. Pentru ca să enunţăm şi să demonstrăm riguros aceste rezultate, trebuie să formulăm metodele subiacente de demonstraţie şi construcţie într-un mod cît se poate de explicit. Metamatematica pune accentul pe această formulare explicită şi urmăreşte să obţină rezultate avînd implicaţii atît de largi. În linii mari, metamatematica este o ramură a matematicii care se deosebeşte de celelalte ramuri prin faptul că tratează ca obiecte demonstraţii, metode de construcţie, teorii în locul numerelor, figurilor, funcţiilor.

Linia de demarcaţie dintre matematică şi metamatematică nu este cîtuşi de puţin precisă. În comparaţie cu înmulţirea unor numere întregi particulare, legea după care un număr este divizibil prin 9, atunci cînd suma cifrelor sale este divizibilă prin 9, reprezintă un rezultat metamatematic privitor la tehnica uzuală de calcul. Cu toate acestea, putem enunţa şi demonstra uşor această lege ca pe o simplă teoremă în teoria numerelor pe baza relaţiei elementare $10^n \equiv 1 \pmod 9$. Această absenţă a unei linii precise de demarcaţie persistă şi în cazuri mai complicate. Astfel, pentru ca să folosească cunoaşterea noastră vastă despre obiectele matematice familiare, Gödel a început să reprezinte obiectele metamatematice prin întregi pozitivi şi funcţii de aceştia. Drept urmare, numeroase rezultate metamatematice pot fi considerate ca fiind de acelaşi tip cu teoremele obişnuite despre numerele întregi. De fapt, nevoia făuririi conceptelor şi instrumentelor reclamate de aceste cercetări a condus la discipline matematice noi, ca teoria funcţiilor recursive şi cea a numerelor ordinale constructive, teorii pe care le putem dezvolta cu succes fără a ţine seama de originea lor mai filozofică.

Rezultate cunoscute au fost precizate prin formulări sistematice explicite. Dacă noţiunea de demonstraţie nu este caracterizată sintactic, principiul dualităţii în geometria proiectivă nu poate primi o justificare absolut adecvată; deşi, în această privinţă, sîntem înclinaţi să credem că o instrucţiune şi claritate deosebită nu ne este de prea mare folos. Un exemplu mai pregnant este precizarea de către Tarski a teoremei lui Sturm pentru decizia numărului de rădăcini reale ale unei ecuaţii algebrice în x. Reţi-

nînd, în esență, ceea ce am putea numi „sîmburele matematic" al demonstrației lui Sturm, Tarski reușește să stabilească, pe bază de considerații metamatematice, o metodă generală de decizie pentru algebra elementară și geometria elementară. Aceasta înseamnă că pentru orice enunț în termeni de adunare, înmulțire, variabile definite pe domeniul numerelor reale, numerale (dar nu variabile definite pe domeniul numerelor întregi sau pe clasa numerelor reale) și simboluri logice, metoda poate decide dacă acesta este adevărat sau fals, demonstrabil sau infirmabil (în cadrul unui sistem formal adecvat). În domeniul de aplicabilitate a acestei metode intră unele teoreme nebanale ale geometriei elementare.

Un exemplu privilegiat de aplicare a logicii în rezolvarea unor probleme matematice curente celebre este soluția negativă dată de Novikov la problema cuvintelor pentru grupuri. Se dă o mulțime finită de litere ca generatori. Secvențe de aceste litere se numesc cuvinte. Avem o mulțime finită de reguli de operație (perechi de cuvinte A, B, astfel încît dacă $A \to B$, atunci $PAQ \to PBQ$). Dacă $A \to B$ este o regulă, atunci $B \to A$ este și ea (semigrup). Literele se dau în perechi a_1, a_1^{-1}, b_1, b_1^{-1} etc. și există în plus un cuvînt vid 1, astfel încît $a_i a_i^{-1} \to 1$ și $1 \to a_i^{-1} a_i$ sînt reguli de operație. Admitem că generatorii sînt precizați și considerăm toate mulțimile posibile de reguli de operație care satisfac condițiile de mai sus. Problema cuvintelor este dacă există o metodă efectivă pentru a afla, pentru orice mulțime finită de reguli și două cuvinte arbitrare A, B, dacă $A \rightleftarrows B$. Novikov dă o anumită mulțime finită de reguli de operație pentru care nu avem o metodă de decizie. (Să observăm în treacăt că, deși problema generală este aparent mai puternică și capătă o soluție negativă ca un corolar mai slab, este nerezonabil să așteptăm răspunsuri diferite pentru cele două probleme legate atît de strîns între ele). Cu mult înainte, lucrarea lui Kurt Reidemeister, *Einführung in die kombinatorische Topologie*, (Braunschweig, 1932, p. 56) a dat o soluție pozitivă pentru problema cuvintelor pentru grupurile abeliene. În treacăt fie spus, problema generală pentru grupuri este echivalentă cu problema deciderii dacă o propoziție deschisă, în cadrul unui sistem de axiome care caracterizează toate grupurile, este o teoremă: regulile de operații sînt condiții în implicații. Întrucît faptul dacă o propoziție dată este deschisă se poate decide efectiv, rezultă ca un corolar că teoria grupurilor formulată cu cuantori este și ea indecidabilă.

S-au făcut încercări — pînă acum nereușite — pentru a se obține o soluție negativă la a zecea problemă a lui Hilbert: aflarea unei metode efective de rezolvare a tuturor ecuațiilor diofantice, adică a unei metode de decidere dacă un polinom dat arbitrar este realizabil (o formulă cu variabile libere, precedată de un șir de cuantori existențiali) în domeniul numerelor întregi. Markov a demonstrat recent rezultate de irezolvabilitate în problema topologică a aflării unei mulțimi complete de invarianți pentru varietățile elementare de dimensiuni peste 2 (o clasificare completă a acestora) sau, cu alte cuvinte, în problema aflării unei metode de calculare pentru două varietăți simplicial închise arbitrare, date prin intermediul unei mulțimi de relații de incidență, dacă ele sînt sau nu omeomorfe (cf. expunerea lui Markov la Congresul internațional al matematicienilor, în 1958).

Oricît de importante sînt aceste aplicații, ele nu privesc direct conceptele fundamentale de număr și mulțime, ci se situează mai curînd la marginea cercetărilor de fundamente. Două rezultate mai centrale sînt următoarele.

Se acceptă, în mod general, că majoritatea demonstrațiilor din teoria numerelor pot fi formalizate într-un sistem formal care conține, pe lîngă logica elementară, axiomele lui Peano și definiții recursive. Gentzen și Ackermann au demonstrat în diverse moduri consistența acestui sistem. Demonstrația lui Ackermann dă o metodă care, pentru orice demonstrație P dată în sistem, a unei concluzii $(Ex)A(x)$, unde $A(x)$ este decidabil pentru orice valoare constantă a lui x, permite să calculăm sistematic un număr n_p, astfel încît $A(n_p)$ este adevărat; prin aceeași metodă putem extrage o funcție recursivă $f(x)$ de un tip destul de restrîns dintr-o demonstrație a lui (x) (Ey) $A(x, y)$, unde A este decidabil, astfel încît (x) $A(x, f(x))$ este o teoremă.

După cum observă Kreisel, putem să extindem rezultatele cu ușurință la cazuri în care folosim o disjuncție indecisă în cadrul demonstrației (folosim legea terțului exclus): de exemplu, o derivare din ipoteza lui Riemann și una din negația acesteia din urmă.

$$(z)\ A(z) \supset (x)(Ey)B(x,\ y) \qquad \sim (z)\ A(z) \supset (x)\ (Ey)B(x,y)$$

$$\sim (z)\ A(z) \vee (x)(Ey)B(x,y) \qquad (Ez) \sim A(z) \supset (x)\ (Ey)B(x,y)$$

$$(x)\ ((Ez) \sim A(z) \vee (Ey)\ B(x,\ y)) \qquad (z)\ (x)\ Ey)\ (\sim A(z) \supset B(x,\ y))$$

$$(x)\ (Ey)\ (A(y) \supset B(x,\ y)) \qquad \sim A(m) \supset B(n,\ g(m,\ n))$$

$$A(f(n)) \supset B(n,\ f(n)).$$

Așadar, pentru orice n, sau $A(f(n))$, și atunci $B(n, f(n))$, sau $\sim A(f(n))$, și atunci $B(n,\ g(f(n),\ n),\ n))$. Avem:

$$B(n,\ f(n)) \vee B(n,\ g(f(n),\ n),\ n))$$

$$(Ey_n)\ (y_n \leqslant f(n) + g(f(n),\ n)\ \&\ B(n,\ y_n))$$

$$B(n,\ h(n)).$$

Kreisel aplică aceste rezultate la teorema lui Littlewood că $\pi(n)$—$\mathrm{li}(n)$ schimbă semnul de o infinitate de ori $\left(\mathrm{li}(x) = \int_e^x \frac{du}{\log u}\right)$ și la teorema lui Artin ca fiecare funcție rațională determinată $p(x_1, ..., x_n)/q(x_1 ..., x_n)$ cu $p(x_1, ..., x_n) \cdot q(x_1, ..., x_n) \geqslant 0$ cu coeficienți raționali este o sumă de pătrate de funcții raționale, de asemenea cu coeficienți raționali. Reformulînd enunțurile și demonstrațiile teoremelor, Kreisel obține o estimare pentru prima schimbare de semn al lui $\pi(n)$—$\mathrm{li}(n)$ (cel puțin pentru $n \leqslant 10^9$, $\pi(n) < \mathrm{li}(n)$) iar următoarea schimbare de semn la un loc $> n$; și margini pentru N, ca și gradele lui p_i și q_i în $\Sigma_1^N(p_i(x_1, ..., x_n)/q_i(x_1, ..., x_n))^2$ în termeni de n și gradele lui p și q (independent de coeficienții lui p și q). Dacă ne dăm osteneala să efectuăm reformularea în mod explicit, aceste margini pot fi obținute automat; Kreisel folosește raționamente intuitive pentru ca să abrevieze procedeul. Aplicarea terțului exclus în ipoteza lui Riemann intervine în demonstrația lui Littlewood, iar Kreisel poate găsi un enunț aritmetic (x) $A(x)$, A decidabil, echivalent cu ipoteza lui Riemann. $\left(\zeta(s) = \Sigma n^{-s},\ s = \sigma + it\colon\ \zeta(s) \neq 0,\ \text{cînd } \sigma > \frac{1}{2}\right)$ („Proc. Dutch Academy", Ser. A, 55, 1952, pp. 337—338): pentru toți n,

zerourile cu parte imaginară (pozitivă) $< n + p(n)$ sînt situate în banda $|\sigma^{-\frac{1}{2}}| < 1/(n + p(n))$, $p(n)$ fiind recursiv.

Demonstrațiile de consistență dau de asemenea o clasificare naturală a demonstrațiilor dinăuntrul sistemului formal al teoriei numerelor după diferite grade de complexitate. În genere, consistența tuturor demonstrațiilor cu un număr determinat de cuantori se poate demonstra printr-o demonstrație cu mai mulți cuantori, iar complexitatea unei demonstrații se măsoară prin numărul cuantorilor din cadrul formulelor pentru inducție (într-adevăr, fiecare demonstrație poate fi transformată astfel încît să survină o singură inducție).

Rezultatul metamatematic cel mai binecunoscut din teoria mulțimilor este demonstrația lui Gödel că dacă axiomele teoriei mulțimilor sînt consistente, atunci și ipoteza generalizată a continuului este consistentă. Acesta este singurul rezultat fundamental obținut în problema continuului, formulată de Cantor în 1883 (*Opere*, p. 192). El ne ajută să clarificăm ideea noastră de mulțime, oferindu-ne un fel de model minim al teoriei mulțimilor, în care axioma alegerii și ipoteza generalizată a continuului, precum și o axiomă de categoricitate sînt toate adevărate.

Dat fiind caracterul destul de special al modelului lui Gödel, pare foarte plauzibil că există alte modele în care ipoteza continuului este falsă. Gödel (1947) și anterior Luzin (1935) au presupus, amîndoi, că ipoteza continuului a lui Cantor este independentă de axiomele teoriei mulțimilor și de fapt falsă, conform sensului „adevărat", încă neelucidat, al termenului de mulțime. Aceasta arată de ce încercările de a demonstra sau infirma ipoteza continuului pe baza axiomelor uzuale ale teoriei mulțimilor sînt zadarnice. Sîntem siliți să considerăm sistemul ca un întreg, ca și în cazul demonstrației independenței postulatului lui Euclid. Luzin sugerează să încercăm să găsim un model pentru axiomele uzuale ale teoriei mulțimilor în cadrul căruia ipoteza continuului a lui Cantor este falsă însă $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

§ 5. LOGICA SIMBOLICĂ ȘI MAȘINILE DE CALCUL

În partea a II-a vom trata cîteva aspecte speciale ale domeniului situat între logica matematică și construirea și folosirea mașinilor moderne de calcul. În paragraful de față vom arunca o scurtă privire generală, pentru ca să menționăm și direcții de lucru care nu vor fi considerate în partea a II-a. Vom menționa de asemenea alte articole și cărți întîlnite. Bibliografia este atît de vastă, încît nici nu vom încerca să fim exhaustivi, într-un sens sau altul. În particular, numeroase lucrări interesante în acest domeniu au apărut în Uniunea Sovietică, dar regretabila necunoaștere a acestor lucrări de către autor îl va împiedica să se refere la ele.

Primul domeniu este aplicarea algebrei booleene sau a calculului propozițional la reprezentarea și proiectarea circuitelor electronice. Ideea fundamentală este foarte simplă. Deoarece orice releu (lampă, tranzistor, miez magnetic etc.) are, de regulă, două stări — „deschis" și „închis", sau „sus" și „jos", „da" și „nu", le putem lua ca mulțimea universală și mulțimea vidă, sau adevăratul și falsul. Funcția unei părți de bază este de a da o ieșire pentru deschis sau închis, depinzînd, într-un mod determinat, de intrări. De exemplu,

un tip de element de bază are două intrări iar ieşirea este închisă, dacă şi numai dacă ambele intrări sînt închise. Aceasta corespunde, desigur, conectivului logic „şi", sau operaţiei de intersecţie a mulţimilor. Interpretarea de mai sus a fost atribuită de multe ori unui articol din 1938 al lui Shannon, dar de curînd s-a stabilit că ea a fost propusă anterior în Uniunea Sovietică şi Japonia.

Datorită interpretării, problema simplificării circuitelor se reduce la una de simplificare a expresiilor booleene sau a expresiilor din domeniul funcţiilor de adevăr. În logica matematică este cunoscut faptul că există un procedeu teoretic de verificare a echivalenţei a două expresii booleene oarecari şi, ca atare, şi un procedeu de aflare a celei mai scurte expresii echivalente cu o expresie dată. Necesităţile de ordin aplicativ reclamă acum nu numai un procedeu posibil din punct de vedere teoretic, ci şi unul practic fezabil. Laboratorul de Calcul de la Harvard, Quine, Veach şi mulţi alţii au elaborat lucrări în acest domeniu. O trecere în revistă a lucrărilor întreprinse se află în M. Phister *Logical Design of Digital Computers*, 1958. Totuşi sîntem departe de a dispune de procedee de simplificare într-adevăr satisfăcătoare.

Reprezentarea este acceptabilă numai dacă facem abstracţie, în cazul circuitelor cu contacte, de elementul timp. Deşi această abstracţie este utilă, proiectantul este pus de multe ori în faţa unor probleme care implică elementul timp. În acest mod sîntem conduşi la problema mai generală a reprezentărilor simbolice ale maşinilor de calcul. Cap. X, mai jos, se ocupă de această problemă generală. În acest domeniu se pare că avem nevoie, în locul algebrei booleene obişnuite, de funcţionale booleene secvenţiale sau de funcţionale propoziţionale recursive. Studiul abstract al structurii maşinii dă de asemenea noţiunea de automat finit. Există o carte editată de Shannon şi McCarthy care se intitulează *Automata Studies* (1956). Pentru acest domeniu al „maşinilor secvenţiale" avem diferite limbaje echivalente. De exemplu, formalismul algebric al evenimentelor regulate, limbajul reţelelor logice, aritmetica recursivă restrînsă, formularea lui Huffman („Journal of Franklin Institute", 1954), cea a lui Mealy, cea a lui Moore, cea a lui Rabin şi Scott („IBM Journal of Research and Development", **3** nr. 1, 1959, cf. şi articolul lui Shepherdson în aceeaşi publicaţie), precum şi formularea din cap. X, mai jos. Probabil că aceste formulări echivalente sînt interesante în măsura în care pentru anumite ţeluri particulare este mai eficientă o formulare sau alta.

De asemenea, este de dorit să studiem formalisme mai slabe sau mai tari decît acestea. Studiul unui sistem simbolic mai restrîns ne poate da mai mult cu privire la unele subclase de circuite electrice. Un sistem mai larg care conţine formule nerealizabile prin circuite poate oferi un cadru mai suplu pentru enunţarea condiţiilor ce urmează să fie satisfăcute de circuitele pe care le construim. Strînsa analogie dintre anumite clase de circuite electrice şi anumite sisteme de logică simbolică ne determină să ne aşteptăm la avantaje reciproce de pe urma studiului comparativ al acestor două domenii: rezultatele obţinute mai direct într-unul din ele se pot traduce în rezultate semnificative în celălalt.

Timpul intervine însă, deoarece logica o realizează elementele fizice. În plus, elementele de întîrziere sînt introduse adesea în mod deliberat şi ele recurg la ciclurile posibile. Dacă ne abţinem de la folosirea ciclurilor, atunci se poate întrebuinţa destul de bine o teorie a funcţiilor de adevăr, uşor extinsă pentru a putea opera cu întîrzieri. Pe de altă parte, dacă admitem cicluri

sau conexiuni inverse, domeniul devine cu mult mai complicat. În conformitate cu limbajul diagramelor care se folosește la rețele, o rețea bine formată este un rezultat care se obține prin conectarea repetată a extremităților într-o manieră arbitrară, pornind de la rețele de bază care realizează funcții de adevăr (de exemplu, funcția bară) și o unitate de întîrziere, cu condiția ca fiecare ciclu să conțină cel puțin o întîrziere. Se cunosc exemple de rețele realizabile fizic, dar care nu sînt bine formate în conformitate cu această definiție.

O metodă de studiu a unei mașini sau a rețelei corespunzătoare constă în a deosebi elementele de intrare de elementele interne și de a considera fiecare element intern ca realizînd o funcțională ce depinde de t, cît și de funcțiile de intrare realizate de elementele de intrare. Deoarece un organism automat este determinat de starea trecutului său imediat (iar în cazul „elementelor de ieșire" de care deocamdată, prin convenție, facem abstracție, este determinat și de starea sa prezentă), vom studia o anumită clasă de funcționale primitiv recursive, care realizează trecerea de la un număr fix de funcții de intrare și variabila temporală la mulțimea {0, 1} sau {adevăr, fals}. Astfel, în cazul unei mașini cu m elemente de intrare și n elemente interne, comportarea este determinată de n asemenea funcționale, pe care le putem denumi funcționale booleene secvențiale.

Dacă ne referim la o anumită mașină care are de rezolvat o problemă particulară, atunci nu este necesar să considerăm și funcțiile de intrare. Programul și datele sînt introduse inițial în mașină, astfel încît intrarea originară poate fi considerată ca fiind starea internă inițială. Dacă ne referim la întregul istoric al mașinii, iarăși pare natural să concepem mașina ca o colecție de diferite realizări, fiecare dintre ele fiind o transformare independentă de intrare. Pe de altă parte însă, este posibil să introducem într-o mașină elemente de învățare iar părțile unei mașini, de exemplu, blocul aritmetic sau memoria, pot interacționa la diferite momente de timp. Acești factori reclamă studiul cazului mai general, care ia în considerare nu numai stările interne, ci și efectele intrărilor la diferite momente de timp.

Mașinile fixe determină o clasă interesantă de funcționale primitiv recursive. Poate că este de dorit să dăm o caracterizare mai explicită a acestei clase. De exemplu, am putea căuta pentru fiecare număr dat de intrări o listă finită de funcționale primitiv recursive, pe baza căreia să putem defini explicit toate funcționalele din clasa sus-menționată și numai pe ele. Sau, în general, dacă încercăm să găsim o clasă nu prea artificială de formule $F(i_1, \ldots, i_m, t)$, care să ne dea toate aceste transformări și numai pe ele, întîmpinăm o anumită complicație, pentru că adevărata natură a mașinilor ne împiedică să considerăm o mașină ca fiind guvernată de stările ei din viitor, și, în consecință, nu trebuie să folosim variabile sau termeni ale căror valori nu sînt legate de t, prezentul. Desigur că problema este strîns legată de problema convertirii definițiilor recursive în definiții explicite, dar procedurile standard pretind formalisme care pentru țelurile noastre sînt prea greoaie.

Ținînd seama de necesitatea de a lega pe t un interes deosebit îl prezintă cuantorii restrînși (cu domeniu de variație restrîns). De fapt, pentru noi este mai natural să enunțăm condițiile pentru circuite nu în terminologia funcțiilor recursive, ci în terminologia întregului istoric trecut, folosind deci cuantori restrînși. De asemenea ar fi de dorit să obținem rezultate pentru un limbaj

cu cuantori restrînși din rezultatele logice pentru sistemul corespunzător al aritmeticii cu cuantori lipsiți de restricție.

De exemplu, în volumul întîi al lui Hilbert și Bernays este dată o procedură de decizie pentru următorul sistem L_1 de aritmetică (care este foarte slab): formularea uzuală a sistemului cu constanta zero, funcția succesor, variabile numerice, egalitate, relația „mai mic decît", funcțiile de adevăr și cuantori. Elgot și Wright au reușit să arate că acest limbaj este inadecvat pentru reprezentarea comportării mașinilor. Raționamentul lor este următorul. În virtutea procedurii de decizie, rezultă că pentru orice formulă $F(t)$ din acest limbaj avînd ca unică variabilă liberă t, putem găsi un număr finit de segmente de numere, astfel încît $F(t)$, dacă și numai dacă t aparține unuia dintre aceste segmente. În particular, transformarea independentă de intrare „$F(t)$, dacă și numai dacă t este par" nu se poate exprima în acest limbaj. Dar transformarea aceasta poate fi realizată printr-un circuit. Dacă L_2 este limbajul care se obține din L_1 adăugînd variabile de predicate monadice (predicate de un argument), atunci L_2 este, de asemenea, inadecvat pentru reprezentarea transformărilor mașinii. Totuși subclasa de transformări care se pot exprima în L_2 formează o clasă naturală. De exemplu, în L_2 putem exprima condiții ca „i a fost activă cel puțin (exact, cel mult) de 5 ori".

O extindere L_2 a formalismului de mai sus se poate obține dacă adăugăm relația de congruență modulo un număr natural constant. Aceasta ne dă toate transformările independente de intrări.

Să presupunem acum că L_3 s-a obținut din L_2 adăugînd adunarea. În acest caz este binecunoscut că dacă omitem din L_3 variabile de predicate monadice rezultă un sistem decidabil. De asemenea, este bine cunoscut că L_3 este indecidabil. În limbajul L_3 putem obține formule fără cuantori lipsiți de restricție, care nu sînt realizabile cu ajutorul mașinilor. Iată un exemplu de asemenea formulă:

$F(t)$, dacă și numai dacă $(Ex)_0^t\ ((x + x = t \vee x + x + 1 = t)\ \&\ I(x))$.

Pentru a realiza această formulă, trebuie să păstrăm în memorie istoricul lui I de la t_0 la $2t_0$, în ipoteza că vrem să obținem un rezultat corect pentru perioada de la $2t_0$ la $4t_0$. Deoarece t poate crește indefinit, nici o memorie fixă predeterminată nu poate realiza acest lucru. Fiind dată o mașină cu N elemente interne, ea poate înmagazina la fiecare moment dat cel mult 2^N unități de informație (biți) și nu poate furniza valorile lui F pentru $2(2^N + 1) - 4(2^N + 1)$.

Aceasta nu trebuie să ne împiedice să utilizăm formalismul L_3 pentru studiul transformărilor mașinii, în special atunci cînd avem o procedură efectivă pentru a separa acele expresii $F(t)$, care sînt realizabile. De exemplu:

$$(Ea)_0^t\,(Eb)_0^t\ \ (t = am + bn),\ \text{dacă și numai dacă}$$

$$(Ek)_0^t\,(x \equiv k\ (\mathrm{mod}\ m)\ \&\ k \equiv t\ (\mathrm{mod}\ n)).$$

Intuitiv, partea stîngă ni se pare mai ușor de realizat, deoarece sîntem mai familiarizați cu adunarea decît cu congruențele. În general, adesea se folosesc formule $F(t)$ din limbaje mai bogate pentru a preciza care anume circuite sînt preferate. Uneori ni se pare natural să enunțăm condiții pentru circuite cu simboluri funcționale independente și dependente (elemente de intrare și interne) asociate într-o manieră arbitrară („definiții implicite"). De fapt, folo-

sim adesea limbajul uzual, care este foarte bogat,pentru a enunța condițiile. Dacă însă ne interesează condițiile implicite, apoi, în afară de problema separării efective a formulelor realizabile $F(t)$, se mai pune și problema separării acelor formule $H(i, F, t)$, pentru care $F(t)$ poate fi explicitat în termenii lui i și t. Aceasta se adaugă la problemele obișnuite ale analizei (fiind dat un circuit, să se găsească formula corespunzătoare) și sintezei (fiind dată o formulă, să se găsească circuitul corespunzător). Deci, în orice caz, pare de dorit să stabilim clasele de formule care au aceeași extensiune ca și clasa circuitelor, în sensul tare, astfel încît în ce privește transformările definite de ele, toate problemele de analiză și sinteză să admită soluții efective. Printre aceste clase, sînt preferabile cele care sînt mai apropiate de posibilitățile noastre naturale de scriere a condițiilor.

Pare clar că diferite formalisme sînt suficiente pentru a reprezenta structura logică a calculatoarelor. Memoriul lui Burks și Copi (Journal Franklin Institute, 1956) studiază, în mod sistematic, un exemplu idealizat.

În ce privește circuitele care cuprind elemente de întîrziere, se mai pune, desigur, și problema simplificării și a eficienței. În această privință se cunosc mai puține rezultate decît în problema corespunzătoare pentru circuitele staționare sau expresiile booleene corespunzătoare lor.

O chestiune legată de eficiența elementelor logice a fost studiată de către Dunham și colaboratorii săi („IBM Journal", 1957 și 1959). Ei arată că mașinile cu destinații multiple oferă economie atît în ce privește numărul blocurilor elementare, cît și în ce privește asortimentul lor. Să considerăm, de exemplu, funcția booleeană

$$w = yz + x'y'z + xy'z';$$

Dacă o intrare este „deplasată" (biazată), adică fixată astfel încît totdeauna este deschisă sau totdeuna închisă, atunci putem obține diferite funcții cu două intrări. De exemplu, dacă x este totdeauna 1, atunci w este deschis, dacă și numai dacă atît y, cît și z sînt amîndouă închise sau amîndouă deschise. Dacă intrările x și z sînt „duplicate", adică ambele intrări au întotdeauna același semnal, atunci obținem că w este yz. S-a propus ca eficiența unui element logic să fie considerată mulțimea subfuncțiilor pe care le realizează după biazarea, sau duplicarea intrărilor sale. De exemplu, dacă pentru motive de economie și siguranță este dezirabil să construim o mașină din blocuri relativ standardizate, atunci mașinile cu destinații multiple prezintă interes. S-a propus, de asemenea, ca elementele redundante pentru destinații multiple să fie folosite pentru mărirea securității.

Automatele finite, care constituie o idealizare a mașinilor existente, diferă de modelul considerat de către Turing prin aceea că într-o mașină Turing banda este potențial infinită. Aceasta ne sugerează conceptul de automat în creștere sau potențial infinit (a se vedea mai departe cap. VIII și X).

Problema clasificării mașinilor crescătoare și a punerii în evidență a unor subclase interesante pentru anumite țeluri particulare se pare că aruncă o lumină deosebită asupra diferitelor probleme de principiu cum ar fi teoria generală a programării sau legătura generală dintre mașinile cu destinație specială și programele corespunzătoare pentru mașinile cu destinație universală. Avînd în vedere mai ales atrăgătoarea teorie a lui Turing, este cît se poate de firesc să ne așteptăm că pentru multe țeluri o teorie a mașinilor care

să cuprindă mai multe informații va apare numai dacă se va folosi terminologia mașinilor crescătoare și nicidecum aceea a mașinilor fixe. De exemplu, C.Y. Lee a propus o măsură teoretică a complexităților programelor pe baza pașilor simpli din programul mașinii *W* (cu privire la aceasta, a se vedea § 4, cap VI).

În materie de programare, problema unui limbaj satisfăcător se pune în mod acut. Codarea automată pretinde un limbaj bogat și suplu, însă suficient de exact pentru mecanizare. Aceasta se leagă de pretențiile logicienilor de a construi limbaje formale și ne aduce aminte de visul limbajului universal al lui Leibniz.

În prezent, pentru diferite mașini se scriu diferite programe interesante care adesea nu pot fi utilizate pentru alte mașini. Mai mult, nu este ușor să explici un program pentru o mașină dată unei persoane care este familiarizată cu alte mașini. În consecință, acumularea rezultatelor comune multor științe este întîrziată în mare măsură. De curînd, s-au propus limbaje comune pentru programe (*Communications of Association for Computing Machinery*, 1959). Desigur că este de dorit ca programatorii să poată lucra pe baza cunoașterii existente, așa cum este în matematică.

În multe privințe, utilizarea mașinilor este rămasă în urmă în raport cu construirea lor. De exemplu, s-a observat că nu sînt suficiente probleme pentru a da de lucru noilor mașini puternice STRETCH, în sensul unei ocupări depline. În afară de folosirea mașinilor în fizică și inginerie, ele au mai fost utilizate în meteorologie, astronomie dinamică, cristalografie și economie. Alte posibilități există în analiza operațională, recunoașterea formelor, traducerea mecanică, în instruire programată și demonstrarea mecanică a teoremelor matematice.

S-au scris programe pentru jocul de dame și jocul de șah. Ar fi mult mai ușor să determinăm o mașină să joace bridge destul de bine, deoarece în jocul de bridge analiza datelor cunoscute ocupă un loc mai mare decît anticiparea viitorului. Poate că jocul cel mai dificil de învățat pentru mașină ar fi jocul sportiv.

Un efort mare s-a acordat traducerii mecanice, deși rezultatele obținute pînă acum nu par să fie încurajatoare, în orice caz, aceasta este părerea lui Bar-Hillel care a fost primul care a început să lucreze în acest domeniu. În 1954 (*American Scientist*, vol. 42), el a publicat o dare de seamă cu concluzii foarte optimiste. Recent însă, opiniile sale au început să devină mai rezervate. Problema este atît de complicată, încît numai cei care au lucrat la ea pot să-și dea seama, în mod convenabil de posibilități și dificultăți. Rezultatele cunoscute în logica matematică par să sugereze că traducerea mecanică va deveni mai realizabilă, dacă, în prealabil, se va ajunge la standardizarea limbajului natural. Ceea ce înseamnă că traducerea, de exemplu, a romanelor și poemelor nu este de așteptat în prezent și că, în primul rînd, eforturila trebuie să se concentreze asupra literaturii științifice. Se pare că nu este cu totul nerealist să se lucreze la un vocabular standard și o gramatică standard pentru lucrările științifice care urmează să fie scrise în diferitele limbi naturale. De exemplu, putem încerca să îmbogățim și să-l facem mai lax simbolismul logicii matematice pentru a obține un limbaj parțial mai ușor utilizabil în cadrul fiecărui limbaj natural.

Firește că pe logicieni îi preocupă posibilitatea de a demonstra teoremele cu ajutorul mașinilor. Această problemă noi o discutăm în cap. IX. Problema apare a fi una de simulare a activității mentale de descoperire a demonstrațiilor. Formalizarea determină ca simularea mecanică să fie mai ușoară deoarece strategiile utilizate pentru descoperirea demonstrațiilor într-un sistem formal sînt relativ mai simple, iar axiomatizarea oferă o stație intermediară între mașini și intuiție. În privința utilizării mașinilor ca auxiliare pentru descoperiri matematice problema fundamentală este de a găsi mijloace pentru a înlocui dificultatea calitativă cu complexitatea cantitativă. Trebuie să sărim prăpastia dintre matematica pe care o facem și cunoștințele noastre asupra felului în care o facem. Lucrările de psihologia invenției sau asupra raționamentului plauzibil, ca cele ale lui Polya și altora sînt relevante, dar probabil că sînt prea avansate pentru etapa actuală a posibilităților mașinilor pentru a putea fi utilizate în mod efectiv. Iluminarea este ceva care prin definiție înlătură imitarea; or, este cu totul nerezonabil să determinăm mașinile să producă lucruri întîmplătoare, deoarece ceea ce fac ele, deși imprevizibil, este foarte improbabil să coincidă cu acel tip special de mișcare imprevizibilă care este iluminarea.

Motivul pentru care există atît de multe lucruri pe care le poate face un om, dar nu le poate realiza o mașină, cu toată exactitatea și viteza care îi sînt proprii, constă, fără îndoială , în lipsa de suplețe a mașinii. Iată de ce prezintă un mare interes posibilitățile mașinilor de a învăța. În acest domeniu un mare pericol îl prezintă speculațiile goale. Un experiment rudimentar însă precis a fost comunicat de către Friedberg („IBM Journal", 1958).

În ce privește compararea gîndirii noastre cu mașina s-a discutat mult. Un eseu deosebit de interesant este eseul lui Turing asupra „jocului de-a imitația", adică asupra posibilităților de a învăța o mașină să se dea drept om („Mind", 60, 1950).

Nu este cu totul limpede cum se leagă binecunoscutele rezultate cu privire la problemele rezolvabile de limitările teoretice ale mașinilor. De exemplu, nu s-a negat că se pot proiecta mașini care să demonstreze cum că cutare sau cutare probleme sînt recursiv nerezolvabile. Deși se susține că am putea imagina un om rezolvînd o mulțime recursiv nerezolvabilă de probleme, nu este ușor să dăm o semnificație definită unei asemenea situații imaginate. Este ca și cum am imagina o minte umană astfel constituită, încît pentru fiecare propoziție dată din teoria numerelor ea să poată răspunde dacă propoziția respectivă este sau nu o teoremă. A spune că este logic posibil să avem o asemenea minte, dar logic imposibil să avem o asemenea mașină nu înseamnă a spune mare lucru.

Într-o direcție cu totul diferită de problemele menționate pînă acum, von Neumann, în lucrarea sa de logică probabilistică, *Probabilistic Logics* (note de curs 1952 retipărite în culegerea „Automata Studies", 1956), propune o posibilitate de a construi o mașină mai sigură decît componentele ei. Această lucrare este explicată în ultimul capitol al cărții lui Tsien *Engineering Cybernetics* (tradusă în limba chineză, 1958). Mai recent, Moore și Shannon („Journal Franklin Institute", **262**, 1956), Kochen („IBM Journal, **3**, 1959) și alții au continuat această lucrare și au generalizat-o. În paragraful următor redăm, pe scurt, rezultatele lui von Neumann.

§ 6. CONTROLUL ERORILOR LA MAŞINILE DE CALCUL

Este fapt că în operaţiile maşinilor de calcul intervin erori. Erorile sînt de diferite speţe şi pentru fiecare speţă în parte avem diferite remedii. Erorile pot proveni fie de la factori intrinseci metodei de calcul, fie de la factori umani sau fizici exteriori maşinii, fie de la componentele şi circuitele din interiorul maşinii. Pentru a controla erorile, putem încerca să prevenim apariţia lor, înlăturînd anticipat cauzele posibile sau putem încerca să detectăm şi să corectăm erorile după ce ele au apărut.

Există cel puţin următoarele feluri de erori:

(a) erori datorate datelor de intrare eronate, ca rezultat al unor programe greşite sau al unei codări neîngrijite;

(b) erori datorate comunicării eronate a adevăratelor rezultate oferite de maşină;

(c) erori datorate semnalelor perturbatoare care intră în maşină din exterior, fie de la sursa de alimentare cu energie, fie din cauza interferenţei cu alte maşini electrice aflate în vecinătate (radar, maşini cu radiaţii X de înaltă putere etc.);

(d) erori datorate unor zgomote întîmplătoare;

(e) cele provenite din rotunjire;

(f) cele datorate aproximării sau trunchierii.

(g) cele datorate eşuării componentelor (avarii);

(h) cele datorate legăturii eronate cu circuitele.

Dintre aceste opt specii, despre (c), (d) şi (h) se poate spune prea puţin. De exemplu, dacă montarea circuitelor este necorectă, trebuie să găsim adevărata natură a erorii şi să modificăm montajul. Pentru a evita erorile (c), se poate izola maşina de calcul, alimentînd-o de la o sursă locală (grup generator). Pentru a evita interferenţa cu alte radiaţii maşina poate fi mutată, aşezînd-o într-un loc ferit de influenţe.

În ce priveşte estimarea, prevenirea, detectarea şi corectarea erorilor de celelalte genuri, putem spune ceva mai mult.

Erorile de la intrare şi ieşire sînt în mare măsură erori comise de om şi nu au nimic de-a face cu maşina. Întrucît, atunci cînd efectuează proceduri mecanice, omul este mai supus erorii decît maşina, programarea, codificarea şi copierea au devenit sursele cele mai frecvente de erori chiar şi în etapa actuală a dezvoltării maşinilor.

Se pot adopta anumite precauţii evidente, cum ar fi citirea de probă şi repetările ei. De exemplu, benzile trebuie perforate de mai multe ori, de preferinţă de către persoane diferite, iar apoi confruntate între ele. O atare procedură se numeşte verificare.

În general, în măsura posibilului, datele de la intrare e mai bine să fie codate în mod automat. De exemplu, de cîte ori este posibil, vom folosi subrutine preexistente, care au fost supuse verificării şi despre care se ştie că sînt corecte, independent de problemele particulare la care se aplică . Sau dacă maşina urmează să analizeze rezultate experimentale provenite de la diferiţi indicatori, trebuie să dispunem de instrumente de convertire cifrică pentru ca datele înregistrate de ele să poată fi transmise direct maşinii.

Pentru a verifica corectitudinea programului, de obicei determinăm mașina să imprime conținuturile unor rubrici la diferite momente ale procesului de calcul, astfel încît rezultatele pot fi comparate cu cele obținute prin calcul manual (denumit adesea „afișarea memoriei"). O altă metodă constă în a opri mașina la anumite puncte, astfel încît operatorul să poată controla vizual conținutul unor registre. A treia metodă rezidă în tipărirea operațiilor succesive pe care le realizează mașina (operație denumită adesea „urmărire"). Întregul proces se numește adesea „punere la punct".

O procedură de verificare care prezintă un anumit interes teoretic este aceea de a utiliza coduri speciale. Ele sînt utile nu numai pentru detectarea și corectarea erorilor în benzile de intrare, ci contribuie și la controlul erorilor care intervin în cursul operațiilor mașinii.

Principiul de bază al codurilor detectoare de erori și al codurilor corectoare de erori constă în introducerea unei redundanțe, astfel încît atunci cînd redundanța standard lipsește, știm că a survenit o eroare, ba chiar și ce fel de eroare anume. Astfel, de exemplu, după cum se știe, dacă fiecărui număr cu patru cifre binare îi adăugăm o a cincea, care este 0 sau 1, după cum suma primelor patru este impară sau pară, putem detecta prezența unei erori unice. Acesta este un control al parității. Un alt cod bun pentru detectarea unei singure erori este codul $3n + 2$. Acest cod face uz de faptul că în reprezentările prin cinci cifre ale lui $3n + 2$, unde $n = 0,1,\ldots 9$, două reprezentări oarecare diferă cel puțin prin două cifre binare.

Dacă vrem să utilizăm un număr mare de cifre redundante sau suplimentare (binare sau de alt fel), putem detecta și prezența unor erori duble, triple etc., ba putem chiar determina exact care anume cifră sau care anume cifre sînt eronate.

De exemplu, se poate elabora un cod corector de erori izolate în modul următor (vezi Hamming, *Bell Telephone Tech. Monograph* 1757, 1950). La fiecare număr cu patru cifre binare, adăugăm trei cifre binare noi (a cincea, a șasea și a șaptea) pentru a servi ca teste de paritate: a cincea cifră este 1 sau 0, după cum suma primei, celei de a doua și celei de a patra este sau nu impară; a șasea cifră este 1 sau 0 în raport cu imparitatea sumei care se obține adunînd prima, a treia și a patra, iar a șaptea este 1 sau 0 în raport cu suma obținută adunînd a doua, a treia și a patra. Să considerăm numărul zece, a cărui reprezentare binară este 1010; atunci reprezentarea sa în codul dat va fi 1010101. Dacă, în mod eronat, în locul celui de al doilea zero apare scris 1, atunci avem 1110101. Deoarece suma obținută adunînd prima, a doua, a patra și a cincea cifră nu este pară, rezultă că una dintre ele este eronată. Deoarece suma obținută adunînd prima, a treia, a patra și a șasea este pară, iar noi admitem o eroare unică, rezultă că aceste cifre trebuie să fie toate corecte. Deci sau este greșită a doua cifră, sau este greșită a cincea. Dacă admitem, în plus, că cifrele care servesc ca teste de paritate sînt totdeauna corecte, atunci concluzia este că a doua cifră este greșită. Dacă nu facem această ipoteză, putem continua astfel. Deoarece suma obținută adunînd a doua, a treia, a patra și a șaptea este impară, rezultă că una dintre aceste cifre este eronată. Deci, întrucît am văzut că sau a doua, sau a cincea este eronată, iar ipoteza de bază este aceea a erorii unice, urmează că eroarea este exact la cifra a doua. Nu este greu de arătat că acest cod funcționează întotdeauna, dacă presupunem corectitudinea cifrelor care servesc ca teste de paritate.

Dacă două numere cu zece cifre sînt înmulțite la o mașină de birou care poate opera numai cu numere formate din zece cifre, atunci produsul obținut poate avea numai zece cifre, în timp ce dacă lucrăm manual, răspunsul ar putea conține douăzeci cifre. Eroarea introdusă prin neglijarea ultimelor zece este eroarea de rotunjire. Există diferite metode de rotunjire. Cea mai simplă constă în omiterea tuturor cifrelor dincolo de locul al zecelea. O altă metodă aplicată în mod uzual constă în a determina mai întîi dacă cifra imediat următoare (adică din locul al unsprezecelea) este mai mică decît jumătatea bazei, după care ea se omite sau, dacă răspunsul este negativ, i se adaugă ultimei cifre (a zecea) 1. Cu alte cuvinte, adăugăm jumătatea bazei la locul următor și aplicăm apoi rotunjirea simplă. A treia metodă constă în a calcula, să zicem, nouă cifre și a scrie întotdeauna jumătatea bazei la al zecelea loc (ultimul). Această rotunjire este totuși nedubioasă, deși erorile pot varia în limite mai mari.

Problema erorilor de rotunjire se pune în mod serios pentru mașinile de calcul, deoarece acestea execută succesiv un mare număr de operații, așa încît erorile provenite din rotunjiri se acumulează. Un exemplu simplu, care face uz de metoda omiterii tuturor cifrelor, începînd de la un anumit loc, poate servi la clarificarea acestei chestiuni.

Să presupunem că avem de efectuat 10^8 înmulțiri de numere, fiecare cu zece cifre în baza zece, iar capacitatea fiecărei unități din mașină este de zece asemenea locuri. Produsul a două numere de 10 locuri va avea în general 20 locuri și trebuie să rotunjim ultimele zece astfel încît produsul înmagazinat în memoria mașinii va diferi de produsul exact cu o fracție mai mică decît 1 (uneori aproape de 1). După 10^8 înmulțiri, eroarea datorită rotunjirilor poate să ajungă teoretic să fie de ordinul lui 10^8, așa încît dacă produsul are zece locuri, nu mai avem certitudinea decît pentru primele două, a treia putînd fi eronată cu 1. În realitate, erorile de rotunjire sînt în general distribuite aleatoriu, în intervalul (0,1), așa încît, în conformitate cu statistica, putem presupune că eroarea totală pentru 10^8 înmulțiri este exact $\sqrt{10^8} = 10^4$. Dar aceasta nu este corect, deoarece erorile de rotunjire în porțiunile de la început sînt de obicei „amplificate", datorită operațiilor din porțiunile următoare, astfel încît e mai sigur să spunem că, în majoritatea cazurilor, cantitatea de eroare este mai mică decît 10^6 sau 10^7.

Pentru reducerea erorilor de rotunjire nu prea putem face mare lucru; cel mult să mărim capacitatea mașinii sau să facem anumite schimbări în tehnica de calcul, cum ar fi procedurile cu dublă precizie. În linii mari, putem spune că o procedură cu dublă precizie, se aplică sumei unor produse, să zicem m: în loc de a rotunji fiecare produs, adunînd apoi, calculăm și adunăm produsele exacte, iar rotunjirea se execută după aceea.

Erorile de rotunjire pot să fie sau estimate riguros sau estimate probabilistic. În orice caz, o dată ce avem estimații destul de exacte și apropiate, erorile devin mai puțin periculoase.

Problema alegerii unor metode de rotunjire este uneori îngreunată de anumite considerente psihologice. De exemplu, dacă facem uz de unele rotunjiri subtile în cazul unei mașini care calculează statele de plată, persoanele salariate pot să nu înțeleagă motivația rațională a rotunjirii și să ridice obiecții. Atunci este neconvenabil dacă adăugăm în locul jumătății bazei un număr întîmplător a cărui valoare așteptată este jumătatea bazei: să zicem în loc

de a aduna 5 la a unsprezecea cifră înainte de rotunjire, adăugăm un număr întîmplător dintre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; atunci unii vor găsi că metoda este inacceptabilă, mai ales cei care vor primi mai puțin decît media!

Erorile de trunchiere sau de aproximare sînt foarte asemănătoare cu cele de rotunjire, dar sînt mai fundamentale sau mai „statice". Erorile de trunchiere se referă la datele inițiale și rezultatele finale ale calculului, în timp ce erorile de rotunjire se introduc la fiecare pas al procesului de calcul.

Problemele matematice inițiale cuprind, în general, operații transcendente și funcții implicite. Pentru a aplica calculatoarele cifrice la aceste probleme, trebuie să înlocuim procesele de trecere la limtă prin operații aritmetice elementare de natură finitistă, pe care calculatorul le poate efectua direct. De exemplu, funcțiile definite prin serii infinite pot fi calculate numai dacă omitem toți termenii, cu excepția unui număr finit. Integralele trebuie să fie înlocuite prin sume finite, iar ecuațiile diferențiale prin ecuații cu diferențe finite.

Dacă, în loc de

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

utilizăm o aproximare,

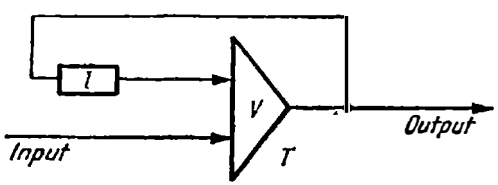
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!},$$

atunci, chiar dacă de fiecare dată calculăm cîte cifre este necesar și nu rotunjim niciodată, tot obținem numai rezultate aproximative.

Pentru estimarea erorilor de aproximare avem mai multe metode. Rezultate foarte apropiate de cele adevărate pot fi obținute, dacă sîntem dispuși să repetăm de mai multe ori variantele aceluiași calcul.

După cum e bine cunoscut, gravitatea erorilor la mașinile de calcul nu se datorează doar numărului mare de operații efectuate, deoarece un număr mare de operații intervin și în alte domenii, cum ar fi operațiile de la telefoane. Dificultatea constă mai curînd în faptul că, practic, fiecare pas este tot atît de important ca și întregul calcul. După cum a arătat von Neumann, aproximativ 30% din pași sînt astfel, încît atunci cînd vreunul din ei este eronat, rezultatul final nu mai poate fi utilizat. Așadar, problema nu este atît de a constata cît de multe erori s-au făcut, ci mai curînd de a constata dacă s-a făcut în general vreo eroare. Aceasta este, desigur, o cerință mult mai tare.

Pentru a ilustra această chestiune, să considerăm un instrument simplu, care constă dintr-un circuit „*sau*" ce cuprinde o unitate de întîrziere:



Presupunem că intrarea este activă sau neactivă la momentul t_0 și niciodată mai tîrziu. Evident, ieșirea va putea fi activă la $t_0 + 1$, $t_0 + 2$, ...

sau neactivă la $t_0 + 1$, $t_0 + 2$, ..., după cum intrarea a fost activată sau nu la t_0.

Să presupunem că circuitul „sau" T are o probabilitate de deranjament ε, care este foarte mică, adică o probabilitate ε astfel, încît sau T este activat, atunci cînd nu trebuie să fie activat, sau că T nu este activat, atunci cînd trebuie să fie activat. Fie acum ρ_i probabilitatea că T nu este activat la momentul $t_0 + i$, deși T a fost activat la momentul t_0. E ușor de văzut că:

$$\rho_1 = \varepsilon,$$

$$\rho_n = (1 - \varepsilon)\,\rho_{n-1} + \varepsilon(1 - \rho_{n-1}) = (1 - 2\varepsilon)\,\rho_{n-1} + \varepsilon.$$

Printr-un calcul elementar, pornind de la aceste egalități recursive și folosind inducția matematică, se stabilește că

$$\rho_n = \frac{1}{2}\,[1 - (1 - 2\varepsilon)^n].$$

Deoarece $(1 - 2\varepsilon)^n \to 0$, cînd $n \to \infty$, rezultă că $\rho_n \to \frac{1}{2}$ cînd $n \to \infty$.

Similar, dacă ρ_i' este probabilitatea că T este activat la momentul $t_0 + i$, dacă T n-a fost activat la momentul t_0, putem de asemenea demonstra că $\rho_n' \to \frac{1}{2}$.

Vedem, așadar, că probabilitatea este exact o jumătate, astfel încît pe termen lung, avem următoarea situație:

1. Dacă intrarea este activată la t_0, ieșirea va fi activată (corect, $1 - \rho_\infty$).
2. Dacă intrarea este activată la t_0, ieșirea nu va fi activată (eroare, ρ_∞).
3. Dacă intrarea nu este activată la t_0, ieșirea va fi activată (eroare, ρ_∞').
4. Dacă intrarea nu este activată la t_0, ieșirea nu va fi activată (corect $1 - \rho_\infty'$).

Cu alte cuvinte, dacă procesul se continuă un timp destul de lung, este aproape la fel de frecvent ca ieșirea să fie sau să nu fie activată, independent de ceea ce s-a întîmplat la momentul de timp t_0. Așadar, ieșirea devine statistic independentă de intrare și mica eroare s-a apropiat de o jumătate. Se cuvine să subliniem că acesta este în realitate cazul cel mai rău. Dacă probabilitatea erorii ar fi aproape de unitate, n-am avea decît să interpretăm rezultatele în sens opus, apropiindu-ne astfel de certitudinea absolută.

Concluzia obținută prin raționament matematic pare să contrazică intuiția noastră, după care după un timp suficient de lung ieșirea desigur că nu va mai fi activată. Această discrepanță provine din cauză că analiza de mai sus nu este adecvată, întrucît ea presupune, implicit, că erorile în diferite direcții sînt egal probabile. Intuitiv însă pare mai plauzibil să presupunem că există o probabilitate mai mare de a nu fi activat atunci cînd e cazul decît de a fi activat atunci cînd nu e cazul. Astfel, dacă presupunem că:

ε_1 este probabilitatea ca T să nu fie activat atunci cînd e cazul,

ε_2 — probabilitatea ca T să fie activat atunci cînd nu e cazul,

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$,

atunci obținem rezultatul intuitiv mai acceptabil, că după un timp suficient de lung circuitul va înceta să mai fie activat.

În orice caz, trebuie să fie clar că probabilitatea deranjamentului se acumulează rapid, atunci cînd numărul operațiilor crește. Deoarece o caracteristică a calculatoarelor de mare viteză este aceea că multe operații sînt realizate succesiv, chestiunea deranjamentelor este, firește, serioasă.

O dată intrările corect introduse în mașină, cauza principală a erorii va fi funcționarea proastă a componentelor: relee, tuburi, tranzistoare, rezistențe și capacități. O metodă firească de reducere a unor atare erori este îmbunătățirea funcționării fidele a componentelor, adică utilizarea unor tuburi mai bune, a unor rezistențe mai bune și mai exacte și așa mai departe. S-a constatat că tuburile cu vid și diodele cu cristal prezintă de aproximativ cincizeci de ori mai multe erori decît rezistențele și capacitățile. De aceea, pentru multe scopuri putem vorbi adesea de deficiențele tuburilor, neținînd seama de altele, întrucît alte deficiențe pot fi discutate similar sau sînt comparativ mai rare.

La fiecare etapă a dezvoltării tehnicii apar numeroase limitări practice a posibilității de îmbunătățire a funcționării fidele a componentelor. De exemplu, miezurile magnetice sînt, în general, mult mai sigure decît tuburile. Apoi se mai poate întîmpla că, prin asemănare cu problema măsurătorilor precise din mecanica cuantică, există o margine dincolo de care este teoretic imposibil să îmbunătățim calitatea componentelor de bază. În orice caz, dacă dorim să reducem eroarea în viitor, trebuie să presupunem o anumită probabilitate de deranjament a componentelor și să încercăm că compensăm aceasta, prin modificări ale construcțiilor. Or, în general, îmbunătățirile componentelor ca și ale sistemului pot, desigur, să se compenseze una pe alta, în ce privește efectul.

Problema îmbunătățirii proiectărilor de sisteme pentru a compensa limitările calității componentelor poate fi considerată ca fiind o problemă de a face ca întregul să fie mai bun decît părțile sale.

Un exemplu de îmbunătățire a construcției este metoda echipamentului dublu pentru compararea circuitelor din anumite calculatoare. Părțile esențiale ale circuitelor aritmetice, și ale controlului se dublează; se obțin, astfel, în mod simultan, rezultate independente, care sînt confruntate. Părțile dublate pot fi de exemplu, în număr de patru: sumatorul algebric, comparatorul, contorul cîturilor și amplificatorul de viteză.

Schema utilizată în aceste calculatoare este tocmai un exemplu de îmbunătățire a fidelității prin dublare. În general, putem construi două sau mai multe mașini care sînt exact la fel și să le determinăm să-și compare rezultatele la fiecare pas sau la un interval de fiecare, să zicem, sută de pași, sau la unii pași cruciali. Este ușor de văzut că teoretic există multe posibilități.

Un singur exemplu va fi de ajuns pentru a ilustra această situație. Să presupunem o mașină cu o probabilitate de deranjament la o operație unică de 10^{-11} și fie că este necesar s-o folosim pentru a rezolva o problemă care pretinde 10^{13} operații. Dacă aplicăm teoria probabilităților, rezultă că vor fi

peste 100 de erori. Aşadar, de fapt maşina nu poate fi folosită. În adevăr, probabilitatea ca maşina că dea un rezultat corect va fi următoarea:

$$\left(\frac{10^{11}-1}{10^{11}}\right)^{10^{13}} = \log^{-1}\left[10^{13}\log\left(1-\frac{1}{10^{11}}\right)\right]$$

$$= \log^{-1}\left[10^{13}\left(-10^{11}+\frac{10^{-22}}{2}-\frac{10^{-33}}{3}+\ldots\right)\right]$$

$$\doteq \log^{-1}(-10^{2}) = e^{-100} \doteq 10^{-43}.$$

Ne propunem acum să folosim trei asemenea maşini, punîndu-le să-şi compare rezultatele după fiecare operaţie în parte procedînd, apoi după cum urmează:

a) dacă toate trei au acelaşi rezultat, continuă calculul fără vreo schimbare;

b) dacă două concordă între ele, dar nu cu a treia, atunci a treia, să-şi schimbe rezultatul în conformitate cu majoritatea, iar apoi toate trei continuă;

c) dacă toate trei rezultatele sînt distincte, calculul se opreşte (Dacă presupunem un limbaj binar, astfel încît răspunsul este totdeauna da sau nu, acest caz nu poate avea loc niciodată).

Maşina nu va produce un rezultat eronat decît la un pas, cel puţin două maşini vor face eroarea simultan, probabilitatea fiind

$$3 \times 10^{-11} \times 10^{-11} - 2 \times 10^{-11} \times 10^{-11} \times 10^{-11} \doteq 3 \times 10^{-22},$$

deoarece avem cu totul 10^{13} paşi, probabilitatea ca să intervină o asemenea situaţie este

$$(1 - 3 \times 10^{-22})^{10^{13}}.$$

Cu alte cuvinte, şansa de a obţine un rezultat corect este copleşitoare.

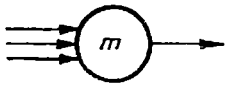
Aici am presupus că circuitele care compară rezultatele după fiecare operaţie nu sînt supuse erorii. Desigur, aceasta nu este realist. Dacă vrem să dublăm sau să triplăm circuitele comparatoare, intrăm în probleme mult mai complicate de evaluare a probabilităţilor. Apoi sîntem nevoiţi să facem faţă problemei de testare a circuitelor de testare, problemei de testare a circuitelor care testează circuitele de testare etc.

În practică, probabil că nu dorim să comparăm la fiecare pas rezultatele diferitelor maşini, iar circuitele comparatoare conţin mai puţine complicaţii, astfel încît problema testării lor este mai simplă decît aceea a testării maşinilor originare.

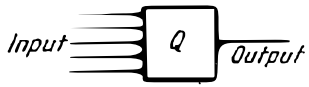
Teoretic prezintă interes investigarea posibilităţilor circuitelor cu autotestare. În restul acestui paragraf vom descrie, în linii mari, unele idei în legătură cu aceasta, pe care le înfăţişează John von Neumann în lucrarea sa *Probabilistic Logics.*

Să considerăm, în primul rînd, elementul zis majoritar, care are trei intrări binare şi o ieşire binară, astfel încît ieşirea este înaltă (deschisă, activată, încărcată etc), dacă şi numai dacă majoritatea intrărilor este înaltă (deschisă,

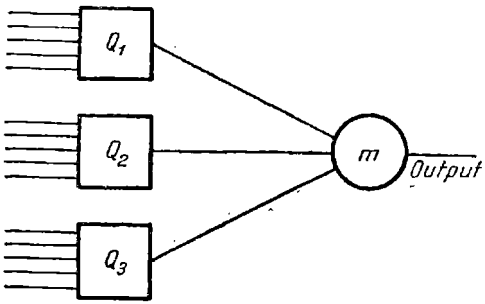
activată, încărcată etc.). În caz contrar ieșirea este **joasă** (închisă, neactivată, descărcată etc.).



Pentru fiecare ieșire a mașinii, considerăm întregul conținut al mașinii care o controlează direct sau indirect:



și realizăm trei copii, conectîndu-le cu elementul **majoritar**:



În consecință, ajungem la trei mașini identice conectate cu un mare număr de elemente majoritare de așa manieră, încît rezultatul final este același ca și rezultatul majorității. Dacă presupunem că majoritatea elementelor nu funcționează niciodată greșit (ceea ce este o ipoteză simplificatoare nerealistă), atunci mașina rezultată va realiza treaba a trei mașini identice cu testare perfectă la fiecare pas. Trebuie însă să observăm că de fiecare dată trebuie să triplăm echipamentul, pentru a avansa cu un singur pas. Cu alte cuvinte, la fiecare pas, triplăm mașina și organizăm votul; apoi continuăm.

Numărul instalațiilor astfel necesare este mult prea mare pentru ca procedeul să prezinte vreun interes practic. De exemplu, fie μ numărul maxim de activări consecutive de la intrări la ieșiri necesare într-un anumit calcul. Să presupunem că μ este 160. Atunci sînt necesare mai mult decît

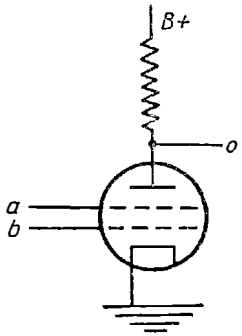
$$3^{160} \doteq 2 \times 10^{76},$$

componente adică, mai multe decît se presupune că ar fi electroni în univers.

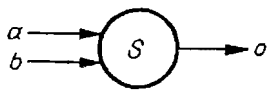
O metodă mai economică ar fi aceea a conexiunilor multiple. Considerațiile teoretice vor fi mult simplificate îndată ce facem uz de faptul cunoscut că toate elementele logice de bază pot fi reduse la unul singur, dacă utilizăm numai circuite fără cicluri și întîrzieri. Pentru aceasta există mai multe metode. O cale ar fi să facem uz de un circuit cu o ieșire și două intrări proiectate astfel, încît ieșirea este coborîtă (descărcată, neactivizată, închisă), atunci și numai atunci cînd ambele intrări sînt înalte (încărcate, activate,

deschise). Un asemenea element se numește element bară. În acest paragraf vom face abstracție de elementele de întîrziere pentru a simplifica expunerea. Ne mărginim să amintim că, pentru multe țeluri, elementul bară poate fi considerat asociat în mod automat cu o unitate de întîrziere.

Schematic, circuitul poate fi reprezentat după cum urmează:



Sau, mai simplu, folosind următoarea diagramă:



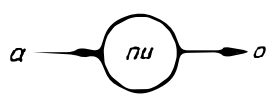
Un tabel care îl caracterizează ar fi următorul:

a	*b*	*o*
înalt	înalt	coborît
înalt	coborît	înalt
coborît	înalt	înalt
coborît	coborît	înalt

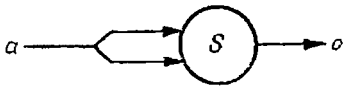
Sau, dacă folosim terminologia adevăr-fals (T respectiv F) și avem în vedere propozițiile de forma conductorul respectiv este la voltajul cel mai înalt dintre cele două voltaje posibile, tabelul devine:

a	*b*	*o*	*a*	*b*	*o*
T	*T*	*F*	1	1	0
T	*F*	*T*	1	0	1
F	*T*	*T*	0	1	1
F	*F*	*T*	0	0	1

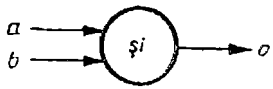
„Ieșirea“ o este, așadar, funcția bară care operează pe intrările a și b: $a \mid b$. Este binecunoscut că putem defini „sau“, „și“, „nu“ cu ajutorul elementului bară. De exemplu, putem înlocui



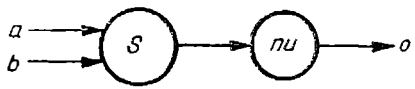
prin



astfel încît ieșirea o este coborîtă, dacă și numai dacă intrarea este înaltă. Similar, putem înlocui

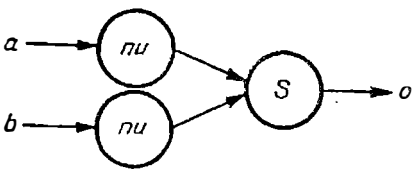


prin



Putem înlocui

prin

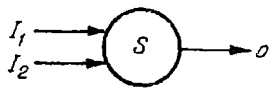


Așadar, este posibil să presupunem că în rețelele noastre folosim ca elemente de bază doar elemente bară. Pe semne că aceasta nu va fi economic în construcțiile reale, deoarece alte elemente se pot obține mai ușor; dar, după cum am spus mai sus, această ipoteză simplifică considerentele teoretice.

Ideea de bază a conexiunilor multiple este foarte simplă. Să considerăm un număr fix N. În întreaga mașină înlocuim fiecare linie cu N linii (împreună cu N mulțimi ale componentelor însoțitoare). Rezultatul va fi că în loc de două stări diferite (deschis și închis, înalt și coborît), obținem $N + 1$ stări după numărul de linii (de la 0 la N) care sînt stimulate. Avem, așadar, mai multă libertate să interpretăm anumite stări ca mesaje afirmative și anumite stări ca mesaje negative. Mai precis: alegem un număr pozitiv $\Delta(\Delta < 1/2)$, iar stimularea unui număr de linii mai mic sau egal cu ΔN se interpretează ca un mesaj negativ, pe cînd stimularea unui număr mai mare sau egal decît $(1 - \Delta)N$ linii este interpretată ca mesaj pozitiv. Orice alt număr de linii stimulate este interpretat ca un deranjament. Desigur, că nu este imposibil să continuăm a primi mesaje eronate, fie că mesajul este „da", dar numărul liniilor stimulate este mai mic decît ΔN, fie că mesajul ar trebui să fie „nu", dar numărul liniilor stimulate este mai mare decît $(1 - \Delta)N$. Este însă impor-

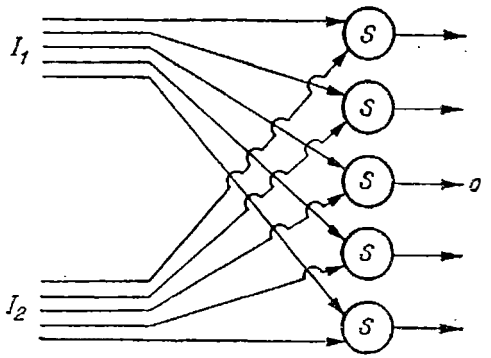
tant faptul că aceste erori vor interveni mult mai rar decît în rețeaua inițială (adică în cazul $N = 1$). Nu este evident că lucrurile stau astfel pentru un N dat sau că putem alege asemenea numere N. Este adevărat că multe linii transmit mesaje eronate numai atunci cînd sînt deranjate multe componente, dar, deoarece în conectarea multiplă folosim mult mai multe componente, este firesc să ne așteptăm ca mai multe componente să funcționeze prost. Rămîne de arătat că aceste deranjamente adiționale ale componentelor sînt mai mult decît compensate prin felul în care proiectăm circuitele.

Într-un caz foarte simplu, metoda poate fi înfățișată după cum urmează. Deoarece presupunem că în mașină unicele elemente de bază sînt elementele bară, singurul lucru pe care trebuie să-l examinăm este modalitatea de a înlocui



fiecare element bară printr-o rețea multiplexată corespunzătoare.

Pentru a simplifica lucrurile, să luăm $N = 5$. Desigur că alte valori ale lui N se pot trata similar. Metoda este pur și simplu următoarea: în întreaga mașină, fiecare element bară este înlocuit prin următoarea rețea



Să observăm că N (în acest caz particular: 5) linii de ieșire servesc iarăși pentru a înlocui o singură linie de intrare la un alt element bară din rețeaua inițială. Acesta este motivul pentru care în întreaga rețea se poate folosi unul și același număr N.

Să presupunem că fiecare element bară are o probabilitate de deranjament ε $(0 < \varepsilon < 1/2)$. Cu alte cuvinte, există o probabilitate ε ca să intervină unul din următoarele trei cazuri:

(i) atît intrarea I_1, cît și intrarea I_2 sînt deschise și ieșirea o este de asemenea deschisă.

(ii) ambele intrări I_1 și I_2 sînt închise și ieșirea o este de asemenea închisă.

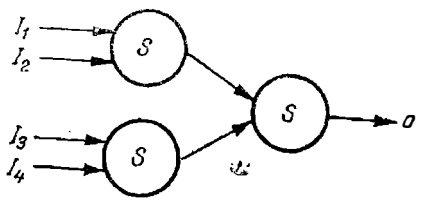
(iii) una dintre ieșiri este deschisă, cealaltă este închisă, iar ieșirea o este închisă.

Desigur că este posibil ca și I_1 și I_2 să transmită mesajele în mod eronat. Cu alte cuvinte, deși pentru ceea ce ne interesează presupunem că, la înce-

put, din exteriorul mașinii se introduc intrări corecte (adică facem abstracție de erorile care propriu-zis nu sînt erori ale mașinii), trebuie să ținem seama de faptul că intrările pentru un element bară din interiorul mașinii sînt ieșiri ale unor alte elemente bară din mașină. Astfel, pentru un element bară dat putem presupune că există o probabilitate ξ ca I_1 să fie un mesaj transmis eronat și o probabilitate η ca I_2 să fie astfel. Este clar că ξ și η nu depind de elementul bară propriu-zis, ci numai de poziția relativă pe care el o ocupă în mașină.

Pentru un element bară dat în mașină, dacă ξ, η și ε sînt date, atunci probabilitatea ca ieșirea să fie incorectă are ca margine superioară $\xi + \eta + \varepsilon$. Dacă k este numărul elementelor bară care determină o ieșire în mașină și dacă intrările inițiale se presupune că sînt corecte la început, atunci probabilitatea erorii întregii mașini are ca margine superioară $k\varepsilon$, după cum se poate vedea lesne prin inducție.

Dacă luăm în considerație mai multe detalii, o margine superioară mai apropiată va fi $\max(\xi, \eta) + \varepsilon$ unde $\max(\xi, \eta)$ este cel mai mare dintre numerele ξ și η. Atunci o margine superioară pentru întreaga mașină va fi $\lambda\varepsilon$, unde λ este numărul maxim de linii care conduc la intrare. Mai mult, marginea superioară a probabilității de deranjament pentru rețeaua simplă



va fi nu 3ε, ci numai 2ε.

Valoarea $\max(\xi, \eta)$ se poate obține luînd în considerare, pe rînd, diferitele alternative care pot avea loc în cazul unui element bară izolat cu intrările a, b și ieșirea c:

a	b	c
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Să considerăm, de exemplu, probabilitatea de deranjament pentru cazul cînd intrările trebuie să fie 1, 0 iar ieșirea 1. Deranjamentul poate interveni, dacă și numai dacă are loc vreunul din următoarele patru cazuri: (1) a este eronat, dar b este corect, iar ieșirea este corect determinată de intrări, astfel încît a, b, c au respectiv valorile 0, 0, 1; (2) ambele intrări sînt corecte, dar se produce o ieșire eronată, așa încît avem 1, 0, 0; (3) intrarea a este corectă, dar intrarea b este eronată și ieșirea este determinată necorect de către intrări, astfel încît avem 1, 1, 1; (4) ambele intrări sînt eronate, iar ieșirea este determinată de intrări în mod necorect.

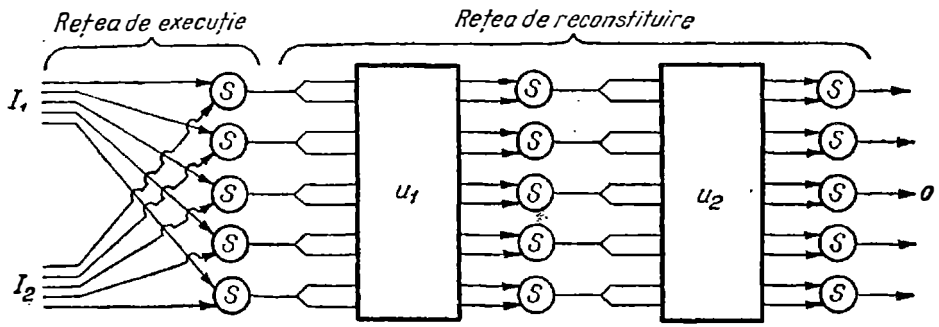
Probabilitățile pentru cazurile (1) — (4) sînt date respectiv de $\xi(1-\eta)(1-\varepsilon)$, $(1-\xi)(1-\eta)\varepsilon$, $(1-\xi)\eta\varepsilon$ și $\xi\eta\varepsilon$. Prin urmare, probabilitatea că va interveni cel puțin una dintre aceste alternative este:

$$\begin{aligned}
&\xi(1-\eta)(1-\varepsilon)+(1-\xi)(1-\eta)\varepsilon+(1-\xi)\eta\varepsilon+\xi\eta\varepsilon \\
&\quad=\xi+\varepsilon-\eta\xi-2\xi\varepsilon(1-\eta) \\
&\quad\leqslant \xi+\varepsilon \qquad\qquad (\because \eta\leqslant 1) \\
&\quad\leqslant \max(\xi,\eta)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

Similar obținem aceeași margine superioară atunci cînd a, b, c trebuie să fie respectiv 1, 1, 0 sau 0, 1, 1 sau 1, 1, 1.

Rețeaua pe care o propune von Neumann pentru a înlocui un singur element bară este mai complicată decît cea de mai sus care este numai rețea executivă. În plus, este necesară și o rețea de reconstituire.

Iarăși pentru $N = 5$ rețeaua care urmează să înlocuiască un singur element bară este următoarea:



În diagrama de mai sus u_1 și u_2 sînt cutii negre care permută liniile pentru a restabili randomicitatea (caracterul aleatoriu).

Motivul pentru care este necesară rețeaua de restaurare poate fi explicat în felul următor.

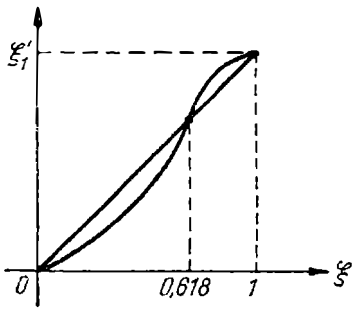
De exemplu, dacă patru din cele cinci linii din I_1 sînt stimulate și de asemenea patru din cele cinci linii din I_2 sînt stimulate, atunci este posibil, ba chiar foarte probabil, că dintre cele cinci ieșiri ale rețelei executive, în starea majoritară (adică, aici starea de nestimulare) se află trei și nu patru. De fapt, se poate demonstra, în general, că dacă ieșirile rețelei executive se află în majoritate în starea de nestimulare a ambelor intrări, atunci nivelul cel mai probabil de eroare la ieșire va fi aproximativ suma erorilor de la cele două intrări. De aceea este necesară o rețea auxiliară de restaurare.

Rețeaua auxiliară servește, cu mare probabilitate, la transformarea unui fascicul de intrare la care procentul de linii excitate ξ, este mai aproape de zero (respectiv unu) într-un fascicul de ieșire la care acest procent va fi și mai aproape de zero (respectiv unu). Se constată că rețeaua de mai sus servește acestui țel. Putem spune că aceasta se realizează exagerînd starea predominantă și suprimînd stările aflate în minoritate.

Astfel, dacă ξN din cele N ieşiri ale reţelei executive sînt stimulate, atunc numărul ieşirilor stimulate din reţeaua de restaurare va fi

$$\xi' = 2\xi^2 - \xi^4.$$

Că aceasta este ceea ce urmărim este limpede din diagrama alăturată.



Problema următoare constă în examinarea reţelelor multiplexate corespunzătoare pentru fiecare element bară. Vrem să determinăm condiţiile în care asemenea reţele au probabilităţi de deranjament mai mici. Vom considera numai reţelele corespunzătoare unui element bară *izolat.*

Deoarece acum în loc de o singură ieşire avem N ieşiri, avem mai multe libertăţi în ce priveşte interpretarea combinaţiilor de ieşire care corespund la „da" respectiv „nu". De exemplu, putem spune că mesajul este „da" (respectiv „nu") dacă şi numai dacă toate cele N linii transmit „da" (respectiv „nu"). Dar atunci vor fi numeroase cazuri cînd ieşirea nu determină vreun mesaj definit. Sau, trecînd la altă extremă, am putea spune că mesajul realizat de N ieşiri este cel realizat de majoritatea celor N ieşiri. Într-un asemenea caz, vom avea foarte puţine cazuri de nedeterminare (sau nici unul dacă N este impar), dar pericolul de a obţine mesaje eronate este foarte mare, deoarece chiar şi deranjamentul unei singure linii poate furniza un mesaj eronat. În consecinţă, căutăm un compromis; adică alegem un Δ convenabil, $0 < \Delta < 1/2$, astfel încît N ieşiri să transmită un mesaj definit numai dacă numărul liniilor care deviază de la mesajul corect nu este mai mare de ΔN. Acest număr Δ se numeşte nivel de fidelitate.

Cu alte cuvinte, avem trei numere care pot varia:

(i) ε: probabilitatea de deranjament a fiecărui element bară;
(ii) N: numărul liniilor în fiecare fascicul;
(iii) Δ: nivelul de fidelitate,

unde $0 < \varepsilon < 1/2$, $0 < \Delta < 1/2$ iar N este un întreg pozitiv.

Pentru ε fixat, se pune problema de a determina N şi Δ, astfel încît probabilitatea de deranjament a reţelei N-plexată cu nivel de fidelitate Δ să fie mai mică decît un număr δ prestabilit, care este marginea superioară pe care o admitem pentru probabilitatea de deranjament. Posibilitatea interesantă este aceea de a-l face pe δ mai mic decît ε, ba chiar cît de mic vrem.

Cu alte cuvinte, dacă ε şi N sînt date, iar ξN şi ηN sînt numerele (probabile) de linii excitate (deschise) în cele două fascicule de intrare, atunci

numărul (probabil) ψN de linii excitate (deschise) în fasciculul de ieșire este o funcție $\psi(\varepsilon, N, \xi, \eta)$. Astfel, atunci cînd ψ se află în intervalul $0 \leqslant \psi \leqslant \Delta$, mesajul este „nu", atunci cînd intervalul este $\Delta < \psi < 1 - \Delta$, mesajul este absent, iar atunci cînd intervalul este $1 - \Delta \leqslant \psi \leqslant 1$, mesajul este „da".

Problema este de a stabili Δ, N, ε astfel încît probabilitatea de deranjament să fie mică; adică să fie mică probabilitatea de apariție a următoarelor cazuri:

(a) $\xi \geqslant 1 - \Delta$, $\eta \geqslant 1 - \Delta$, dar $\psi > \Delta$;

(b) $\xi \leqslant \Delta$, $\eta \leqslant \Delta$, dar $\psi < 1 - \Delta$;

(c) $\xi \leqslant \Delta$ și $\eta \geqslant 1 - \Delta$, sau $\xi \geqslant 1 - \Delta$ și $\eta \leqslant \Delta$, dar $\psi < 1 - \Delta$.

Să observăm că coloana erorilor include atît nefurnizarea unui mesaj definit (mesajul vag), cît și furnizarea unui mesaj definit care este eronat.

Din punct de vedere matematic, problema este complicată, din cauză că cei trei factori Δ, N, ε se influențează unul pe celălalt. Von Neumann comunică unele rezultate ale calculelor sale, dar nu indică metodele pe care le-a utilizat. Rezultatele sale sînt citate aci.

El pornește de la nivelul de fidelitate cel mai favorabil

$$\Delta = 0{,}07,$$

adică stimularea a cel puțin 93% dintre liniile fasciculului reprezintă un mesaj „da", iar stimularea a cel mult 7% dintre linii reprezintă un mesaj „nu".

Dacă Δ este fixat, putem investiga legătura reciprocă dintre ε și N. Intuitiv, ε nu poate să fie prea mare, deoarece am adăugat multe elemente bară noi și nu este de loc clar că certitudinea obținută prin utilizarea fasciculelor este adecvată pentru a compensa creșterea probabilității de deranjamente ca urmare a unui număr mai mare pe porțiuni de bază. Se poate prea bine întîmpla ca metoda multiplexării să fie lipsită de eficacitate, atunci cînd ε nu este destul de mic. De fapt, după von Neumann, există o margine superioară pentru valorile permise ale lui ε, și anume:

$$\varepsilon = 0{,}010\,7.$$

Cu alte cuvinte, dacă $\varepsilon \geqslant 0{,}010\,7$, riscul deranjamentului nu va mai depinde de numărul N, oricît de mare ar fi acesta.

Așadar, trebuie să ne limităm la acele valori ale lui ε care sînt mai mici decît 0,010 7. Pentru fiecare valoare dată a lui ε, probabilitatea de deranjament a rețelei n-plexate corespunzătoare unui element bară este funcție de n: $\rho_\varepsilon(n)$.

Von Neumann consideră numai cazul $\varepsilon = 0{,}005$ și arată că pentru acest ε particular, funcția este aproximativ

$$\rho(n) \approx \frac{6{,}4}{\sqrt{n}} 10^{-\frac{8{,}6\,n}{10\,000}}.$$

Din această formulă putem obține un răspuns pentru exemplul următor:

Exemplu. Să considerăm o mașină de calcul cu 2500 tuburi cu vid pe care, pentru prescurtare, le presupunem a fi toate elemente bară cu probabilitatea

de deranjament 0,005. Presupunem că, în medie, fiecare tub este activizat o dată la fiecare 5 microsecunde și că vrem ca, în medie să se ,scurgă 8000 ore între o eroare și alta. Să se găsească N astfel încît mașina multiplexată respectivă să realizeze această condiție.

În perioada de timp considerată vom avea

$$\frac{1}{5} \times 2\,500 \times 8\,000 \times 3\,600 \times 10^6 = 1{,}4 \times 10^{16} \text{ activizări.}$$

Deci avem nevoie de o probabilitate de deranjament

$$\rho(n) = \frac{1}{1{,}4 \times 10^{16}} \sim 7 \times 10^{-17}.$$

Din formula pentru $\rho(n)$ vedem că este suficient să luăm $N = 18\,000$, adică sistemul trebuie repetat de 18 000 de ori.

Un asemenea exemplu prezintă un interes practic foarte redus. Alegerea lui $\varepsilon = 0{,}005$ este surprinzător de pesimistă și de fapt este imposibil să mărim o mașină cu un volum destul de însemnat de 18 000 de ori. De exemplu, ar fi destul de realist să presupunem $\varepsilon = 10^{-9}$ sau chiar $\varepsilon = 10^{-10}$. Pentru asemenea valori ale lui ε, este firesc să ne așteptăm la un număr mai mic de linii necesare pentru obținerea rezultatelor definite dorite. Ar fi interesant de stabilit, de exemplu, valoarea lui n necesară în exemplul de mai sus, dacă luăm $\varepsilon = 10^{-9}$.

Paragraful de față este o versiune întrucîtva modificată a unei comunicări tehnice pregătite în primăvara anului 1954.

BIBLIOGRAFIE

În afară de referirile de la § 5 și lista bibliografică de la sfîrșitul cap. I, alte lucrări în legătură cu acest capitol sînt următoarele:

[1] L. E. J. Brouwer, *Intuitionisme en Formalisme*, Groningen, 1912. Traducere în engleză, în „Bull. Am. Math. Soc" **20**, 1914.

[2] M. Davis, *Computability and Solvability*, New York, 1958.

[3] M. Davis și H. Putnam, în „Jour. Symbolic Logic", **23**, 1958, pp. 183—187.

[4] R. M. Friedberg, în „Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A.", **43**, 1957, pp. 236—238.

[5] K. Gödel, *Consistency of Continuum Hypothesis*, Princeton, 1940.

[6] S. C. Kleene, în „Trans. Am. Math. Soc.", **53**, 1943, pp. 41—73.

[7] Idem, *Introduction to Metamathematics*, 1952.

[8] G. Kreisel, în „Jour. Symbolic Logic", **23**, 1958, pp. 155—182.

[9] N. Lusin, în „Fund. Math.", **25**, 1935, pp. 109—131.

[10] A. A. Markov, în „Trudî Matematiceskovo Instituta Akademii Nauk SSSR", nr. 42, Moskva, 1954.

[11] A. A. Mucinik, în „Dokladî Akademii Nauk SSSR", **103**, 1956, pp. 194—197.

[12] P. S. Novikov, în „Trudî Matematiceskovo Instituta Akademii Nauk SSSR", nr. 44, Moskva, 1955.

[13] R. Péter, *Rekursive Funktionen*, Budapest, 1951; ediție revăzută, 1957.

[14] E. L. Post, în „Bull. Am. Math. Soc.", **50**, 1944, pp. 284—316.

[15] A. M. Turing, în „Science News", nr. 31, 1954, pp. 7—23.

partea a doua
MAȘINI DE CALCUL

CAPITOLUL VI
O VARIANTĂ A TEORIEI LUI TURING PENTRU MAŞINILE DE CALCUL [1]

„...fiecare trebuie să se încredinţeze cu tărie că ştiinţele, oricît de oculte, trebuie deduse nu din lucrurile mari şi obscure, ci numai din cele uşoare şi mai la îndemîna oricui".

(Descartes)

§ 1. INTRODUCERE

Scopul principal al acestui memoriu constă în a prezenta o teorie strîns legată de teoria lui Turing [1], dar mai economică în ce priveşte operaţiile de bază. Arătăm aici că se poate imagina o maşină de bază simplă din punct de vedere teoretic, astfel încît toate funcţiile parţial recursive (şi prin urmare toate problemele de calcul rezolvabile) să poată fi calculate de ea, programele respective folosind doar patru tipuri fundamentale de instrucţiuni: deplasarea la stînga cu o unitate, deplasarea la dreapta cu o unitate, marcarea unui loc gol (blanc) şi transferul condiţionat. În particular, ne putem dispensa de radiere, pentru marcare este suficient un singur simbol, iar în ce priveşte transferul avem nevoie de un singur tip de transfer. Reducerea este întrucîtva similară, de exemplu, cu definirea conjuncţiei şi implicaţiei cu ajutorul negaţiei şi disjuncţiei sau cu definirea tuturor acestora cu ajutorul doar al funcţiei bară a lui Sheffer. Rezultatul este că demonstrarea faptului că anumite lucruri pot fi efectuate de maşini devine mai puţin directă, însă în schimb este ceva mai lesnicios să demonstrăm că anumite lucruri nu pot fi făcute.

Această teorie care îşi este suficientă va fi prezentată, în măsura posibilului, într-un limbaj familiar celor care se ocupă cu utilizarea şi construirea calculatoarelor.

Teoria lui Turing a funcţiilor calculabile a precedat actuala construcţie pe scară mare a calculatoarelor cifrice, dar n-a influenţat-o mult. Aceste două aspecte, teoria şi practica, s-au dezvoltat aproape în întregime, independent unul de celălalt. Motivul principal este indubitabil faptul că logicienii se preocupă de probleme cu totul diferite de cele care interesează în primul

[1] Acest capitol a apărut iniţial în „Journal of Association for Computing Machinery", **4**, 1957, pp. 63—92. În acest domeniu, printre lucrările recente trebuie semnalate: Walter Oberschelp *Varianten von Turingmaschinen* în „Arhiv für math. Logik u. Grundlagenforschung", Heft 4, 1958, pp. 53—62, precum şi memoriile lui C. Y. Lee şi ale lui Shepherdson şi Sturgis, care urmează să apară. În particular, în aceste lucrări problema de la p. 151 capătă o soluţie pozitivă.

rînd pe matematicienii şi pe inginerii electronişti. De aceea nu este de loc straniu că aceleaşi concepte sînt adesea exprimate prin termeni diferiţi în cele două dezvoltări. Se pune chiar întrebarea dacă nu cumva o apropiere ar produce un efect bun. Credem că acest memoriu va fi de folos celor care vor să compare şi să lege între ele cele două abordări.

În mare măsură facem uz de lucrările lui Turing [1] şi Kleene [2] (cap. XIII), dar expunerea este independentă şi poate fi urmărită fără a recurge la aceste lucrări.

§ 2. MAŞINA DE BAZĂ B

Nici o maşină cu destinaţie universală realizabilă fiziceşte nu este cu adevărat de destinaţie universală, în sensul că ar putea rezolva toate problemele de calcul care sînt teoretic rezolvabile. În orice caz, blocul de memorie este necesarmente finit: lungimea fiecărui cuvînt — instrucţiune este finită şi există doar un număr finit de adrese. Fiind dată o maşină reală, este totdeauna uşor să găsim probleme de calcul care pretind un volum de memorie mai mare decît acela pe care îl posedă maşina.

De fapt, pare rezonabil să cădem de acord că pentru orice metodă uniformă de reprezentare a numerelor întregi pozitive, dacă ne fixăm un număr arbitrar n_0, vor exista întregi care să nu poată fi reprezentaţi prin mai puţin decît n_0 simboluri. Ne vom abţine de la discutarea filozofică a unor asemenea chestiuni cum ar fi posibilitatea unei infinităţi de simboluri atomice izolate, şi altele de acest fel, dar vom admite aceasta ca fiind dat. Dacă acceptăm această ipoteză rezonabilă, rezultă că pentru a discuta o maşină care rezolvă toate problemele calculabile sau chiar o maşină care rezolvă toate problemele de un anumit tip, cum ar fi adunarea a două numere întregi pozitive, trebuie să facem uz de ficţiunea unui bloc de memorie infinit sau care poate creşte indefinit, bloc de memorie care poate consta fie dintr-o bandă (fictivă), fie dintr-o memorie internă (fictivă), fie din amîndouă.

Să considerăm, în primul rînd, o maşină fictivă B, cu o memorie internă (în paralel) care se poate dezvolta indefinit şi care în plus foloseşte o bandă (memorie în serie) împărţită într-un şir de pătrate (celule) şi putînd fi prelungită oricît de mult dorim la amîndouă capetele. În plus, maşina mai are un element de control şi un dispozitiv de citire şi scriere despre care presupunem că la fiecare moment dat examinează un pătrat al benzii şi numai unul. Dispozitivul de citire, sub direcţia elementului de control şi în conformitate cu pasul corespunzător al programului corespunzător poate sau să se deplaseze cu un pătrat la stînga, sau să se deplaseze cu un pătrat la dreapta,sau să marcheze pătratul examinat, sau să „decidă" să treacă la un pas sau altul din programul prestabilit după cum pătratul examinat este marcat sau gol. La fiecare moment dat, operaţia următoare a maşinii este determinată de pasul programului respectiv al elementului de control, precum şi de conţinutul (gol sau marcat) al pătratului examinat. Maşina poate realiza deci patru feluri de operaţii, în concordanţă cu aceşti doi factori: (i) dispozitivul de citire şi scriere se mişcă cu un pătrat la stînga; (ii) dispozitivul se mişcă cu un pătrat la dreapta; (iii) el marchează pătratul citit; (iv) elementul de control îi deplasează atenţia la un alt pas al programului.

Să presupunem că adresele memoriei interne pot fi orice numere întregi pozitive. Corespunzător cu cele patru tipuri de operații, vom avea patru tipuri de instrucțiuni de bază:

(1) $\rightarrow$: deplasarea cititorului cu un pătrat la dreapta, adică deplasarea examinării spre pătratul următor la dreapta în raport cu pătratul examinat inițial; același lucru se poate realiza deplasînd banda cu un pătrat la stînga.
(2) $\leftarrow$: deplasarea cititorului cu un pătrat la stînga.
(3) *: marcarea pătratului de pe bandă care este examinat.
(4) *Cn*: transfer condiționat.

Dintre acestea, (1)—(3) sînt trei instrucțiuni unice, în timp ce transferul condiționat cuprinde de fapt o mulțime infinită de instrucțiuni. Un transfer condiționat este de forma $m \cdot Cn$, conform cu care al m-lea cuvînt de instrucțiune (adică cuvîntul de instrucțiune de la adresa m) este un transfer condiționat, astfel încît dacă pătratul supus citirii este marcat, atunci trebuie urmată a n-a instrucțiune, iar în caz contrar (adică dacă pătratul supus citirii este gol), trebuie urmată instrucțiunea imediat următoare (adică a $m + 1$). Numerele m și n pot fi întregi pozitivi oarecare, dar nu mai mari decît numărul total al instrucțiunilor programului în care apare $m \cdot Cn$. Cînd $n = m + 1$, instrucțiunea este de prisos, dar noi nu trebuie să excludem asemenea cazuri. Nu trebuie să prevenim nici apariția unor pași ai programului care determină dispozitivul de citire să marcheze un pătrat gata marcat, deși de obicei putem construi programele astfel, încît să nu intervină acțiuni de prisos. Prevenirea marcării unor pătrate gata marcate în definiția programului ar introduce complicații inutile în considerațiile generale: de exemplu, fiecare pas $m \cdot *$ ar trebui înlocuit prin doi pași $m \cdot C\ (m + 2)$ și $m + 1 \cdot *$, renumerotînd pașii programului original, adică punînd $m + i + 1$ în loc de $m + i$.

Deoarece nu avem o instrucțiune separată pentru oprire (stop), este subînțeles că mașina se va opri atunci cînd ajunge într-un stadiu în care programul nu mai conține instrucțiuni care să-i spună ce mai are de făcut. Însă din motive de uniformitate și explicitare, convenim că, la fiecare program, ultimele două linii sînt $N - 1. \rightarrow, N \cdot \leftarrow$. De exemplu, să dăm un program simplu: 1. *, 2. $\rightarrow$, 3. C2, 4. $\rightarrow$ 5. $\leftarrow$. Acest program determină dispozitivul de citire să găsească cel mai apropiat loc gol la dreapta pătratului supus citirii inițiale, după care să se oprească.

Mai exact, un program sau o rutină pentru mașina B se poate defini ca o mulțime de perechi ordonate, astfel încît există un număr întreg pozitiv k ($k > 2$) pentru care (a) pentru fiecare n, n intervine ca prim membru al unei perechi și numai al uneia dacă și numai dacă $1 \leqslant n \leqslant k$; (b) al doilea membru al fiecărei perechi este sau * sau $\rightarrow$, sau $\leftarrow$, sau un număr n cu $1 \leqslant n \leqslant k - 1$; (c) există perechile $< k - 1, \rightarrow >$, $< k, \leftarrow >$. În conformitate cu această definiție, exemplul de mai sus se poate reprezenta astfel: $\{< 1, * >, < 2, \rightarrow >, < 3, 2 >, < 4, \rightarrow >, < 5, \leftarrow >\}$.

Spre deosebire de Turing, care utilizează o bandă infinită într-o singură direcție, dar avînd un început, noi, urmîndu-l pe Post, folosim o bandă infinită în ambele sensuri. Considerăm aceasta ca o reducere, deoarece astfel sîntem lipsiți de privilegiul de a face apel la conceptul de început al benzii. După cum se constată, pentru nevoile calculului deosebirea de posibilități pentru mașină nu este prea mare în cele două cazuri. În ce privește teoria

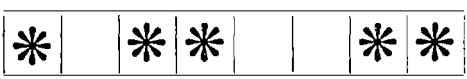
generală, banda infinită într-o singură direcţie determină ca anumite programe să fie lipsite de sens, atunci cînd ele comandă dispozitivul de citire să treacă dincolo de începutul benzii. Aceasta ar introduce complicaţii inutile.

Am definit totalitatea programelor posibile pentru maşina B. Programul fiind dat, ceea ce va face maşina B este determinat de conţinutul iniţial al benzii şi de poziţia iniţială a cititorului relativ la bandă, ambele putînd fi date arbitrar. Pentru a simplifica consideraţiile următoare, vom presupune o dată pentru totdeauna că (i) banda iniţială (intrare) conţine doar o mulţime finită de pătrate marcate şi că (ii) la începutul fiecărui program, dispozitivul de citire examinează al şaselea pătrat gol de la dreapta celui mai de dreapta pătrat marcat. Pe de altă parte, subrutinele încep de la orice pătrat din cadrul celei mai mici părţi a benzii care conţine toate pătratele iniţial marcate şi şase pătrate goale la dreapta şi se sfîrşesc similar. Conform cu (i), rezultă că la fiecare moment dat avem pe bandă numai un număr finit de pătrate marcate.

Să observăm că fiind dat un program Π, comportarea sa la fiecare moment de timp este complet determinată de: conţinutul benzii la acel moment, poziţia şi conţinutul pătratului examinat, instrucţiunea programului care intră în funcţie în acel moment. Aceşti trei factori împreună cu programul dat determină *starea instantanee completă* a maşinii B. Pentru exactitate putem reprezenta aceste stări cu ajutorul numerelor, în felul următor. Reprezentăm $\rightarrow$, $\leftarrow$,* prin 1 respectiv 2 respectiv 3, orice număr n prin $n + 3$, iar al i-lea pas al programului îl reprezentăm printr-o putere a celui de al i-lea număr prim, astfel încît, de exemplu, $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^5 \cdot 7^1 \cdot 11^2$ reprezintă programul de mai sus

$$\{<1, *>, <2, \rightarrow>, <3, 2>, <4, \rightarrow>, <5, \leftarrow>\}.$$

Lungimea unui program Π este reprezentată prin numărul $lh(\pi)$ al factorilor primi distincţi din numărul său reprezentativ π, iar a i-a linie a programului Π este reprezentată de numărul $(\pi)_i$, care este exponentul celui de al i-lea număr prim (primul fiind 2) din descompunerea în factori a lui π. Funcţiile $lh(\pi)$ şi $(\pi)_i$ sînt funcţii recursive binecunoscute (a se vedea, de exemplu, Kleene, [2]). Conţinutul benzii şi pătratul examinat se pot reprezenta printr-un număr de formă $3^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, unde $b = 0$ sau $b = 1$, după cum pătratul supus citirii este gol sau marcat, iar a şi c reprezintă, respectiv, conţinutul benzii la stînga şi la dreapta pătratului supus citirii, în aşa fel încît a i-a cifră (de la dreapta la stînga) a lui a (respectiv c) este 0 sau 1 după cum al i-lea pătrat la stînga (respectiv la dreapta) este gol sau marcat. Deoarece la fiecare moment de timp dat avem numai o mulţime finită de pătrate marcate, a şi c sînt totdeauna numere definite. Dacă, de exemplu, unica porţiune marcată a benzii este



iar dispozitivul de citire examinează al patrulea pătrat (de la stînga), numărul va fi $3^{101} \cdot 5 \cdot 7^{1100}$. Utilizînd aceste numere, starea instantanee completă o vom reprezenta prin numărul

$$2^{\pi} \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c \cdot 11^i,$$

atunci cînd programul are numărul π, conţinutul benzii împreună cu pătratul examinat la momentul respectiv are numărul $3^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, iar pasul corespun-

zător al programului este i. Fiind dat acest număr, putem restabili într-un mod unic numerele π, a, b, c și i, în virtutea faptului că descompunerea unui număr în factori primi este unică.

Deoarece presupunem că la fiecare moment dat este realizat un pas al programului, starea instantanee completă a mașinii la un moment dat este determinată de cea de la momentul precedent într-un mod foarte simplu. De exemplu, dacă numărul la un moment dat este $2^{\pi} \cdot 3^{a} \cdot 5^{b} \cdot 7^{c} \cdot 11^{i}$, iar $i < lh(\pi)$, atunci numărul în momentul următor este dat precum urmează:

(i) dacă $(\pi)_i$ este 1, atunci numărul este $2^{\pi} \cdot 3^{10a+b} \cdot 5^{c'} \cdot 7^{c/10} \cdot 11^{i+1}$ (unde c' este restul de la împărțirea cu 10 a lui c);
(ii) dacă $(\pi)_i$ este 2, atunci numărul este $2^{\pi} \cdot 3^{a/10} \cdot 5^{a'} \cdot 7^{10c+b} \cdot 11^{i+1}$;
(iii) dacă $(\pi)_i$ este 3, atunci numărul este $2^{\pi} \cdot 3^{a} \cdot 5 \cdot 7^{c} \cdot 11^{i+1}$;
(iv) dacă $(\pi)_i$ este $3 + j$, atunci numărul este $2^{\pi} \cdot 3^{a} \cdot 5^{b} \cdot 7^{c} \cdot 11^{i+1}$, dacă $b = 0$ și $2^{\pi} \cdot 3^{a} \cdot 5^{b} \cdot 7^{c} \cdot 11^{j}$, dacă $b = 1$.

Deci fiind dată starea instantanee completă la momentul cînd mașina începe să realizeze un program, stările ulterioare vor fi determinate. La rîndul său, starea de la început este în întregime determinată de program și de banda de intrare. Din aceste fapte rezultă că pentru fiecare program dat Π există o funcție recursivă $\theta_{\pi}(\iota, t)$, care pentru fiecare conținut al benzii de intrare reprezentat prin ι dă numărul stării instantanee complete al mașinii B la momentul t. Acum putem defini o funcție recursivă

$$\tau_{\pi}(\iota) = \mu_t [(\theta_{\pi}(\iota, t))_5 = lh(\pi)],$$

care determină cel mai mic t pentru care cînd ι este dat, mașina va ajunge la ultima linie a programului Π la momentul t, numai dacă mașina ajunge în acest stadiu pentru ι-ul respectiv. Pentru valorile lui ι care ar putea determina mașina să continue după programul Π, $\tau_{\pi}(\iota)$ nu este definit. Pare rezonabil să denumim funcția $\tau_{\pi}(\iota)$ *funcția viteză* pentru programul Π sau pentru funcția pe care o determină Π. Putem spune că funcția recursivă $\theta_{\pi}(\iota, \tau_{\pi}(\iota))/(2^{\pi} \cdot 11^{lh(\pi)})$ este funcția determinată de programul Π, deoarece pentru fiecare intrare ι, ea stabilește ieșirea corespunzătoare care rezultă prin realizarea programului Π. Omitem definițiile explicite ale acestor funcții, întrucît ele sînt similare cu cele de la Kleene [2], pp. 374—376.

Rezultă că funcția determinată printr-un program al mașinii B este o funcție recursivă. Acest rezultat îl mai putem enunța și spunînd că toate funcțiile calculabile prin mașina B sînt recursive. Aceasta este o ușoară generalizare a contrapărții binecunoscutei teoreme că toate funcțiile calculabile în sensul lui Turing sînt recursive (Kleene [2], p. 374).

Generalizarea constă în renunțarea la restricția că intrarea inițială și ieșirea finală trebuie să fie de o anumită formă predeterminată în conformitate cu o convenție ad-hoc de reprezentare a întregilor pozitivi (argumente sau valori ale funcțiilor) sau a n-uplurilor de întregi (argumente ale funcțiilor cu mai multe argumente). De exemplu, la Kleene [2], banda de intrare se presupune că constă dintr-un șir de 1 sau dintr-un șir de mai multe șiruri de 1, fiecare două fiind separate printr-un 0. Această restricție conduce la selectarea efectivă din toate situațiile de bandă posibile a unei submulțimi convenabile pentru reprezentarea întregilor și pozitivi a n-uplurilor respective. Folosind terminologia reprezentă-

rilor noastre numerice ale situaţiilor de pe bandă, aceasta înseamnă că ι nu variază pe mulţimea tuturor numerelor întregi care reprezintă situaţiile benzii, ci numai pe anumite submulţimi recursive simple ale ei. În plus, în reprezentarea noastră am inclus informaţia cu privire la pătratul supus citirii; acest lucru nu este necesar dacă nu ne interesează decît interpretarea conţinutului iniţial şi final al benzii ca întrebare şi răspuns în ce priveşte evaluarea uneia sau altei funcţii de numere întregi pozitive.

Cînd vrem să arătăm că un program Π pentru maşina B reprezintă o funcţie de numere întregi pozitive, să zicem $f(x)$, cel mai firesc pare să fie să procedăm precum urmează: (*i*) reprezentăm printr-o metodă unică argumentul funcţiei pe banda de intrare, (ii) citim printr-o metodă unică valoarea finală a funcţiei de pe banda de ieşire finală pentru o intrare dată în concordanţă cu programul Π; (iii) arătăm că valorile astfel obţinute concordă totdeauna cu valorile funcţiei $f(x)$ pentru un argument dat. Ce anume metode de reprezentare alegem este mai mult sau mai puţin arbitrar; e necesar doar ca ele să fie atît efective, cît şi cu adevărat „simple" într-un anumit sens intuitiv. Deoarece consideraţiile noastre de pînă acum sînt independente de metodele de reprezentare alese, pentru a demonstra teorema noastră principală, este necesar să ne fixăm asupra unei metode particulare simple de formulare a întrebărilor şi de citire a răspunsurilor de pe bandă. Nu ne vom ocupa cu problema generală a tuturor metodelor posibile de reprezentare a întrebărilor şi răspunsurilor pentru ca toate funcţiile recursive să fie calculabile pe maşina B.

Presupunem metoda particulară, pe care o vom expune în paragraful următor, de reprezentare a numerelor întregi şi pozitive şi a şirurilor de numere întregi pozitive şi definim calculabilitatea relativ la această reprezentare. O funcţie $f(x)$ de numere întregi pozitive se spune că este B-calculabilă, dacă şi numai dacă putem stabili un program astfel încît atunci cînd x este reprezentat pe bandă iar maşina examinează această reprezentare, programul o determină să tipărească pe bandă mai multe marcări astfel încît, după ce maşina a realizat toate instrucţiunile programului, porţiunea cea mai de dreapta a părţii tipărite de pe bandă să reprezinte valoarea lui $f(x)$, cu condiţia ca $f(x)$ să fie definită pentru valoarea dată a argumentului x. Definiţii similare se dau pentru funcţii de două sau mai multe variabile. De exemplu, este posibil să arătăm că funcţiile

$$f(x) = 2x,$$

$$g(x, y) = xy$$

sînt B-calculabile conform definiţiei de mai sus.

Rezultatul principal, pe care îl vom stabili în paragraful următor, este că toate funcţiile (parţial) recursive sînt B-calculabile. Demonstraţia se bazează în esenţă, pe faptul cunoscut (Kleene [2], p. 331) că toate funcţiile recursive se pot obţine dintr-un număr redus de tipuri de scheme (de fapt, şase tipuri de scheme). Deoarece fiecare schemă, după cum vom demonstra, poate fi lucrată de maşina B, rezultatul general este o consecinţă imediată.

Acest rezultat este întrucîtva mai tare decît binecunoscutul fapt că toate funcţiile recursive sînt calculabile în sensul lui Turing, deoarece (pe lîngă $*$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, Cx) Turing permite şi alte instrucţiuni de bază, cum sînt radierea unei marcări, marcarea unui pătrat prin alte simboluri, transferul necondiţio-

nat și alte tipuri de transfer condiționat. Deși este evident că nu toate aceste instrucțiuni adiționale sînt indispensabile, nu este în nici un caz evident că într-adevăr ne putem lipsi de toate acestea. De fapt, demonstrația că sînt suficiente instrucțiunile $*$, $\rightarrow$, $\leftarrow$ și Cx, pe care o vom prezenta în paragraful următor, este destul de complicată.

Se știe, de asemenea, că toate funcțiile calculabile Turing sînt recursive. Deoarece toate funcțiile B-calculabile sînt evident calculabile Turing, rezultă că toate funcțiile B-calculabile sînt recursive. Această din urmă concluzie urmează, și în mod direct, din afirmația mai generală stabilită anterior că toate funcțiile calculabile cu ajutorul mașinii B sînt recursive.

Aceste rezultate stabilesc echivalența (sau: coextensivitatea) calculabilității în sensul lui Turing cu B-calculabilitatea în sensul că o funcție este calculabilă Turing dacă și numai dacă ea este B-calculabilă. Rezultatul principal că toate funcțiile recursive sînt B-calculabile furnizează, de asemenea, de exemplu, o demonstrație întrucîtva mai simplă a irezolubilității recursive a problemei lui Thue (problema cuvintelor pentru semigrupuri) (a se vedea Kleene [2], p. 382), deoarece trebuie luate în considerare mai puține operații de bază.

Întrerupem aci discuția generală, pentru a da detaliile demonstrației noastre a teoremei principale. Cititorul care nu este interesat de amănuntele tehnice poate să treacă peste părțile mai formale din paragraful următor.

§ 3. TOATE FUNCȚIILE RECURSIVE SÎNT B-CALCULABILE

Avem la dispoziție o caracterizare inductivă foarte simplă a clasei funcțiilor recursive: anumite funcții inițiale simple sînt recursive; fiind dată o clasă de funcții recursive, anumite scheme simple ne oferă iarăși funcții recursive; și cu aceasta se epuizează toate funcțiile recursive. Pentru a demonstra că toate funcțiile recursive sînt B-calculabile, vom folosi, așadar, inducția corespunzătoare: demonstrăm că funcțiile recursive inițiale sînt B-calculabile; apoi, că fiind dată o clasă de funcții B-calculabile, funcțiile obținute din ele cu ajutorul schemelor date sînt iarăși B-calculabile.

Urmîndu-l pe Turing, vom deosebi pe bandă pătrate principale și pătrate auxiliare. Deși în procedura lui Turing aceasta este doar o convenție de care ne putem lipsi, în cazul nostru, avînd în vedere faptul că nu permitem radierea nu este clar dacă ne putem lipsi de o asemenea distincție. Vom spune că un șir de pătrate alternative sînt pătrate principale și le vom denumi pătrate P; celelalte vor fi pătrate auxiliare, pătrate A. Întrebările și răspunsurile benzii sînt determinate de conținutul pătratelor P și numai al lor.

În general, între două pătrate P consecutive marcate, există un pătrat A care poate fi gol sau marcat. Fiecare număr întreg pozitiv n îl vom reprezenta printr-un șir de n perechi de pătrate (șir pe care îl vom numi „expresie numerică"), care la extremitatea stîngă începe cu un pătrat P și se încheie cu un pătrat A, astfel încît toate pătratele P din șir sînt marcate, iar pătratele P imediat precedente și imediat următoare șirului sînt goale. În treacăt fie spus acest procedeu lasă nereprezentat numărul 0. În mod deliberat considerăm numai întregii pozitivi. Dacă am fi dorit să includem numărul 0 am putea reprezenta pe n printr-un șir de $n + 1$ perechi de pătrate cu toate P pătratele marcate. Dar acest lucru nu este necesar. Vom spune că o expresie numerică

este pură, dacă toate pătratele ei A sînt goale. În general, introducem întotdeauna, la început, expresiile numerice pure. Începem să marcăm pătratele A dintr-o expresie numerică şi numai după aceea operăm cu ea (după cum vom vedea, aceasta înseamnă: o copiem).

Scopul nostru este de a arăta că pentru orice funcţie recursivă $f(x_1, ..., x_m)$, putem construi un program care atunci cînd este introdus în maşina B calculează toate valorile funcţiei. Acest ţel îl interpretăm după cum urmează. Fiind date argumente constante arbitrare $x_1, ..., x_m$, le reprezentăm undeva pe bandă de la stînga la dreapta în felul următor: întîi numărul x_1 urmat de un pătrat P gol şi un pătrat A gol, apoi x_2 urmat de un pătrat P gol şi un pătrat A gol etc. O dată date valorile argumentelor, înseamnă că s-a determinat care pătrate de pe bandă sînt pătrate P, deoarece primul pătrat al lui x_1 este un pătrat P. Programul nostru pentru funcţia $f(x_1, ..., x_m)$ urmăreşte să obţină ca pentru orice întregi pozitivi daţi $x_1, ..., x_m$ maşina B să se oprească în cele din urmă şi atunci să apară pe bandă o expresie numerică la dreapta căreia toate pătratele sînt goale şi care reprezintă numărul care este valoarea lui f pentru aceste valori date ale argumentelor $x_1, ..., x_m$, dacă numai f este definită pentru aceste valori particulare ale argumentelor. Dacă $f(x_1, ..., x_m)$ nu este definită, atunci maşina sau nu se va opri niciodată, sau se va opri atunci cînd pe bandă nu este nici o expresie numerică la dreapta căreia toate pătratele sînt goale (blocaj). Cu alte cuvinte, pentru fiecare funcţie recursivă căutăm să stabilim un program astfel, încît pentru orice aranjament al valorilor argumentelor (respectiv pentru orice valoare a argumentului, atunci cînd avem o funcţie de o variabilă) maşina B realizează un calcul separat pe o bandă separată. Dacă $f(x_1, ..., x_m)$ este definită pentru toţi $x_1, ..., x_m$ (adică funcţia nu este numai parţial recursivă, ci este şi general recursivă), putem utiliza aceeaşi bandă pentru a calcula succesiv toate valorile, întrucît fiecare calcul face uz doar de o porţiune finită a benzii infinite. Totuşi, pentru a simplifica lucrurile, preferăm să ne închipuim că de fiecare dată utilizăm o nouă bandă albă. Nu ne interesează ce face maşina cu programul în cazurile cînd conţinutul benzii iniţiale nu reprezintă exact o succesiune de m numere întregi.

Vom construi astfel programul nostru pentru funcţiile recursive, încît fiecare funcţie recursivă să fie nu numai B-calculabilă, dar şi în plus fiecare program să satisfacă anumite condiţii adiţionale. Presupunem că banda iniţială conţine o întrebare într-o formă corectă. Conform cu definiţia expresiilor numerice, oricare două expresii numerice trebuie să fie separate prin cel puţin un pătrat P gol. Programul va fi astfel, încît în cursul întregului proces de lucru al maşinii: (a) să nu avem niciodată mai mult decît două pătrate P goale între două expresii numerice; (b) fiecare pătrat P marcat să facă parte întotdeauna dintr-o expresie numerică; (c) să nu fie niciodată marcat un pătrat A care se află în afara porţiunii minime de pe bandă care conţine toate pătratele marcate la momentul respectiv; (d) pentru orice valori $x_1, ..., x_m$ maşina sau să nu se oprească niciodată, sau, dacă se opreşte, atunci banda finală să conţină o expresie numerică la dreapta căreia să nu mai existe pătrate marcate (adică: sau funcţia este definită, sau operaţia maşinii este circulară, dar blocajul nu intervine niciodată). Din (a) şi (c) rezultă că în fiecare etapă de lucru a maşinii între două pătrate marcate nu vor apărea niciodată mai mult decît cinci pătrate goale. Vom spune că o succesiune de cinci (respectiv trei) pătrate goale care se află între două pătrate marcate este o lacună mare (res-

pectiv o lacună). Din (a) și (c) rezultă că orice lacună sau lacună mare începe întotdeauna cu un pătrat A și se termină totdeauna cu un pătrat A. Putem elimina o lacună mare marcînd pătratul A din mijloc. Programul satisface în plus următoarele condiții: (e) dacă mașina se oprește pentru argumentele date $x_1, \ldots, x_m$, ultima expresie numerică va fi pură (adică nici un A pătrat din această expresie nu este marcat); (f) la oprire, toate lacunele mari sînt eliminate; (g) la oprire, dispozitivul de citire încheie prin a examina al cincilea pătrat gol de la dreapta ultimei expresii numerice, adică al șaselea pătrat gol care urmează după ultimul pătrat marcat (vom spune că cititorul încheie prin a examina deschiderea). Condiția (e) ne asigură că putem face uz imediat de valoarea unei funcții pentru a calcula valoarea unei alte funcții. Condiția (f) ne ajută să așezăm pe bandă expresiile numerice precedente.

Deoarece nu avem niciodată mai mult de cinci blancuri între două pătrate marcate, începînd cu momentul cînd dispozitivul de citire examinează un pătrat din interiorul regiunii minime a benzii care conține toate pătratele marcate, putem găsi cu ușurință începutul și sfîrșitul regiunii: mergem spre stînga (respectiv spre dreapta) pînă dăm de o succesiune de șase pătrate goale.

Introducem acum o subrutină Y, astfel încît dacă dispozitivul de citire examinează un pătrat care se află în interiorul regiunii minime a benzii ce conține toate pătratele marcate și șase pătrate goale la dreapta ultimului pătrat marcat, îndeplinirea lui Y permite dispozitivului de citire să stabilească ultimul pătrat marcat și să încheie, prin examinarea deschiderii, numai dacă inițial între două pătrate marcate n-au fost mai mult de cinci pătrate goale. Lucrul acesta este util, deoarece la începutul fiecărui program, pătratul inițial supus examinării se află întotdeauna în interiorul regiunii specificate. Să introducem întîi o subrutină X care ne permite să stabilim cel mai apropiat la stînga pătrat marcat față de pătratul supus examinării inițiale (dacă este marcat, atunci e vorba chiar de acest pătrat) și să încheiem cu un pătrat la dreapta.

Subrutina X: 1. $C14$, 2.$\leftarrow$3. $C14$, 4. $\leftarrow$, 5. $C14$, 6. $\leftarrow$, 7. $C14$, 8. $\leftarrow$, 9. $C14$, 10. $\leftarrow$, 11. $C14$, 12. $\leftarrow$, 13. $C14$, 14. $\rightarrow$, 15. $\rightarrow$, 16. $\leftarrow$.

Utilizînd X, definim Y:

(i) Subrutina Y: 1. X, 2. $\leftarrow$, 3. $\rightarrow$, 4. $C3$, 5. $\rightarrow$, 6. $C3$, 7. $\rightarrow$, 8, $C3$, 9. $\rightarrow$, 10, $C3$, 11. $\rightarrow$, 12. $C3$, 13. $\rightarrow$, 14. $C3$, 15. $\rightarrow$, 16. $\leftarrow$.

Acum introducem o subrutină care să ne permită să adunăm 1 la ultimul număr de pe bandă și să încheiem prin examinarea de către dispozitivul de citire a ultimului pătrat marcat. Utilizăm notația evidentă $\leftarrow^n$ (respectiv $\rightarrow^n$) atunci cînd $\leftarrow$ (respectiv $\rightarrow$) se repetă de n ori.

(ii) Subrutina A: 1. Y, 2. $\leftarrow^4$, 3. $*$ 4. $\rightarrow$, 5. $\leftarrow$; sau simplu Y, $\leftarrow^4$, $*$, $\rightarrow$, $\leftarrow$; ori chiar Y, $\leftarrow^4$, $*$.

Această subrutină poate fi repetată, permițîndu-ne astfel să adunăm la ultimul număr orice constantă dată k. În general, pentru orice subrutină sau program II, putem utiliza notația π^k pentru a reprezenta faptul că π se reptă de k ori, iar π^1 considerăm identic cu π. În cazul lui A, obiectivul lui A^k se poate realiza mai direct folosind $(A, \rightarrow^2, *)$, $(A, \rightarrow^2, *, \rightarrow^2, *)$ etc. Dar este

preferabil ca, ori de cîte ori avem posibilitatea, să facem uz de repetarea unor subrutine întregi.

Analog cu subrutina Y, putem introduce şi o subrutină H care să ne permită să stabilim cea mai apropiată lacună mare la stînga pătratului supus examinării (dacă există o asemenea lacună mare) şi să încheiem prin citirea pătratului de la mijlocul lacunei mari. Să observăm că dacă pătratul supus examinării iniţiale nu este marcat trebuie mai întîi să găsim un pătrat marcat.

(iii) Subrutina H: 1. $C3$, 2. $\leftarrow$, 3. $\leftarrow$, 4. $C3$, 5. $\leftarrow$, 6. $C3$, 7. $\leftarrow$, 8. $C3$, 9. $\leftarrow$, 10. $C3$, 11. $\leftarrow$, 12. $C3$, 13, $\rightarrow^2$, (14. $\rightarrow$, 15. $\leftarrow$.)

Din nou, succesul subrutinei depinde de faptul că nu îngăduim mai mult decît cinci blancuri între două pătrate marcate.

Pentru a direcţiona procedura noastră, să amintim că obiectivul este demonstraţia faptului că toate funcţiile recursive sînt B-calculabile şi că demonstraţia noastră se întemeiază pe posibilitatea de a obţine toate funcţiile recursive cu ajutorul a şase scheme. Dintre aceste şase scheme, primele trei sînt scheme directe: ele ne spun necondiţionat că funcţiile pe care le definesc sînt recursive; celelalte trei sînt scheme condiţionate. Ne ocupăm la început cu primele trei scheme, care sînt mai simple şi explicăm ce anume facem.

Schema I $\varphi(x) = x + 1$.
Schema II $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = q$, q fiind o constantă dată.
Schema III $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, i fiind una din constantele $1, \ldots, n$.

Pentru a arăta, de exemplu, că funcţia definită prin I este B-calculabilă, găsim un program astfel încît, atunci cînd pe bandă este dată valoarea argumentului x, iar maşina începe prin aceea că dispozitivul ei de citire examinează un pătrat din interiorul porţiunii minime ce conţine toate pătratele marcate iniţial şi şase pătrate goale la dreapta ultimului pătrat marcat, dispozitivul de citire va stabili ultimul pătrat marcat din reprezentarea numărului x, se va deplasa la dreapta cu şase pătrate (sărind astfel o lacună mare), va porni să copieze numărul x în pătratele P consecutive, va aduna 1 după încheierea operaţiei de copiere şi va indica că operaţia este completată. Vom avea astfel răspuns la întrebarea dacă ultimul număr de pe bandă este sau nu $x + 1$.

Pentru a obţine un asemenea program, partea cea mai dificilă este problema copierii, al cărei rezultat, desigur că urmează să varieze după numărul de copiat. Să presupunem, momentan, că am obţinut o subrutină de copiere:

(iv) Subrutina I_m: aceasta ne permite ca, începînd cu pătratul examinat, să copiem în succesiunea pătratelor alternative al m-lea număr (socotit de la dreapta la stînga), care se află la stînga celei mai apropiate lacune mari care precede pătratul supus citirii (adică se află la stînga acestui pătrat), încheind cu examinarea de către dispozitivul de citire a deschiderii.

Paşii de eliminare ai ultimei lacune mari şi de examinare a deschiderii se combină într-o subrutină:

(v) Subrutina Z: 1. H, 2. $*$ 3. Y sau, deoarece nu avem transfer condiţionat, simplu: H, $*$ Y.

Utilizînd Z, subrutinele A şi Y pe care le-am introdus mai sus şi subrutina I_m (care va fi introdusă formal ceva mai departe), putem demonstra că toate funcţiile definite prin schemele I, II şi III sînt B-calculabile.

Programele necesare sînt:

(I) Y, I_1, A, Z.
(II) Y, $* A^{q-1}$, Z; atunci cînd $q = 1$, mai simplu: Y, $* Z$.
(III) Y, I_{n-i+1}, Z.

Aşadar, pentru a completa această parte a demonstraţiei noastre, trebuie numai să construim subrutina I_m. În mod deliberat o vom face mai complicată decît este necesar, pentru ca una şi aceeaşi expresie numerică să poată fi copiată în mai multe rînduri. Pentru a copia o expresie numerică, avem de marcat pătratele A situate între pătratele marcate P din expresia numerică originară atîta timp cît avansăm, pentru a ţine seama de măsura în care am înaintat. Dacă facem uz de toate aceste pătrate auxiliare de la prima copie, atunci nu vom mai fi în stare să facem a doua copie de pe original; dar noi nu vrem să facem a doua copie de pe prima copie, deoarece vrem să operăm cu ea. În general, vrem să ne permitem posibilitatea de a copia un număr dat de două ori, astfel încît să putem opera cu copia şi să ne rezervăm o copie curată pentru „referire" ulterioară (adică pentru altă copiere).

Desigur că aceste complicaţii provin doar de la decizia noastră de a nu permite radierea. De fapt, avem aci un pas crucial al întregii demonstraţii. Deoarece putem să dorim să copiem o expresie numerică de un număr indefinit de ori şi deoarece la fiecare copiere trebuie să marcăm unele pătrate pentru a şti cît de mult am înaintat în acţiunea noastră, s-ar putea crede că radierea este indispensabilă. Dar dificultatea este rezolvată prin trucul simplu de care am vorbit: o expresie dată o copiem de două ori, apoi una dintre copii o copiem de două ori şi aşa mai departe.

Să introducem cîteva subrutine.

(vi) Subrutina D: 1. $C4$, 2. $\leftarrow^2$, 3. $C6$, 4. $\leftarrow^2$, 5. $C4$, 6. $\rightarrow$, 7. $\leftarrow$.

Aceasta îi permite dispozitivului de citire atunci cînd examinează un pătrat P să găsească şi să examineze ultimul pătrat P din expresia numerică imediat precedentă. Procesul poate fi repetat, astfel încît D^m ne dă ultimul pătrat P (marcat) a celei de a m-a expresii numerice (socotind de la dreapta la stînga) care precede pătratul examinat.

(vii) Subrutina G: 1. $\rightarrow$, 2, $\leftarrow^2$, 3. $C2$, 4. $\leftarrow^2$, 5. $C2$, 6. $\rightarrow$.

Cînd dispozitivul de citire examinează un pătrat P, această subrutină îi permite să stabilească cele mai apropiate pătrate A goale succesive de la stînga pătratului considerat şi să încheie, prin examinarea pătratului P dintre cele două pătrate A.

(viii) Subrutina K: 1. $C3$, 2. $C5$, 3. $\leftarrow$, 4. $C1$, 5. $\leftarrow$.

Adică: atunci cînd examinezi un pătrat marcat, caută cel mai apropiat la stînga pătrat gol şi încheie prin examinarea pătratului imediat precedent acestui blanc.

(ix) Subrutina M (a): 1. $C3$, 2. Ca, 3. $\leftarrow^2$, 4. $C6$, 5. A, Ca, 6. $\rightarrow$, 7. $C6$, 8. $*A^3$.

Cînd examinezi un pătrat P, dacă el este gol, această subrutină te pune să urmezi instrucţiunea a (care „scufundă" această subrutină într-o rutină mai

mare sau într-un program), iar dacă pătratul este marcat, atunci examinează pătratul P imediat precedent: dacă acesta este gol, atunci adună 1 la ultima expresie numerică de pe bandă şi ţine-te apoi de instrucţiunea a, iar dacă este marcat, află şi marchează cel mai apropiat pătrat gol la dreapta sa, adună 2 la ultima expresie numerică de pe bandă şi opreşte-te.

Acum sîntem în stare să definim subrutina I_m:

(x) Subrutina I_m: 1. $*$,2. H, $\leftarrow$, D^m, G, M (4), 3. $C2$, 4. Y.

Pentru a ilustra cum funcţionează aceasta, vom da o diagramă a unui exemplu simplu (copierea numărului izolat 6) cu $\downarrow$, indicînd pătratul examinat; aici asteriscul indică pătratele marcate, iar linioara blancurile:

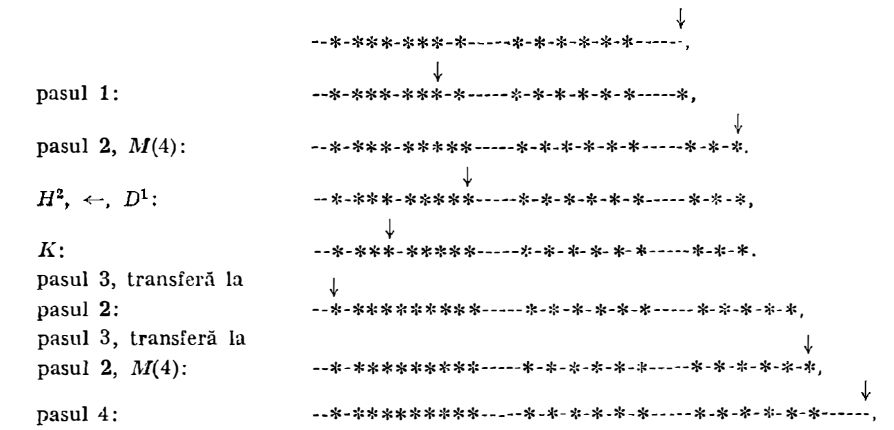
```
                                                  ↓
situaţia iniţială a benzii:   *-*-*-*-*-*------,
                                                  ↓
pasul 1:                      *-*-*-*-*-*-----*,
                                                ↓
pasul 2, H:                   *-*-*-*-*-*-----*,
                                              ↓
←, D¹:                        *-*-*-*-*-*-----*,
                                            ↓
G:                            *-*-*-*-*-*-----*,
                                          ↓
M(4): 1,3                     *-*-*-*-*-*-----*,
                                        ↓
      4,6                     *-*-*-*-*-*-----*,
                                                        ↓
      7,8                     *-*-*-***-*-----*-*-*,
Pasul 3, transferă la:
                                                ↓
pasul 2, H:                   *-*-*-***-*-----*-*-*,
                                            ↓
←, D¹:                        *-*-*-***-*-----*-*-*,
                                          ↓
G: 1,2                        *-*-*-***-*-----*-*-*,
                                        ↓
   3,4                        *-*-*-***-*-----*-*-*,
                                      ↓
   5,2                        *-*-*-***-*-----*-*-*,
                                    ↓
   3,4,                       *-*-*-***-*-----*-*-*,
                                    ↓
   5,6                        *-*-*-***-*-----*-*-*,
                                                        ↓
M(4):                         *-***-***-*-----*-*-*-*-*,
pasul 3, transferă la:
                                                ↓
pasul 2, H:                   *-***-***-*-----*-*-*-*-*,
                                            ↓
←, D¹:                        *-***-***-*-----*-*-*-*-*,
                                ↓
G:                            -*-***-***-*-----*-*-*-*-*,
                                ↓
M(4): 1, 3                    --*-***-***-*-----*-*-*-*-*,
                                                        ↓
      4, 5                    --*-***-***-*-----*-*-*-*-*-*.
                                                                ↓
Pasul 4:                      --*-***-***-*-----*-*-*-*-*-*-----
```

Acest exemplu clarifică întrucîtva subrutinele G, $M(a)$ și I_m. Obiectivul primar al lui $M(a)$ constă în a permite mașinii să copieze două unități simultan și să utilizeze cel mult o jumătate din pătratele A disponibile în expresia numerică de copiat, lăsînd spațiu pentru executarea unei a doua copii. Subrutina conduce la trei desfășurări diferite ale acțiunii, după cum (1) nu mai este nimic de copiat; (2) a mai rămas de copiat o singură unitate; (3) au rămas de copiat cel puțin două unități.

Odată ce posedăm I_m, demonstrația noastră că toate funcțiile definite prin schemele I, II și III sînt B-calculabile este încheiată. Dar rămîne să arătăm că celelalte trei scheme transformă funcții B-calculabile iarăși în funcții B-calculabile. Pentru aceasta, mai sînt necesare cîteva subrutine, mai ales pentru executarea celei de a doua copii a unei expresii numerice date.

(xi) Subrutina J_m: 1. *, H^2, $\leftarrow$, D^m, $\leftarrow^2$, 2. $M(4)$, H^2, $\leftarrow$, D^m, K, 3. $C2$, 4. Y.

Aceasta permite mașinii să execute a doua copie a celei de a m-a expresii numerice (socotind de la dreapta la stînga) care se află la stînga celei de-a doua lacune mari (socotind de la dreapta la stînga) care precede pătratul examinat. Pentru a ilustra această subrutină, luăm ca situație inițială a benzii (punînd $m = 1$):



Adesea avem nevoie să copiem nu o singură expresie numerică, ci o succesiune de asemenea expresii. Obținem cu ușurință două extinderi ale lui I_m și J_m.

(xii) $\bar{I}_m$: I_m, $\leftarrow^2$, I_{m-1}, $\leftarrow^2$, ..., $\leftarrow^2$ I_1. De exemplu. $\bar{I}_2$ se reduce la I_1, $\leftarrow^2$, I_2; $\bar{I}_3$ este I_3, $\leftarrow^2$, I_2, $\leftarrow^2$, I_1; și așa mai departe.

(xiii) $\bar{J}_m$: J_m, $\leftarrow^2$, J_{m-1}, $\leftarrow^2$, ..., $\leftarrow^2$, J_1.

Vom folosi, de asemenea, notația $\bar{J}_m - J_1$ pentru subrutina care se obține din $\bar{J}_m$ prin omiterea la sfîrșit a semnelor $\leftarrow^2$, J_1.

O variantă ușoară a lui I_m constă în a copia $y-1$ în loc de y al m-lea număr la stînga celei mai apropiate lacune mari care precede pătratul supus examinării.

(xiv) Subrutina L_m: 1. *, 2. H, D^m, $\leftarrow^2$, G, $M(4)$, 3. $C2$, 4. Y.

Această subrutină se deosebește de I_m prin faptul că în pasul 2 se inserează $\leftarrow^2$. Desigur că această subrutină se poate aplica numai atunci cînd $y > 1$.

Acum sîntem pregătiți pentru a ne ocupa de celelalte trei scheme.

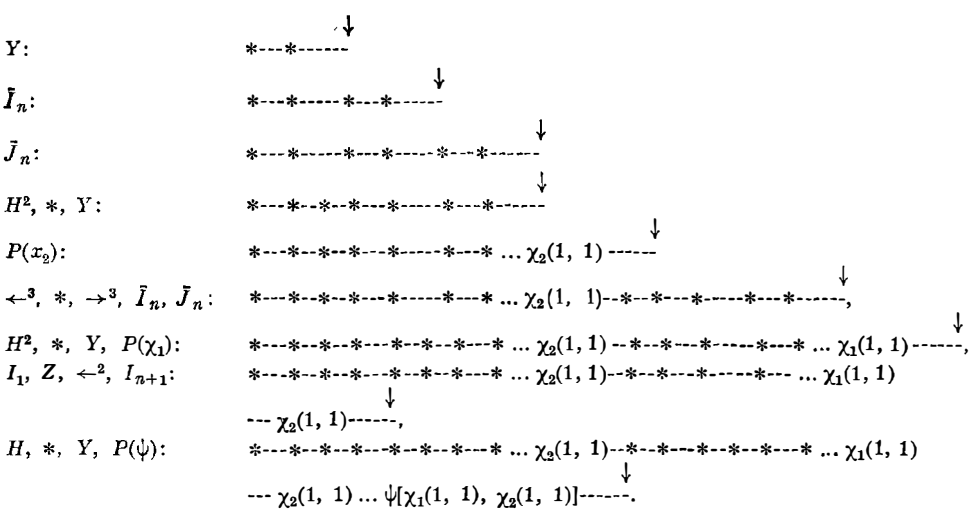
(IV) Dacă $\chi_1, \ldots \chi_m$ și ψ sînt recursive (respectiv B-calculabile), atunci funcția definită prin schema următoare este de asemenea recursivă (respectiv B-calculabilă):

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi[\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)].$$

Presupunem că programele pentru $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_m$ sînt respectiv $P(\psi)$, $P(\chi_1), \ldots, P(\chi_m)$; trebuie să stabilim programul $P(\varphi)$ pentru funcția φ. Intuitiv, programul $P(\varphi)$ va organiza următoarele: copiază valorile argumentelor $x_1, \ldots, x_n$ de două ori; păstrează curată prima copie, iar din a doua cu programul $P(\chi_m)$ află valoarea lui $\chi_m(x_1, \ldots, x_n)$; apoi face două copii de pe copia curată a lui $x_1, \ldots, x_n$ și obține valoarea lui $\chi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n)$ cu o copie și $P(\chi_{m-1})$; repetînd acest proces, se obțin valorile pentru $\chi_m(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_1(x_1, \ldots, x_n)$; le copiază în ordinea $\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)$ și aplică apoi programul $P(\psi)$. Se obține valoarea lui $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Luînd, pentru exemplificare, $m = 2$, programul $P(\varphi)$ arată în felul următor:

$$Y, \bar{I}_n, \bar{J}_n, H^2, *, Y, P(\chi_2), \leftarrow^3, *, \rightarrow^3, \bar{I}_n, \bar{J}_n, H^2, *, Y, P(\chi_1), I_1, Z, \leftarrow^2, I_{n+1}, H, *, Y, P(\psi).$$

Anumite complicații superficiale sînt necesare în program pentru a asigura adunarea la un loc a diferitelor valori ale funcțiilor $\chi_m(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_1(x_1, \ldots, x_n)$. Pentru acest program dăm un exemplu simplu cu $n = 2$, $x_1 = x_2 = 1$ (întîmplător, utilizarea lui Y înainte de $P(\chi_1)$ sau $P(\psi)$ este redundantă, dar servește pentru lămurirea exemplului):



Acum avem schema recurenței primitive:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \varphi(1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n), \\ \varphi(z+1, x_2, \ldots, x_n) = \chi[z, \varphi(z, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots x_n]. \end{cases}$$

Fiind date programele $P(\psi)$ şi $P(\chi)$, avem de obţinut un program $P(\varphi)$ pentru funcţia $\varphi(y, x_2, ..., x_n)$. Intuitiv, numărul aplicaţiilor lui $P(\chi)$ în evaluarea lui $\varphi(y, x_2, ..., x_n)$ este nemărginit; pentru un y dat avem de aplicat $P(\chi)$ de $y - 1$ ori. Aceasta se realizează testînd succesiv dacă y este 1, $y - 1$ este 1 sau $y - 2$ este 1 sau etc. Astfel evaluăm $\psi(x_2, ..., x_n)$ cu $P(\psi)$ şi testăm dacă y este 1. Dacă y este 1, copiem $\psi(x_2, ..., x_n)$ ca răspuns la $P(\varphi)$; dacă y nu este 1, evaluăm $\chi[1, \psi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n]$ şi testăm dacă $y - 1$ este 1. Dacă $y - 1$ nu este 1, evaluăm $\chi\{2, \chi[1, \psi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n], x_2, ..., x_n\}$ şi testăm dacă $y - 2$ este 1. Şi aşa mai departe. Programul $P(\varphi)$ este:

1. Y, $\bar{I}_n$, $\leftarrow^2$, $*$, $\rightarrow^6$, $\bar{J}_{n-1}$, H^2, $*$, Y, $P(\psi)$, $\leftarrow^2$, I_{n+1}, $\leftarrow^6$,
2. $\leftarrow^2$, $C4$,
3. $\rightarrow^2$, $C5$,
4. $\rightarrow^6$, $\bar{I}_n$, A, Y, L_1, I_{n+2}, $\bar{J}_n - J_1$, H^2, $*$, Y, $P(x)$, $\leftarrow^2$, L_{n+1}, $\leftarrow^6$, $C2$,
5. $\rightarrow^4$, I_2, Z.

Dăm un exemplu cu $n = 2$, $y = 3$, $x_2 = 2$.

1. Y: $*\text{-}*\text{-}*\text{---}*\text{-}*$ ↓

$\bar{I}_n$, $\leftarrow^2$, $*$, $\rightarrow^6$, $\bar{J}_{n-1}$, H^2, $*$ Y: $***\text{-}*\text{---}*\text{-}*\text{--}*\text{--}*\text{-}*\text{-}*\text{--}*\text{-}*\text{---}*\text{-----}*\text{-}*$ ↓ (copiezi y, x_2, ..., x_n, apoi îl scrii pe 1, apoi lacuna mare, apoi iarăşi x_2, ..., x_n şi după aceea marchezi prima lacună mare, terminînd cu examinarea deschiderii).

$P(\psi)$, $\leftarrow^2$, I_{n+1}, $\leftarrow^6$: $[\underbrace{***\text{-}*}_{y}\underbrace{\text{---}*\text{-}*}_{x}\text{--}*\text{--}\underbrace{****\text{-}*}_{y}\text{---}]\underbrace{*\text{-}*}_{x}\text{---}\underbrace{*}_{1}\text{-----}\underbrace{*\text{-}*}_{x}\cdots\psi(x)\text{---}\underbrace{*\text{-}*\text{-}*}_{y}$ ↓ (se evaluează $\psi(x_2, ..., x_n)$ apoi se copiază y şi se încheie examinînd sfîrşitul lui y).

2. $\leftarrow^2$, $C4$ (cînd urmează după pasul 1, acest pas testează dacă y este 1. Dacă y este 1, atunci urmează pasul 3 şi pasul 5 şi prin copierea lui $\psi(x_2, ..., x_n)$ calculul este complet. Dacă y nu este 1 atunci treci la pasul 4, aşa cum se procedează în exemplul de faţă).

4. $\rightarrow^6$, $\bar{I}_n$, A, Y, L_1, I_{n+2}, $\bar{J}_n - J_1$, H^2, $*$, Y: $[\underbrace{*\text{-}*}_{x}\text{---}\underbrace{*}_{1}\text{--}\underbrace{*\text{-}*}_{x}\cdots\psi(x)\text{---}]\underbrace{*\text{-}*\text{-}*}_{y}\text{---}\underbrace{*\text{-}*}_{x}$
↓
$\text{---}\underbrace{*\text{-}*}_{2}\text{-----}\underbrace{*}_{1}\text{---}\psi(x)\text{---}\underbrace{*\text{-}*}_{x}\text{-----}$ (copiezi $x_2, ..., x_n$ înlocuieşti 1 cu 2, sari lacuna mare, apoi copiezi $2 - 1$, $\psi(x_2, ..., x_n)$, $x_2, ..., x_n$ şi marchezi prima lacună mare, terminînd prin examinarea deschiderii).

$P(\chi)$, $\leftarrow^2$, L_{n+1}, $\leftarrow^6$, $C2$: $[\underbrace{*\text{-}*\text{-}*}_{y}\text{---}]\underbrace{*\text{-}*}_{x}\text{---}\underbrace{*\text{-}*}_{2}\text{-----}\underbrace{*}_{1}\text{---}\psi(x)\text{---}\underbrace{*\text{-}*}_{x}\cdots\chi[1, \psi(x), *]\text{---}$ ↓ $\underbrace{*\text{-}*}_{y-1}$ (evaluezi $\chi[1, \psi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n]$ şi scrii $y-1$, pregătind transferul la pasul 2 pentru a testa dacă $y - 1$ este 1).

2. Acum testăm dacă $y - 1 = 1$. Deoarece în exemplul nostru $y - 1 \neq 1$, repetăm pasul 4 pentru $y - 2$:

4. $\rightarrow^6$, $\bar{I}_n$, A, Y, L_1, I_{n+2}, $\bar{J}_n - J_1$, H^2, $*$, Y: $[\underbrace{*\text{-}*}_{x}\text{---}\underbrace{*\text{-}*}_{2}\text{--}\underbrace{*}_{1}\text{---}\psi(x)\text{---}\underbrace{*\text{-}*}_{x}\cdots\chi[1, \psi(x),$
↓
$x]\text{---}]\underbrace{*\text{-}*}_{y-1}\text{---}\underbrace{*\text{-}*}_{x}\text{---}\underbrace{*\text{-}*\text{-}*}_{3}\text{-----}\underbrace{*\text{-}*}_{2}\cdots\chi[1, \psi(x), x]\text{---}\underbrace{*\text{-}*}_{x}\text{-----}$ (copiezi $x_2, ..., x_n$ şi înlocuieşti 2 cu 3

sări lacuna mare, apoi copiezi $3-1$, $\chi[1, \psi(x_2, \ldots x_n), x_2, \ldots, x_n], x_2, \ldots, x_n$, marchezi prima lacună mare şi închei examinînd deschiderea).

$P(\chi)$, $\leftarrow^2$, L_{n+1}, $\leftarrow^6$, $C2$: $[\underbrace{*\text{-}*\cdots}_{y-1}]\underbrace{*\text{-}*}_{x}\cdots\underbrace{*\text{-}*\text{-}*}_{3}\cdots\underbrace{*\text{-}*}_{2}\cdots\chi[1, \psi(x), x]\cdots\underbrace{*\text{-}*}_{x}\cdots\chi[2, \chi[1, \psi(x), x], x]\cdots\underset{\downarrow}{*}$ (evaluezi $\chi[2, \varphi(2, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]$ şi scrii $y-2$ pregătind transferul la pasul 2 pentru a testa dacă $y-2$ este 1).

2. Acum acest pas testează dacă $y-2=1$. Deoarece în exemplul nostru $y-2=1$, trecem la pasul 3 şi apoi la pasul 5.

5. Acum acest pas dă răspunsul final $\chi[2, \varphi(2, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]$, marchează lacuna mare rămasă şi încheie prin citirea deschiderii: $[\underbrace{*\text{-}*}_{x}\cdots\underbrace{*\text{-}*\text{-}*}_{3}\cdots\underbrace{*\text{-}*}_{2}\cdots\chi[1, \psi(x), x]\cdots\underbrace{*\text{-}*}_{x}\cdots\chi[2, \chi[1, \psi(x), x], x]\cdots*]\cdots\chi[2, \chi[1, \psi(x), x], x]\cdots\underset{\leftarrow y-2}{\downarrow}$.

În sfîrşit, trebuie să ne ocupăm de schema referitoare la operatorul μ („cel mai mic număr astfel încît"):

(VI) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y[\chi(x_1, \ldots, x_n, y) = 1]$.

Construirea lui $P(\varphi)$ pornind de la $P(\chi)$ este întrucîtva similară cu aceea de la cazul schemei (V) dar mai simplă. Fiind date valorile pentru $x_1, \ldots, x_n$, calculăm întîi $\chi(x_1, \ldots, x_n, 1)$ şi vedem dacă valoarea sa este 1. Dacă da, ne oprim; dacă nu, calculăm $\chi(x_1, \ldots, x_n, 2)$. Şi aşa mai departe. Programul $P(\varphi)$ arată astfel:

1. Y, $\bar{I}_n$, $\leftarrow^2$, $*$, $\rightarrow^6$, $\bar{J}_n$. $\leftarrow^2$, $*$,
2. H^2, $*$, $P(\chi)$, $\leftarrow^3$, $*$, $\leftarrow^8$, $C4$,
3. $\rightarrow^2$,, $C5$,
4. $\rightarrow^6$, $\bar{I}_{n+1}$, A, $\rightarrow^6$, $\bar{J}_{n+1}$, A, $C2$,
5. $\rightarrow^4$, I_1, Z.

Cu aceasta se încheie demonstraţia teoremei că toate funcţiile recursive sînt B-calculabile. Aşadar, o funcţie recursivă se defineşte printr-o succesiune finită de condiţii avînd fiecare una din formele (I) — (VI), simbolurile funcţionale cuprinse în partea dreaptă a condiţiei fiind introduse în cazul formelor IV, V şi VI, aşa precum s-a arătat. Aşadar, trebuie să asamblăm programele pentru aceste condiţii într-o ordine corespunzătoare pentru a obţine programul pentru funcţia recursivă finală pe care o determină mulţimea condiţiilor respective. Deoarece acest proces de asamblare este mecanic, am putea, la nevoie, să proiectăm un program de asamblare a subrutinelor (I) — (VI) pentru orice definiţie dată a unei funcţii recursive. Acesta ar fi un exemplu foarte simplu de „programare automată". Nu ne vom ocupa însă cu această chestiune.

Vom spune că o funcţie B-calculabilă este completă atunci cînd funcţia este definită pentru toate valorile argumentelor. Deoarece funcţiile B-calculabile şi cele (parţial) recursive au aceeaşi extensiune rezultă că funcţiile complete B-calculabile sînt tocmai funcţiile general recursive.

Să facem o paranteză în legătură cu definiţiile recursive, aşa cum sînt ele date în logica matematică. Exact cum definim funcţii viteză pentru programele lui B şi funcţiile corespunzătoare lor în termenii timpului necesar (socotit în număr de paşi) pentru a evalua benzile de intrare, tot astfel putem defini funcţii de viteză pentru funcţiile recursive introduse prin schemele (I) — (VI) conform cu numărul de paşi necesari pentru a evalua funcţia pornind de la o definiţie dată cu ajutorul unor reguli standard (Kleene [2], p. 264, p. 326). Corespunzător fiecărei mulţimi de ecuaţii E care defineşte o funcţie recursivă $f(n)$, există o anumită funcţie de viteză $f_s(n)$ care, pentru fiecare constantă n_0, stabileşte o margine superioară a numărului de rînduri (egalităţi derivate) necesar pentru derivarea logică a valorii lui $f(n_0)$ pornind de la E. Evident, orice funcţie recursivă admite diferite definiţii, iar una şi aceeaşi definiţie (mulţime de egalităţi E) are mai multe funcţii de viteză corespunzătoare. Este o chestiune destul de simplă să dăm o funcţie de viteză corespunzătoare pentru fiecare funcţie definită prin schemele (I) — (VI). Să le zicem acestor funcţii (I_s) — (VI_s).

(I_s) $\Phi_s(x) = 1$,

(II_s) $\Phi_s(x_1, ..., x_n) = 1$,

(III_s) $\Phi_s(x_1, ..., x_n) = 1$,

(IV_s) $\Phi_s(x_1, ..., x_n) = (\chi_1)_s(x_1, ..., x_n) + ... + (\chi_m)_s(x_1, ..., x_n) + m + 1 + \psi_s[\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n)]$.

(V_s) $\begin{cases} \Phi_s(1, x_2, ..., x_n) = \psi_s(x_2, ..., x_n) + 1, \\ \Phi_s(z+1, x_2, ..., x_n) = \Phi_s(z, x_2, ..., x_n) + 1 + \chi_s[z, \Phi(z, x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n] + 1, \end{cases}$

(VI_s) $\Phi_s(x_1, ..., x_n) = 1 + \sum_{i=1}^{\mu_y[\chi(x_1, ..., x_n, y) = 1]} [\chi_s(x_1, ..., x_n, i) + 3]$.

Această digresiune subliniază că, în multe cazuri, deşi o funcţie este B-calculabilă sau recursivă, nu ştim de la început cît timp îi va trebui maşinii ca să ne dea răspunsul sau ca ecuaţiile să ofere linia dorită pentru fiecare argument dat. Lucrurile stau astfel chiar dacă ne ocupăm numai de funcţiile complete B-calculabile sau funcţii general recursive. În ce priveşte funcţiile recursive, elementul nedeterminat este concentrat în schema VI şi în schema corespunzătoare VI_s. Pentru ca o funcţie recursivă definită prin VI să fie general recursivă este necesar ca pentru orice $x_1, ..., x_n$ *să existe un* y, astfel încît $\chi(x_1, ..., x_n, y) = 1$. Însă în general această condiţie nu ne spune cît de mare trebuie să fie y, pentru ca să poată satisface această ecuaţie atunci cînd $x_1, ..., x_n$ sînt daţi.

Desigur că definiţiile pentru funcţiile de viteză nu se pot aplica direct la calculatoarele cifrice de uz curent. Credem însă că aceste definiţii idealizate ar putea fi de folos pentru studiul unor cazuri mai practice.

§ 4. INSTRUCŢIUNI DE BAZĂ

Avînd în vedere definiţia pe care am dat-o programului, dacă scriem numai cîte o singură instrucţiune în fiecare rînd, atunci este clar că pentru fiecare n sînt posibile n^{n+4} programe de $n + 2$ rînduri, deoarece în fiecare rînd instrucţiunea poate fi una dintre următoarele: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$, $C1, ..., C(n+1)$ iar ultimele două linii sînt întotdeauna: $n + 1. \rightarrow$, $n + 2. \leftarrow$.

Mai sînt şi alte instrucţiuni de bază posibile de care am evitat să facem uz. Între acestea, principalele sînt radierea E, transferul necondiţionat Ux care instruieşte maşina să urmeze instrucţiunea x independent de conţinutul pătratului supus citirii şi transferul condiţionat dual $C'x$ care instruieşte maşina să urmeze instrucţiunea x cînd pătratul supus citirii este gol sau să treacă la instrucţiunea următoare în caz contrar. Dintre acestea, radierea introduce o nouă acţiune de bază, pe cînd transferele nu. Dacă lăsăm la o parte E, atunci teoretic avem 16 posibilităţi pentru instrucţiunile de bază: dacă pătratul supus citirii este marcat, se pot efectua patru lucruri diferite, şi anume $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$, instrucţiunea x pentru un anumit x dat, şi la fel în cazul cînd pătratul supus citirii este gol. Aşadar avem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$*$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$*$	$*$	$*$	$*$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	w	w	w	w
—	$\rightarrow$	$*$	$\leftarrow$	x	$\rightarrow$	$*$	$\leftarrow$	y	$\rightarrow$	$*$	$\leftarrow$	z	$\rightarrow$	$*$	$\leftarrow$	u

Variabilele x, y, z, w, u pot, la rîndul lor, să ia o infinitate de valori diferite. Fiind dat N, sînt posibile $(3 + N)^2$ instrucţiuni de bază diferite în fiecare program cu N linii, deci cu totul $N^{(3+N)^2}$ posibilităţi. În tabelul de mai sus paşii de bază $\rightarrow$, $*$, $\leftarrow$ sînt respectiv 1, 6, 11, pe cînd transferul necondiţionat şi cele două transferuri condiţionate sînt cazuri particulare ale lui 16. În general, dacă folosim M simboluri de bază (în locul simbolului unic asterisc, $*$), vom avea $M + 2$ acţiuni de bază ($\leftarrow$, $\rightarrow$ şi tipărirea fiecărui simbol în parte), $M + 1$ posibilităţi pentru conţinutul unui pătrat, $(M + 3)^{M+1}$ tipuri posibile de instrucţiuni de bază şi $(M + 1 + N)^{M+1}$ posibilităţi pentru instrucţiunile de bază ale programelor cu N linii. Dacă permitem radierea, atunci numerele respective vor fi $M + 3$, $M + 1$, $(M + 4)^{M+1}$ şi $(M + 2 + N)^{M+1}$.

Să ne concentrăm atenţia asupra maşinii B şi a celor şapte tipuri simple de instrucţiuni care i se pot aplica: Cx, $C'x$, Ux, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$ şi E. Din cele ce am demonstrat rezultă un corolar care se poate exprima oarecum astfel: calculele ce se pot realiza făcînd uz de $C'x$, Ux şi E pot fi realizate şi recurgînd numai la $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$ şi Cx. Desigur că aceasta nu înseamnă că atunci cînd sînt date $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$, Cx, fiecare lucru ce se poate executa cu $C'x$, Ux, E poate fi executat şi fără ele.

De fapt, există multe lucruri ce se pot realiza atunci cînd permitem radierea, dar nu pot fi realizate în caz contrar. Ne putem dispensa de radiere numai în sensul că toate funcţiile care sînt calculabile cînd se recurge la radiere sînt calculabile şi fără a recurge la ea. De exemplu, dacă permitem radierea, putem aşeza programele astfel încît dacă maşina începe prin examinarea valorilor argumentului unei funcţii de pe bandă, după realizarea programului apare pe bandă la sfîrşitul operaţiei numai valoarea funcţiei (răspunsul), tot restul fiind radiat. Evident că în general acest lucru este imposibil dacă nu permitem radierea. De exemplu, este imposibil atunci cînd răspunsul este mai scurt decît întrebarea.

Există unele lucruri simple care pot fi realizate cu ajutorul lui $C'x$ sau Ux, dar nu se pot realiza făcînd apel numai la Cx, $\rightarrow$, $\leftarrow$, şi $*$. Să presupunem că ştim că undeva la stînga pătratului supus citirii se află un pătrat marcat, dar nu ştim cît de departe este dînsul. Nu putem construi un program cu Cx, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$ care să ne permită întotdeauna să stabilim cel mai apropiat

pătrat marcat din stînga fără a introduce noi pătrate marcate, deoarece fiind dat un program explicit cu, să spunem, n linii, dispozitivul de citire nu poate ajunge la vreun pătrat marcat, dacă între pătratul supus citirii și cel mai apropiat pătrat marcat se află n sau mai multe pătrate goale. Lucrurile stau astfel pentru că numai $\leftarrow$ poate organiza mișcarea la stînga a dispozitiului de citire, Cx nu poate produce nici o acțiune periodică, dacă nu dăm de vreun pătrat marcat. Însă acest lucru este ușor de realizat fie atunci cînd dispunem de $C'x$, fie atunci cînd dispunem de Ux și Cx. Astfel: 1. $\leftarrow$, 2. $C'1$, se va opri atunci și numai atunci cînd cititorul dă de un pătrat marcat. Sau: 1. $\leftarrow$, 2. $C4$, 3. $U1$, 4. $\rightarrow$, 5. $\leftarrow$; aici pașii 4 și 5 înseamnă, desigur, „stop". Similar, folosind numai $C'x$ nu putem întotdeauna să găsim cel mai apropiat pătrat gol anterior pătratului supus citirii, dacă nu știm cît de departe se află el.

Atunci cînd sînt date Ux și Cx, ne putem dispensa de $C'x$; cînd sînt date Ux și $C'x$, ne putem dispensa de Cx; cînd sînt date Cx și $C'x$, ne putem dispensa de Ux. Fie că avem un program avînd k linii și că una dintre linii este $m.\ C'n$ ($m,\ n \leqslant k$). Putem elimina $C'n$ modificînd linia $m.\ C'n$ și cele următoare precum urmează: dacă $n \geqslant m$, înlocuim linia $m.\ C'n$ prin $m.\ C\ (m+2),\ m+1.\ U\ (n+1)$, după care mărim cu o unitate numărul de ordine al tuturor liniilor următoare (adică peste tot înlocuim $m+i$ prin $m+i+1$); dacă $n < m$, atunci înlocuim $m.\ C'n$ prin $m.\ C\ (m+2),\ m+1.Un$, mărind cu o unitate numărul de ordine al liniilor următoare. În cazul neobișnuit $k = m$, avem de adăugat două linii în plus: $m+2.\rightarrow,\ m+3.\leftarrow$. Similar, putem elimina Cx utilizînd Ux și $C'x$. Eliminarea lui Ux făcînd apel la Cx și $C'x$ este și ea asemănătoare: înlocuim pur și simplu $m.Un$ prin $m.Cn,\ m+1.C'n$ (sau $m.C(n+1),\ m+1.\ C'(n+1)$) și modificăm în mod corespunzător liniile următoare.

Este interesant de știut că unele lucruri simple nu le putem realiza nici măcar cu C, C' și U la un loc. Să presupunem că știm că undeva pe bandă avem un pătrat marcat, iar dispozitivul de citire examinează un pătrat gol; dorim să stabilim un program care să ne permită găsirea unui pătrat marcat fără introducerea unor noi pătrate marcate, după care să se oprească. Firesc ar fi să ne gîndim, de exemplu, la: $\rightarrow$, $\leftarrow^2$, $\rightarrow^3$, $\leftarrow^4$ etc.; cu alte cuvinte, caută alternativ la stînga și la dreapta. Vrem să demonstrăm că nici un program care face uz numai de Cx, $C'x$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$ și Ux nu poate realiza acest lucru. Este evident că asteriscul trebuie lăsat la o parte o dată ce nu vrem să apară noi pătrate marcate. Nu avem de ce să luăm în considerație Ux, deoarece utilizarea sa poate fi întotdeauna înlocuită prin apel la Cx și $C'x$. Să presupunem dat un program arbitrar cu N linii, care face apel numai la $\rightarrow$, $\leftarrow$, Cx și $C'x$; să arătăm că el nu poate realiza ceea ce urmărim noi. Fie că în acest program nu figurează o linie de forma $m.C'n$ cu $n < m$. Dacă între pătratul marcat cel mai apropiat și pătratul supus citirii inițiale se află mai mult decît N pătrate, atunci evident că programul nu ne poate conduce la un pătrat marcat. Așadar, unicul caz interesant este cazul programului care conține o linie de forma $m.C'n$, cu $n < m$.

Fie P un asemenea program dat arbitrar. Vom demonstra acum că există o situație inițială a benzii, în care figurează un pătrat marcat pe care P nu este în stare să-l găsească. Să presupunem că P conține N linii dintre care K sînt de forma $m.C'n$, cu $n < m$. Să considerăm, în primul rînd, cum se va comporta P față de o bandă cu toate pătratele goale. Avem două posibilități.

Executînd programul P sau există una dintre cele K linii de forma $m.C'n$ ($n < m$) pe care o întîlnim mai mult decît o dată, sau nu există nici o asemenea linie. În cazul al doilea, întrucît numai asemenea linii ne permit să revenim la liniile anterioare, întregul program va fi realizat în nu mai mult decît $(K + 1)N$ pași. Prin urmare, dacă între pătratul supus inițial citirii și pătratul marcat se află mai mult decît $(K + 1)N$ pătrate, programul P nu ne va permite să găsim pătratul marcat. În celălalt caz, fie m_1. $C'n_1$ ($n_1 < m_1$) linia care în cursul executării programului o întîlnim pentru a doua oară într-un stadiu mai înaintat. Am executat nu mai mult decît $(K + 1)N$ pași înainte de a întîlni pentru a doua oară această linie. Mai mult, deoarece presupunem că inițial banda este goală, pașii dintre prima întîlnire a liniei și a doua se vor repeta întru totul. Să numim *origine* pătratul supus citirii la prima întîlnire. În cursul realizării programului dintre cele două întîlniri, vom avea, să zicem, N_1 pătrate examinate la stînga originii, N_2 pătrate examinate la dreapta ei, iar dispozitivul de citire va examina la a doua vizită un pătrat (denumit „noua origine") situat, de exemplu, cu N_3 pătrate la dreapta originii. Știm că N_1, N_2, N_3 sînt numere mai mici decît $(K + 1)N$. Deoarece „originea" se va păstra atunci cînd ne deplasăm la dreapta, vedem că dacă pătratul inițial marcat este la stînga pătratului supus citirii inițiale cu mai mult decît $2(K + 1)N$ pătrate, atunci programul P nu ne poate permite să găsim pătratul.

Dacă se permite radierea, atunci dispunem de mai multă libertate. De exemplu, putem proiecta un program care făcând uz numai de $*$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, Cx și E, ne va permite să găsim un pătrat marcat numai dacă pe bandă se află vreun pătrat marcat. În esență, începem cu pătratul supus citirii și mergem alternativ la stînga și la dreapta ($\leftarrow$, $\rightarrow$, $\leftarrow^2$, $\rightarrow^2$, $\leftarrow^3$, $\rightarrow^3$ etc.) marcînd fiecare pătrat gol din partea stîngă (respectiv dreaptă), dacă pătratul imediat precedent (respectiv următor) este de asemenea gol. După ce am găsit un pătrat marcat dincolo de porțiunile pe care le-am marcat noi, eliminăm marcările pe care le-am introdus și revenim la pătratul marcat găsit. Rutina are 42 linii:

1. $C41$, 2. $\leftarrow$, 3. $C41$, 4. $\rightarrow$, 5. $\rightarrow$, 6. $C41$, 7. $\leftarrow$, 8. $*$, 9. $\leftarrow$, 10. $\leftarrow$, 11. $C24$, 12. $\rightarrow$, 13. $*$, 14. $\rightarrow$, 15. $C14$, 16. $\rightarrow$, 17. $C33$, 18. $\leftarrow$, 19. $*$, 20. $\leftarrow$, 21. $C20$, 22. $\rightarrow$, 23. $C9$, 24. $\rightarrow$, 25. $\rightarrow$, 26. $C25$, 27. $\leftarrow$, 28. E, 29. $\leftarrow$, 30. $C28$, 31. $\leftarrow$, 32. $C41$, 33. $\leftarrow$, 34. $\leftarrow$, 35. $C34$, 36. $\rightarrow$, 37. E, 38. $\rightarrow$, 39. $C37$, 40. $\rightarrow$, 41. $\rightarrow$, 42. $\leftarrow$.

Cînd avem la dispoziție radierea, putem de asemenea deriva una dintr-alta Cx și $C'x$. Să demonstrăm cum de este posibil atunci cînd este dat un program care recurge numai la $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$, Cx, $C'x$, Ux și E să găsim un program care recurge numai la $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$, Cx și E realizînd aceeași funcție. După cum am arătat înainte, făcînd uz de Cx și $C'x$ putem elimina Ux. Acum dorim să eliminăm și $C'x$. Să luăm prima intrare a lui $C'x$ în programul dat. Să presupunem că linia este m. $C'n$ cu $n < m$. Construim un program nou în felul următor: (i) lăsăm neschimbate primele $n - 1$ linii; (ii) înlocuim liniile n și $n + 1$ prin: $n.C(n + 2)$, $n + 1.E$; (iii) renumerotăm liniile inițiale de la n la $m - 1$, dîndu-le numărul de ordine de la $n + 2$ la $m + 1$; (iv) înlocuim linia inițială m prin $m + 2.C(m + 5)$, $m + 3$. $*$, $m + 4.C(n + 1)$; (v) renumerotăm toate liniile inițiale $m + i$, dîndu-le numărul de ordine $m + i + 4$; (vi) modificăm

în mod corespunzător referirile la aceste linii ori de cîte ori intervine transferul condiționat. Lăsăm pe seama cititorului verificarea faptului că programul nou realizează același lucru ca cel originar. Dacă $n \geqslant m$, se pot face construcții asemănătoare. Repetînd procesul, putem elimina toate intrările lui $C'x$.

Pare neverosimil că am putea înlătura vreunul dintre cele patru tipuri de bază $*$, Cx, $\rightarrow$, și $\leftarrow$, fără a adăuga alte operații, astfel încît să putem totuși calcula toate funcțiile recursive. Pentru a da o demonstrație exactă a indispensabilității fiecăruia dintre cele patru tipuri de instrucțiune, am putea proceda ca în § 2: reprezentăm prin întregi pozitivi conținutul posibil al benzii, considerăm toate programele posibile obținute prin utilizarea numai a trei din cele patru tipuri de bază, trecem în revistă toate transformările posibile pe care le pot realiza aceste programe asupra intrărilor inițiale ale benzii și arătăm că ele nu cuprind toate funcțiile recursive. De exemplu, să presupunem că facem uz numai de $*$, Cx și $\rightarrow$. Pentru fixarea ideilor, să ne limităm la funcțiile de un argument. În primul rînd folosim o funcție simplă $g(x)$ care aplică mulțimea tuturor intrărilor posibile (sau o submulțime simplu recursivă a ei) pe mulțimea numerelor întregi pozitive. Apoi avem nevoie de o altă funcție simplă $h(x)$, care aplică toate ieșirile finale posibile în mulțimea întregilor pozitivi. Asemănător cu funcțiile θ_π, τ_π de la § 2, putem defini o funcție $\Delta_\pi(x)$, astfel încît $\Delta_\pi(g(\iota))$ să dea numărul conținutului ieșirii pentru un program realizat cu $*$, Cx, $\rightarrow$, cu numărul π și un conținut arbitrar al intrării cu numărul ι. Urmează atunci că pentru orice program Π (cu numărul π) pe o asemenea mașină, $h[\Delta_\pi(g(\iota))]$ este funcția calculată. Se poate arăta, ținînd seama de forma lui $\Delta_\pi(x)$, că numai funcții recursive foarte simple pot fi reprezentate sub forma $h[\Delta_\pi(g(\iota))]$. De exemplu, dacă h și g sînt primitiv recursive, atunci toate funcțiile general recursive cu un loc care pot fi exprimate sub forma $h[\Delta_\pi(g(\iota))]$ sînt primitiv recursive. În loc de a încerca să prezentăm detaliile argumentării, vom raționa intuitiv în legătură cu modul particular de reprezentare a întrebărilor și răspunsurilor de care facem uz.

Necesitatea asteriscului poate fi demonstrată cu totul riguros. Astfel, pare rezonabil să reprezentăm în același fel aceleași valori ale argumentului chiar atunci cînd ne ocupăm cu funcții diferite. Însă pentru a evita ambiguitatea, nu trebuie să interpretăm una și aceeași ieșire finală a benzii ca răspuns diferit la întrebări diferite. Aceasta exclude posibilitatea de a citi răspunsurile direct de pe întrebările (datele) date inițial pe bandă. De exemplu, fiind date 3 și 5, ni se poate cere valoarea lui $3 + 5$ sau valoarea lui 3^5. Dacă programele pentru adunare și ridicare la putere ar oferi aceeași situație finală a benzii pentru valorile 3 și 5 ale argumentelor, nu am putea spune „bine, depinde cum citești rezultatul, este $3 + 5$ dacă îl citești într-un fel etc.". Această condiție este suficientă pentru a indica că asteriscul este indispensabil. Fără asterisc, răspunsurile trebuie să fie totdeauna aceleași atunci cînd întrebările sînt aceleași pentru aceleași valori ale argumentelor.

Dacă folosim numai $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$, obținem aceleași schimbări ale conținutului inițial al benzii pentru toate valorile diferitelor argumente ale aceleiași funcții, dacă nu apreciem în nici un fel întrebarea inițailă și nu alegem în mod ferm vreuna dintre alternativele posibile. Se poate spune atunci că un program pentru o funcție va servi numai ca denumire a funcției și nicidecum ca o metodă pentru calculul valorilor sale. Să luăm, de exemplu, funcția $m \times n$. Nu avem vreun program pentru ea, deoarece fiind dat un program realizat

cu $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$, el nu are decît un număr fix N de intrări ale asteriscului, iar pentru fiecare m și n date pe banda finală nu pot apărea mai mult decît $m + n + N$ asteriscuri, deși putem găsi cu ușurință m_1 și n_1 astfel încît $m_1 \times n_1$ să fie mai mare decît $m + n + N$.

Pentru a demonstra că $\leftarrow$ este indispensabilă, să presupunem că dispunem numai de $\rightarrow$, $*$ și Cx. O asemenea mașină va avea o memorie foarte restrînsă, deoarece dispozitivul de citire nu poate merge înapoi (la stînga) ca să consulte pătratele precedente. Fie dat un program Π. În fiecare pătrat dispozitivul nu poate face decît două lucruri: $*$ și $\rightarrow$. Deoarece presupunem că banda inițială nu are decît un număr finit de pătrate marcate, dacă lăsăm dispozitivul de citire să înceapă prin examinarea unui pătrat din interiorul regiunii marcate, atunci rezultatul realizării programului va fi sau oprirea dispozitivului în cadrul regiunii marcate a benzii de intrare sau continuarea mișcării sale într-un mod periodic sau operarea unei porțiuni adiționale avînd o margine care depinde numai de program, dar este independentă de situația inițială a benzii (adică de valorile date ale argumentelor). Să considerăm și aici funcția $m \times n$. Să presupunem un program Π de N linii care urmărește s-o calculeze, dispozitivul de citire începînd cu examinarea unui pătrat din porțiunea tipărită a benzii de intrare. Dacă cititorul se oprește în cadrul porțiunii tipărite inițial, desigur că nu avem o valoare pentru $m \times n$. Să presupunem deci că cititorul a părăsit această regiune și examinează un pătrat gol la dreapta regiunii, în timp ce trece la realizarea liniei k din programul π. Aici este interesant faptul că o dată ce cititorul urmărește deschiderea, nici un transfer condiționat Cx din program nu poate funcționa de două ori fără a introduce o circularitate. Astfel, dacă a i-a linie este Cx și ea trebuie să funcționeze de două ori, atunci de fiecare dată trebuie să fie supus citirii pătratul marcat cel mai de dreapta, trecîndu-se apoi la o a x-a linie din program. Deoarece nu dispunem de $\leftarrow$, dacă mașina revine iarăși la a i-a linie iar pătratul supus citirii este iarăși marcat, trebuie să se repete întregul proces revenind la a i-a linie după examinarea pătratului marcat. Dacă nici un transfer condiționat nu poate funcționa de două ori, atunci, deoarece avem cel mult N transferuri condiționate în Π care are numai N linii și deoarece transferul poate cel mult să determine mașina să repete N linii, putem avea cel mult N^2 pași și cel mult N^2 asteriscuri noi se pot marca în noua regiune a benzii, dacă nu mai vrem să excludem circularități. Deoarece într-un program pentru $m \times n$ nu putem avea circularități și deoarece putem găsi totdeauna m_1 și n_1, astfel încît $m_1 \times n_1$ să fie mai mare decît N^2, rezultă că nici un program cu $\rightarrow$, $*$ și Cx dar fără alte operații nu poate calcula funcția $m \times n$.

Din motive asemănătoare, $\rightarrow$ este indispensabilă; și tot astfel nu putem calcula toate funcțiile recursive făcînd uz numai de Ux, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$ (înlocuind Cx prin transferul necondiționat). Autorul însă nu știe dacă $C'x$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$ sînt suficiente într-un sens nebanal. De exemplu, dacă folosim metoda reprezentării calculului dezvoltată în paragraful precedent, atunci nu este clar dacă $C'x$ ne va permite să străbatem o succesiune nedefinit de mare de pătrate marcate sau dacă acest lucru nu este necesar. S-ar putea dori inversarea rolurilor pătratelor goale și marcate; dar atunci avem de înlocuit $*$ prin E. În mod banal, E, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $C'x$ formează o mulțime suficientă din motive de dualitate.

Să amintim aici o maşină interesantă (să-i zicem „maşina W") care este strîns înrudită cu maşina B, dar mult mai uşor de utilizat: adăugăm radierea, adică W are cinci tipuri de operaţii de bază, şi anume: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$, Cx, E. După cum am văzut mai sus, instrucţiunile Ux şi $C'x$ se pot deriva din acestea, aşa că putem să le folosim şi pe ele în toată libertatea. Faptul că pe o asemenea maşină se pot calcula toate funcţiile recursive decurge direct din rezultatul nostru asupra B-calculabilităţii. În adevăr, în virtutea celor arătate de Kleene [2] şi pe baza construcţiilor noastre din paragraful precedent, este cu totul evident că pentru maşina W nu avem nevoie de pătrate auxiliare şi că putem astfel aranja lucrurile, încît la calculul unei funcţii recursive pentru argumente date, dacă se pune eventualitatea stopării, atunci maşina va stopa cu un număr de pătrate marcate exact egal cu răspunsul căutat. În acest chip obţinem o reprezentare normală mai mult sau mai puţin naturală a întrebărilor şi răspunsurilor. Pentru multe scopuri, utilizarea maşinii W pare mai indicată decît acea a maşinii B.

Rămîne deschisă întrebarea dacă ne putem dispensa de pătrate auxiliare păstrînd posibilitatea de a calcula toate funcţiile recursive cu ajutorul unor programe ce fac uz numai de paşii de bază $\rightarrow$, $\leftarrow$, $*$, Cx. Desigur nu este necesar să folosim orice alt pătrat ca pătrat de bază. Dacă vrem să evităm complicaţiile, putem lua un n fix şi să utilizăm ca pătrat auxiliar fiecare al n-lea pătrat.

§ 5. MAŞINI TURING UNIVERSALE

Maşina de bază B (sau maşina W) este fictivă nu numai prin aceea că presupune o bandă ce se poate prelungi indefinit (ceea ce se poate considera ca o memorie în serie), dar şi pentru că nici o memorie internă finită (memorie în paralel) nu este adecvată pentru înmagazinarea tuturor programelor care sînt necesare pentru a demonstra că toate funcţiile (parţial) recursive sînt B-calculabile. În cursul demonstraţiei ne permitem privilegiul de a folosi, pentru fiecare n, programe care conţin mai mult decît n cuvinte de instrucţiune. Această ipoteză a unei memorii în paralel nedefinite cu unităţi accesibile în fiecare moment dat este pentru unii şi mai repugnantă decît ipoteza unei benzi care se prelungeşte atît cît este necesar.

O metodă de a depăşi această dificultate în legătură cu unităţile de memorie este utilizarea în locul maşinii cu destinaţie universală B pentru toate funcţiile recursive a cîte unei maşini cu destinaţie particulară M_i, pentru fiecare funcţie recursivă f_i. Astfel, pentru fiecare funcţie f_i avem la dispoziţie un program pentru maşina B, care va calcula valorile funcţiei urmînd acest program. În loc de a folosi blocul de memorizare pentru înmagazinarea instrucţiunilor, putem construi o maşină M_i care să realizeze în mod automat programul particular ori de cîte ori examinează o bandă. Asemenea maşini cu destinaţie specială pot fi maşini de adunat, maşini de înmulţit şi aşa mai departe. Ele corespund mai bine decît B la ceea ce este cunoscut ca maşină Turing.

Există de asemenea o metodă de a folosi o maşină unică cu memorie internă finită pe care se poate calcula orice funcţie B-calculabilă. Este ceea ce Turing numeşte „o maşină universală". Intuitiv este foarte plauzibil că putem proiecta asemenea maşini universale, deoarece, avînd oricînd la dispoziţie o

memorie în serie infinită (banda), putem înlocui memoria internă nemărginită cu bandă adițională și programe pentru funcțiile particulare înmagazinate pe bandă.

Pe mașina de bază B, diferite programe pot desigur să calculeze aceeași funcție în sensul că, atunci cînd sînt confruntate cu aceleași valori inițiale ale argumentelor, programele furnizează întotdeauna același număr la extremitatea dreaptă a benzii. Prin urmare, deoarece putem construi o mașină cu destinație specială pentru fiecare program dat, putem, de asemenea, avea mai multe mașini structural diferite care să corespundă uneia și aceleiași funcții.

Vorbind aproximativ, se poate spune că o mașină universală este acea mașină care poate să facă tot ce poate să facă orice mașină cu destinație specială. Ea face acest lucru imitînd în mod uniform fiecare mașină cu destinație specială M_i și de aceea diferă de mașina de bază B, care permite suplețea programelor. O mașină universală este o mașină construită special în vederea imitației. Putem sau să stocăm un program fix în memoria internă a mașinii B o dată pentru totdeauna, sau să introducem programul în mașină și să ne dispensăm cu totul de blocul de memorie internă. Mașina universală seamănă cu o mașină cu destinație specială prin aceea că ea are numai o memorie în serie (banda); însă ea este o mașină cu destinație generală, deoarece are programe pentru funcțiile individuale așezate pe bandă.

Este posibil să construim o mașină universală U, care să fie aptă doar de cele patru tipuri de instrucțiuni de bază. Sau, în alți termeni: este posibil să scriem un program pentru mașina B, astfel încît examinînd o bandă pe care figurează pe lîngă valorile argumentelor unei funcții și un număr care reprezintă funcția (un program sau o mașină cu destinație specială corespunzătoare funcției), mașina B, urmînd programul dat, va imita comportarea mașinii particulare pentru funcție și va calcula valoarea funcției pentru argumentele date pe bandă.

Deoarece mai multe mașini cu destinație specială pot să corespundă uneia și aceleiași funcții, este de dorit să deosebim o mașină universală funcțională de una structurală: prima este în stare să imite toate mașinile cu destinație specială în sensul că există o metodă efectivă de reprezentare a fiecărei mașini cu destinație specială (sau cel puțin a unei mașini pentru fiecare funcție), astfel încît pentru una și aceeași întrebare să ni se ofere unul și același răspuns, în timp ce a doua poate să facă mai mult, întrucît în plus mai imită și mișcările (adică realizările pașilor de program) ale mașinii respective cu destinație specială. Rezultă că o mașină universală funcțională trebuie numai să imite cel puțin una dintre numeroasele mașini cu destinație specială (respectiv numeroasele programe) posibile pentru fiecare funcție, pentru a oferi același răspuns la una și aceeași întrebare. De exemplu, pe o mașină universală funcțională se pot reprezenta diferite mașini cu destinație universală corespunzătoare aceleiași funcții cu una și aceeași situație inițială a benzii. Fiecare mașină universală structural este și universală funcțional, dar nu reciproc. De fapt este ceva mai greu să construim o mașină universală structural, în timp ce o mașină universală funcțional poate fi derivată mai mult sau mai puțin imediat din rezultatele paragrafului 3 și binecunoscutele rezultate din teoria funcțiilor recursive. Mașinile de felul întîi, care sînt mai complicate, le lăsăm pentru capitolul următor iar aici vom discuta numai pe acestea din urmă. Fiecare dintre ele oferă o soluție pozitivă întrebării pe care mi-a pus-o verbal

profesorul G. W. Patterson: se poate proiecta o mașină Turing universală cu o singură bandă și fără radiere? De fapt el probabil se gîndea la o construire directă a unei mașini universale structural.

Deoarece toate funcțiile B-calculabile și numai ele sînt funcții parțial recursive, pare suficient să facem uz de următorul rezultat din teoria funcțiilor recursive: există o corelare efectivă a tuturor definițiilor pentru funcțiile recursive cu întregii pozitivi (denumiți numere Gödel ale funcțiilor respective), astfel încît pentru orice n să avem o funcție recursivă $V_n(z, x_1, ..., x_n)$, care adesea se notează cu $U(\mu_y T_n(z, x_1, ..., x_n, y))$, cu proprietatea că pentru orice funcție recursivă cu n locuri $f_e(x_1, ..., x_n)$ avînd numărul Gödel e, $V_n(e, x_1, ..., x_n)$ coincide cu $f_e(x_1, ..., x_n)$, pentru toate valorile argumentelor pentru care este definită f_e (Kleene [2], p. 330). Deoarece funcțiile $V_n(z, x_1, ..., x_n)$ sînt recursive, ele sînt B-calculabile. Putem, așadar, stabili un program pentru mașina B sau să construim o mașină cu destinație specială pentru fiecare $V_n(n = 1, 2, ...)$ care va calcula orice funcție recursivă cu n locuri îndată ce vom pune pe banda de intrare numărul Gödel al acestei funcții.

Un defect evident este acela că nu avem o mașină universală funcțional reală, ci numai una pentru toate funcțiile B-calculabile cu un argument, una pentru toate funcțiile B-calculabile cu două argumente etc. Se știe însă că fiecare funcție recursivă poate fi redusă la o funcție de un argument pentru că putem să enumerăm efectiv, pentru orice n, toate n-uplurile de întregi pozitivi și să introducem funcțiile recursive $[\ ]_1, ..., [\ ]_n$, astfel încît $[x]_i$ este al i-ilea număr al celui de al x-lea n-uplu, și să reducem funcția cu n locuri $f(x_1, ..., x_n)$ la funcția de un loc $f([x]_1, ..., [x]_n)$. Prin urmare, am vrea să spunem că $V_1(z, x)$ este deja o funcție universală cu unica rezervă că funcțiile de diferite argumente care în mod obișnuit sînt considerate ca fiind diferite trebuie considerate ca indiscernabile. De exemplu, două funcții diferite $g(x, y)$ și $h(x, y, z)$ pot să satisfacă condițiile $g([x]_1, [x]_2) = f(x)$ și $h([x]_1, [x]_2, [x_3]) = f(x)$ pentru aceeași funcție $f(x)$; atunci $f(x)$, $g(x, y)$, $h(x, y, z)$ devin indiscernabile.

Pentru a remedia acest lucru se pare că avem nevoie de o funcție recursivă sau B-calculabilă cu o infinitate de argumente. O asemenea noțiune este cu totul firească, dacă ne gîndim la mașini (să spunem, mașina B). Fiind dată o intrare care conține un șir de expresii numerice, mașina va începe prin a număra expresiile numerice, iar apoi va trece la calculul valorii funcției după o procedură dată, luînd în considerare numărul argumentelor date inițial. Pe de altă parte nu este nefiresc să reconstruim schemele (II) — (VI) astfel, încît să definim funcțiile recursive de așa manieră, încît ele să cuprindă cazurile cu o infinitate de argumente. De exemplu, am putea dori să folosim $\sum_1^n x_i$ sau $\prod_1^n x_i$ pentru n nedefinit. În realitate, se poate demonstra exact că dacă permitem funcții cu argumente în număr infinit, proprietatea de recursiv și proprietatea de B-calculabil continuă să aibă același domeniu de aplicație (să fie coextensive). Astfel, dacă permitem fiecărei funcții din schemele (II) — (VI) să conțină o infinitate de parametri, putem, cu anumite precauții, să demonstrăm că toate funcțiile recursive în sens generalizat sînt B-calculabile, în sensul că pentru fiecare asemenea funcție $f(x_1, ..., x_n)$ putem obține un program pentru mașina B astfel încît, fiind date $x_1, ..., x_n$ pentru n arbitrar pe bandă, programul ne va furniza valoarea lui $f(x_1, ..., x_n)$. Întrucît acest

lucru nu este important pentru rezultatul nostru principal, nu vom intra aici în detalii. În capitolul următor (cu privire la mașinile universale structural) vom avea prilejul de a vedea mai explicit cum se poate calcula o funcție cu o infinitate de argumente.

Deocamdată, presupunem dată o funcție recursivă $g_n(x_1, ..., x_n)$ (și un program pentru calculul ei), a cărei valoare este k dacă și numai dacă pentru fiecare n, $x_1, ..., x_n$, $(x_1, ..., x_n)$ este al k-lea n-uplu de întregi pozitivi. Atunci vom defini $V(z, x_1, ..., x_n) = V_1(z, g_n(x_1, ..., x_n))$. Întrucît avem program pentru V_1 și g, rezultă că avem un program pentru a calcula cu mașina B funcția V. În acest caz, mașina cu destinația specială care realizează programul pentru V va fi mașină universală funcțional.

Fiecare mașină cu destinație specială, inclusiv mașina universală funcțional pentru V, precum și mașinile universale structural nedescrise aici, se pot realiza fizic, de exemplu prin modificarea specificării calculatorului idealizat de la Burks și Copi [3]. În fiecare caz putem sau să construim mașina B (respectiv mașina W) cu memoria internă restrînsă în mod convenabil și să înmagazinăm programul (pentru mașina particulară) în memoria internă o dată pentru totdeauna sau, pur și simplu, să construim o realizare fizică a programului și să renunțăm cu totul la o memorie internă. Pînă acum, în ce privește realizarea fizică a mașinii universale Turing propunerea lui Moore [4] pretinde mai puțin echipament fizic decît oricare dintre cele două mașini universale pe care le avem în vedere. Mașinile noastre prezintă interes, întrucît am redus numărul diferitelor tipuri de instrucțiuni de bază la un minim absolut. Trebuie să fie clar că orice calculator cifric cu destinație universală din cele care există acum poate fi considerat ca o realizare a mașinii B (sau W), cu condiția ca să admitem că memoria internă poate fi mărită cît de mult dorim.

În considerațiile noastre precedente am presupus printre altele, că în fiecare etapă nu sînt marcate decît un număr finit de pătrate. Dacă admitem, pe bandă, distribuții arbitrare de infinități de pătrate marcate inițial, putem, ca să zicem așa, să calculăm valorile unei funcții recursive relativ la funcția arbitrară determinată de situația inițială a benzii (în terminologia lui Turing avem o mașină oracol).

§ 6. MAȘINI PENTRU DEMONSTRAREA TEOREMELOR

În concluzie ne permitem o anumită speculație pură, întrucîtva fantastică, însoțită de cîteva comentarii generale.

Deși logica matematică a fost adesea criticată pentru inutilitatea ei, majoritatea logicienilor de profesie se pare că nu au fost emoționați de întinsa aplicare a logicii la construirea și utilizarea calculatoarelor din ultimii ani. Se pare că partea utilă a logicii nu coincide, ba chiar nu se intersectează cu partea sa interesantă; există chiar bănuiala că, în logică, ceea ce este interesant nu este util, iar ceea ce este util nu este interesant. Totuși nu se poate nega că există o mare cantitate de asemănare a intereselor și activităților logicienilor pe de o parte și a proiectanților și utilizatorilor de computere pe de altă parte. Ambele grupuri de persoane sînt interesate ca gîndirea să fie articulată, sînt interesate la formalizarea i mecanizarea ideilor mai mult

sau mai puțin vagi. Desigur că logicienii nu sînt mai exacți și mai riguroși decît inginerii care sînt pedepsiți pentru erorile lor mai direct și mai tare. După cum logicienii vorbesc de teoreme și metateoreme, tot astfel există programe și metaprograme. După cum logicienii fac deosebire dintre utilizarea și menționarea unui cuvînt, tot astfel codarea automată trebuie să țină cont de deosebirea dintre utilizarea unei instrucțiuni și vorbirea despre ea. După cum logicienii deosebesc propozițiile primitive și regulile de inferență derivate, tot astfel există o deosebire între comenzile de bază și subrutine. Oare nu ar trebui să fie o legătură mai adîncă între logică și dezvoltarea calculatoarelor?

Ceea ce sare în ochi, dar probabil că nu prezintă un interes teoretic prea mare, este posibilitatea de a utiliza mașinile pentru procedurile de decizie cunoscute.

Este bine cunoscut că în unele domenii ale logicii și matematicii avem proceduri de decizie, adică proceduri efective cu ajutorul cărora pentru orice enunț dat în cadrul domeniului respectiv putem decide printr-un număr finit de pași, dacă acest enunț este sau nu o teoremă. Printre asemenea domenii se află geometria elementară, algebra elementară, aritmetica adunării sau aritmetica înmulțirii, teoria funcțiilor de adevăr și calculul predicatelor monadice. Intuitiv, a avea o procedură efectivă pentru decizie revine la posibilitatea de a construi o mașină care să decidă. Teoretic este posibil ca pentru fiecare procedură cunoscută de decizie să construim o mașină care s-o execute. De exemplu, aceasta s-a făcut pentru teoria funcțiilor de adevăr. În ce privește construirea de mașini pentru executarea altor proceduri de decizie, ea a fost împiedicată pînă acum numai din considerente economice și inginerești. Există, așadar, problema foarte interesantă de a construi, de exemplu, o mașină pentru calculul predicatelor monadice. De fapt, aceasta ar fi propriu-zis „mașina logică", întrucît, după cum s-a spus adesea, toate inferențele silogistice se pot realiza în calculul predicatelor monadice.

O problemă înrudită, și probabil de ordin mai practic, este încercarea de a programa aceste proceduri de decizie pentru calculatoarele obișnuite cu destinație generală. Aceasta ar putea conduce la două feluri de rezultate utile: (a) o bibliotecă de subrutine pentru toate procedurile de decizie cunoscute, care este gata pentru uz, uneori cu ușoare modificări, cu ajutorul majorității calculatoarelor obișnuite de care dispunem în prezent; (b) anumite operații care sînt adesea necesare în programarea procedurilor de decizie pot conduce la adăugări sau modificări ale operațiilor de bază din calculatoare; de exemplu, s-ar putea ajunge la înlocuirea uneia sau mai multor operații printr-o nouă operație mai utilă.

Ceea ce li se poate reproșa acestor chestiuni nu este dificultatea inumană, ci mai curînd faptul că ele nu sînt nici urgente pentru scopurile practice, nici suficient de atractive din punct de vedere științific. În schimb, problemele pe care le cuprinde imitarea gîndirii de către mașină, sau deocamdată, studiul filozofiei gîndirii cu ajutorul comparației dintre gîndire și mașină sînt desigur ispititoare; însă foarte des nu sîntem în stare nici măcar să formulăm în mod clar problemele sau, atunci cînd avem de-a face cu probleme mai particulare, cum ar fi traducerea mecanică sau jocul de șah, dificultatea este mai puțin în problemele de concepție, cît mai mult în sarcinile „inginerești" care pretind o mare cantitate de muncă laborioasă.

S-a discutat mai puțin frecvent posibilitatea utilizării mașinilor pentru ajutorarea pe scară mare a cercetării în matematica teoretică. Contribuția principală a logicii matematice este stabilirea unui standard de rigoare care, cel puțin în intenție, se exprimă în termeni mecanici. Astfel, din logica matematică aflăm că majoritatea teoremelor matematice se pot demonstra mecanic în cadrul unor sisteme axiomatice care se formulează foarte simplu. Urmează că majoritatea problemelor matematice pot fi reduse la întrebarea dacă anumite enunțuri rezultă din anumite axiome sau, deoarece demonstrațiile și teoremele pentru un sistem dat de axiome pot fi enumerate efectiv, dacă anumite enunțuri intervin sau nu în asemenea enumerări. Cu alte cuvinte, în timp ce într-o problemă de calcul ne întrebăm care este valoarea unei funcții complet calculabile $f(x)$ pentru o anumită valoare a lui x, într-o problemă de demonstrație, ne întrebăm dacă există un anumit x astfel încît $f(x)$ să fie numărul dat. Pentru a răspunde la prima întrebare pentru un număr dat n_0, nu avem decît să folosim procedura pentru $f(x)$ aplicînd-o la n_0; pentru a răspunde la a doua întrebare pentru un n_0 dat, avem de calculat $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ etc., pînă ce prin încercări ajungem la un x_0, astfel încît $f(x_0) = n_0$. Dacă se întîmplă ca n_0 să nu fie teoremă, atunci niciodată nu vom fi în stare să ne oprim în procesul de căutare a lui n_0 printre valorile $f(1)$, $f(2)$ etc. În termenii teoriei funcțiilor recursive, chestiunea se reduce la întrebarea dacă un număr aparține unei mulțimi recursiv numerabile, (adică mulțimea tuturor numerelor y, astfel încît există un x cu $f(x) = y$ unde f este o funcție general recursivă dată).

Pentru a reveni la funcția $f(x)$, care enumeră teoremele, deoarece ea este general recursivă, conform teoremei noastre principale, ea este o funcție completă B-calculabilă și are un program $\pi(f)$, pe mașina B. Nu este greu să construim un program nou, făcînd uz de $\pi(f)$, care să testeze pentru fiecare număr dat n_0 dacă există un x, astfel încît $f(x) = n_0$. În mare, programul face următoarele: scrie numărul n_0 pe bandă și, după o lacună mare, numărul 1, aplică $\pi(f)$ și apoi compară rezultatul cu n_0: dacă este același, se oprește și scrie 1, în caz contrar scrie 2 (în general, copiază valoarea argumentului precedent și adaugă 1); apoi aplică $\pi(f)$, compară rezultatul cu n_0 etc. Deoarece putem defini o procedură pe mașina B pentru a compara două numere, programul dorit poate fi lesne obținut. În acest chip avem o funcție parțial recursivă $f_e(y)$, astfel încît $f_e(y) = 1$, dacă și numai dacă există un număr x cu $f(x) = y$; în caz contrar, $f_e(y)$ nu este definită. Astfel, fiind dat un sistem de axiome (de exemplu, pentru aritmetică, pentru teoria mulțimilor sau pentru analiză), putem să montăm un program sau să construim o mașină cu destinație specială, astfel încît observînd un enunț în notația sistemului, mașina va produce ca răspuns 1, dacă și numai dacă enunțul este teoremă.

Obiecțiile standard împotriva studierii matematicii cu ajutorul unor asemenea mașini sînt de două feluri: în primul rînd deoarece interesul nostru este de a decide dacă un enunț particular este o teoremă, metoda este în general inutilă, pentru că nu putem niciodată parcurge infinitatea argumentelor pentru funcția f și în afară de cazul cînd avem norocul de a da peste un rezultat pozitiv nu vom ști niciodată răspunsul, indiferent cît de mult vom parcurge; în al doilea rînd, chiar dacă răspunsul se întîmplă să fie da, va trece de obicei un timp foarte lung înainte de a-l obține, întrucît avem de examinat toate demonstrațiile posibile. Replicînd, putem observa că adesea există obiective

foarte modeste de cercetare, care pot fi ajutate mai direct și că chiar în domeniul descoperirii unor teoreme mai ambițioase nu avem vreun motiv de a nu crede că procedurile de testare prin eliminarea cazurilor superflue și progresul tehnic nu vor aduce sarcina mai aproape de domeniul fezabilului.

În ce privește obiectivele de cercetare modestă, să dăm cîteva exemple. O mare cantitate a posibilităților de gîndire s-a consumat pentru studiul independenței axiomelor în calculul propozițional. Aparent nu avem o metodă generală de decizie pentru asemenea întrebări. Totuși, în majoritatea cazurilor, independența se poate demonstra făcînd uz de matrice cu puține linii și coloane (de obicei, mai puțin decît 5 linii și 5 coloane), sau se poate infirma prin derivări relativ scurte, pornind de la axiomele și regulile inițiale de inferență. Deoarece matricele și derivările pot fi trecute pe liste și testate mecanic, este neîndoielnic că mașinile pot ajuta mult la asemenea cercetări. Mai general adesea vrem să testăm corectitudinea unei demonstrații propuse. Dacă demonstrația ar fi prezentată în toate detaliile, ca în unele manuale de logică matematică, o mașină ar testa-o imediat. Problema devine mai interesantă atunci cînd, după cum se obișnuiește, demonstrația propusă este numai schițată. Situația seamănă mult cu, să zicem prezentarea a 20 de linii dintr-o demonstrație de 1000 de linii. Problema este mai mult sau mai puțin de reconstruire a celor 1000 de linii din cele 20 care sînt date. Dacă demonstrația propusă este greșită, nu mai putem reconstrui o demonstrație din cele 20 de linii. Chiar dacă, de exemplu, putem manipula toate demonstrațiile într-un sistem cu mai puțin de 100 de linii, încă este foarte probabil că vom putea manipula majoritatea demonstrațiilor cu 1000 de linii cînd avem un rezumat de 20 de linii pentru fiecare demonstrație. Uneori, bănuim că un enunț sau este o teoremă, cu o demonstrație scurtă, sau nu este de loc teoremă. Uneori simțim că un anumit enunț este teoremă și că un anumit alt enunț este necesar în demonstrația lui. În atare cazuri mașina are de realizat de obicei o sarcină mai restrînsă de confirmare sau infirmare a conjecturilor noastre. În multe cazuri nu trebuie să întrebăm mașina asupra tuturor cazurilor posibile, ci s-o punem să realizeze anumite „experimente cruciale", de exemplu, pentru a lămuri unii pași confuzi, atunci cînd avem convingerea că direcția noastră principală este corectă.

Un rezultat fundamental al lui Herbrand are efectul că orice derivare a unei teoreme într-un sistem de axiome consistent corespunde unei tautologii din cadrul funcțiilor de adevăr de o formă legată într-un mod predeterminat de enunțul teoremei și axiomele sistemului. Acest rezultat și posibilitatea deja amintită de a considera sistemele de axiome ca mașini de obținut demonstrații se pot folosi pentru a determina mașinile de calcul la investigarea problemelor derivabilității în general, precum și a inconsistenței (adică a derivabilității unor contradicții) în particular în sistemele de axiome. Desigur că nu avem vreun motiv de a ne lipsi de privilegiul utilizării unor instrumente ingenioase pentru a reduce marea complexitate a problemelor de combinatorică pe care le implică asemenea aplicări ale mașinilor. Cînd mașinile vor fi folosite pe scară mare ca auxiliare în cercetarea matematică, vom avea un standard mai obiectiv pentru originalitatea ideilor utilizînd drept criteriu volumul de muncă necesar unei mașini pentru a descoperi ideea respectivă.

Dacă comparăm, de exemplu, asemenea aplicații posibile cu programarea mașinilor pentru jocul de șah sau dame, mașinile de demonstrare sau progra-

mele de demonstrare au de partea lor cel puţin următorul avantaj: oponentul nostru Natura sau, dacă preferaţi, lumea platonică a ideilor, care nu are pe cîte ştim ca scop predominant înfrîngerea noastră în joc.

Desigur că volumul de muncă de care dăm la început este uimitor; există atît de multe demonstraţii posibile în fiecare sistem interesant de axiome, atît de multe tautologii în cadrul funcţiilor de adevăr! Dar de unde să ştim dacă vreun ajutor semnificativ pentru cercetarea matematică va apare sau nu dintr-o asemenea folosire a maşinilor înainte de a fi încercat pe o scară suficient de mare? Dacă ar exista ipoteza că asemenea utilizări ar fi de folos imediat pentru activităţile militare sau de afaceri, indubitabil că s-ar fi depus de îndată un efort major în această direcţie. Cine ştie dacă nu cumva asemenea aplicări combinate ale maşinilor şi logicii matematice nu se vor dovedi pînă la urmă mai eficiente pentru progresul ştiinţei chiar şi pentru asemenea ţeluri ca realizarea unor bombe mai mari, a unor rachete cu tragere mai lungă sau a unor automobile mai atrăgătoare. Desigur că logicienii ar fi mulţumiţi atunci cînd alţi matematicieni şi-ar da seama că logica este un instrument indispensabil pentru propriile lor cercetări. Sau poate că utilizarea logicii la teoria şi exploatarea maşinilor va genera o logică nouă interesantă, aşa cum fizica generează domenii noi şi importante în matematică.

Spunem adesea că nu sîntem în stare să proiectăm maşini mai inteligente decît proiectantul respectiv. Ni se pare că o asemenea sarcină se deosebeşte în mod esenţial de aceea de a proiecta maşini care să fie fizicește mai puternice decît proiectantul respectiv. Conceptul de maşină pentru demonstraţie arată că lucrurile nu stau astfel. De exemplu, dacă conjectura lui Fermat sau conjectura lui Goldbach este în adevăr demonstrabilă în cadrul unuia din sistemele formale uzuale ale matematicii, nu este nimic absurd în opinia că prima demonstraţie va fi descoperită de către o maşină. Chestiunea importantă este că noi tratăm complexitatea cantitativă ca o dificultate calitativă. Din cauză că abilitatea gîndirii noastre de a manipula cantităţi mari este foarte restrînsă, găsim că este mai necesar să facem apel la iluminare, ingeniozitate şi intuiţie vagă. Făcînd uz de maşini, posibilităţile noastre în acest domeniu cresc enorm şi deci nu este decît natural să ne aşteptăm că vom putea merge mult mai departe chiar cu mai puţină ingeniozitate. Fundamentarea demonstraţiilor noastre şi *selecţionarea* celor corecte (adică compararea concluziilor cu conjecturile propuse) nu sînt decît proceduri mecanice simple. Nu este greu să ne imaginăm că asemenea maşini vor fi mai inteligente decît omul în ce priveşte sarcina de a descoperi teoreme şi de a confirma conjecturile mai repede şi cu mai multă certitudine.

Putem instrui o maşină de demonstrat astfel, încît ea să selecţioneze şi să tipărească problemele denumite „adînci", adică acele care se formulează pe scurt, dar pretind demonstraţii lungi. Putem, de asemenea, să instruim maşinile pentru a genera conjecturi interesante: de exemplu, enunţuri formulate concis care nu pot fi nici demonstrate, nici respinse prin demonstraţii cu o margine prestabilită de complexitate; probabil că conjecturile lui Fermat şi Goldbach îşi vor găsi locul într-o asemenea clasă cu o margine destul de înaltă.

Se poate spune, într-un sens rezonabil, că maşina de bază B sau maşina universală Turing poate rezolva toate problemele matematice rezolvabile şi poate demonstra toate enunţurile matematice demonstrabile. Astfel, dacă

există o demonstraţie pentru un enunţ matematic, ea trebuie să fie, în calitatea ei de demonstraţie, exprimabilă în termeni exacţi, începînd cu enunţuri acceptate şi continuînd într-un mod sistematic. Avem, aşadar, un program, pe maşina B care va conduce de la enunţurile iniţiale (axiome) la concluzii.

Dacă îl comparăm pe Gauss cu o maşină universală Turing, în ce priveşte aptitudinile lor matematice, atunci trebuie să admitem că, spre deosebire de maşina imaginată, Gauss nu avea nici inteligenţă infinită, nici memorie infinită. Dar atunci înseamnă că el nu putea nici să rezolve toate problemele. Ceea ce este interesant este mai curînd faptul că el a putut să creeze atît de multă matematică cu ajutorul unui creier care nu este de loc proporţional mai mare decît acela al unui om mediu. Am fi considerabil mai bine înzestraţi, dacă el ar fi proiectat o maşină de un volum dat pentru a-l imita pe Gauss (în activitatea sa matematică) şi nu un cercetător matematic mediu. Dar, în stadiul actual, putem considera că deosebirea este relativ mică faţă de prăpastia dintre „o maşină cercetător în matematică" şi orice calculator cifric de uz curent.

BIBLIOGRAFIE

[1] A. M. Turing, *On Computable Numbers*, în „Proc. London Math. Soc.", Series 2, **24**, 1936, pp. 230—265.

[2] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, 1952.

[3] A. W. Burks şi I. M. Copi, *The Logical Design of an Idealized General Purpose Computer*, în „Jour. Franklin Inst.", **261** 1956, pp. 299—314, 421—436.

[4] E. F. Moore, *A Simplified Universal Turing Machine*, în „Proc. ACM", Sept. 8, 1952, 1953.

CAPITOLUL VII
MAŞINI TURING UNIVERSALE: UN EXERCIŢIU DE CODARE[1]

Într-un memoriu precedent [1], am studiat o maşină de bază B, care este un exemplar dintr-o clasă întinsă de maşini similare pe care le vom denumi maşini generale cu două memorii. Această clasă are următoarele caracteristici. (i) Fiecare maşină generală cu două memorii are o memorie internă în paralel care se poate dezvolta indefinit şi este destinată păstrării programului şi o bandă indefinit desfăşurabilă care este divizată într-un şir de pătrate şi este utilizată pentru datele de la intrare, de la ieşire, pentru calcul şi pentru înmagazinarea datelor intermediare. (ii) Fiecare maşină are un dispozitiv de citire (şi scriere) care citeşte un pătrat şi numai unul la fiecare moment dat şi care poate realiza acţiuni dintr-o clasă finită predeterminată, cuprinzînd cel puţin deplasarea la stînga cu un pătrat, deplasarea la dreapta cu un pătrat şi un mijloc sau altul de schimbare a conţinutului pătratului supus investigaţiei (de exemplu, marcarea pătratului sau radierea). (iii) Există un element de control care la fiecare moment dat urmăreşte un pas al programului şi numai unul (în particular, primul pas la începutul operaţiei) şi pătratul curent pe care îl cercetează dispozitivul de citire; în concordanţă cu pasul şi conţinutul pătratului investigat, elementul de control sau orientează dispozitivul de citire spre una dintre acţiunile sau deplasările sale, sau se deplasează el însuşi către un pas diferit al programului specificat în cadrul pasului în curs; ne putem închipui că mişcarea dispozitivului de citire sau a elementului de control are loc întotdeauna între două unităţi de timp. (iv) Fiecare pătrat al benzii este apt de a avea cel puţin două stări; elementul de control şi paşii din programele permise sînt astfel, încît uneori elementul de control, ţinînd seama de starea pătratului supus lecturii, poate decide asupra pasului următor, alegîndu-l din două sau mai multe alternative prestabilite; în particular, dacă una dintre cele două alternative este întotdeauna pasul imediat consecutiv din programul iniţial, atunci starea pătratului citit care poate să producă un salt trebuie să facă parte dintre acele stări care pot fi introduse prin acţiunile posibile ale dispozitivului de citire.

Maşina de bază B este o maşină minimum în cadrul acelora care satisfac condiţiile următoare: dispozitivul de citire nu poate face decît trei lucruri, şi anume să se deplaseze la stînga, să se deplaseze la dreapta sau să marcheze pătratul citit; fiecare pătrat poate să aibă doar două stări: starea marcată

[1] Acest capitol a apărut în „Zeitsch. f. math. Logic" u. Grundlagen d. Math", 3, (1957), pp. 69–80.

și starea nemarcată; alegerea uneia dintre cele două alternative posibile se face într-un singur fel, prin transferul condiționat care determină un salt atunci cînd pătratul citit este marcat (stare care poate fi introdusă printr-o acțiune a dispozitivului de citire). În general, o mașină generală cu două memorii poate să difere de B în diferite privințe: fiecare pătrat poate să aibă un număr predeterminat, dar altfel arbitrar, de n stări; dispozitivul de citire poate fi apt de a scrie alte simboluri și de a realiza alte mișcări; pot exista și diferite metode prestabilite de alegere a uneia dintre alternativele posibile. (A se compara cu [1], § 4). În realitate, am putea slăbi și mai mult definiția mașinilor generale cu două memorii, permițînd în locul unei benzi unidimensionale o suprafață sau un corp n-dimensional, sau permițînd ca elementul de control să citească la fiecare moment dat un număr n de pătrate, numărul fiind predeterminat, dar altfel arbitrar.

Din considerațiile pe care le-am expus în [1] rezultă că orice mașină generală cu două memorii este în stare să rezolve orice problemă de calcul. Să considerăm acum două asemenea mașini arbitrare P și Q, nu neapărat distincte. Afirmăm că întotdeauna putem găsi un program fix π pe Q, astfel încît cu o reprezentare foarte directă a programelor lui P pe bandă, programul π va permite mașinii Q să imite toate comportamentele lui P. Deoarece programul π este fixat o dată pentru totdeauna, îl putem introduce în mașină și să ne dispensăm cu totul de memoria internă. Așadar, pentru fiecare pereche de mașini generale cu două numere P și Q există o mașină cu memorie în serie $U_{p,q}$, cunoscută îndeobște ca mașină Turing universală care poate imita toate comportamentele mașinii P, deplasînd programele pe bandă. Este evident că această problemă constă în stabilirea unui program convenabil pentru mașina Q. În general, ordinul de mărime al sarcinii este proporțional cu simplicitatea (sau economia) instrucțiunilor de bază din P și invers proporțional pentru instrucțiunile de bază din Q. Cu alte cuvinte, dacă Q este fixat, cu cît sînt mai puține tipuri de instrucțiuni de bază care sînt admise pentru P, cu atît mai ușor îl găsim pe $U_{p,q}$; cînd P este fixat, cu cît admitem mai multe tipuri pentru instrucțiunile de bază ale lui Q, cu atît mai ușor îl găsim pe $U_{p,q}$. În particular, putem considera și cazul cînd mașina P este identică cu Q și să căutăm a construi $U_{p,p}$.

Vom rezolva acum problema particulară de a-l determina pe $U_{b,b}$, luînd mașina de bază B atît ca P cît și ca Q. Ar fi mult mai ușor dacă am lua drept Q mașina W, care este identică cu B, cu excepția faptului că permite în plus instrucțiunea de radiere. Nu numai că $U_{b,w}$ se obține mai ușor decît $U_{b,b}$, dar și $U_{w,w}$ este mai ușor de proiectat decît $U_{b,b}$. Dacă cititorul este un programator, el poate să-și testeze abilitatea și răbdarea, codînd pentru $U_{b,w}$ sau $U_{w,w}$, sau găsind pentru $U_{b,b}$ un program mai elegant decît cel pe care-l vom da aici. Dacă este și proiectant, atunci el ar putea să-și asume sarcina de a realiza fizicește asemenea mașini. Astfel de exerciții prezintă un interes general, deoarece ele nu presupun posedarea unei experiențe cu vreunul din calculatoarele particulare care se exploatează în prezent. Ne-am putea imagina o revistă sau o instituție organizînd un concurs de asemenea programe și proiectări; îndemînarea autorilor poate fi judecată după eleganța propunerilor lor, în conformitate cu anumite criterii alese în mod convenabil. Dacă s-ar organiza un asemenea concurs, este foarte probabil că programul $U_{b,b}$, pe care-l vom da aici, va fi mult în coada listei.

Se pare că e necesar să justificăm prețul înalt plătit pentru evitarea radierii. Cel mai simplu, și probabil și cel mai riguros, ar fi să spunem că este foarte bine să înțelegem că deși radierea face calculul mult mai ușor, teoretic ne putem dispensa de ea. Argumentul că benzile standard de teletaip care nu permit radierea sînt mai ieftine decît benzile magnetice, pare întrucîtva forțat, deoarece, cel puțin în etapa de față a tehnicii, probabil că nu urmărim să utilizăm mașinile Turing universale pe o scară mare peste tot și nu este clar dacă prețul mai ieftin compensează complexitatea adițională. Poate că va veni un timp în viitor cînd anumite echipamente vor fi mult mai eficiente fără a permite radierea sau poate că radierea va fi permisă însă cu o viteză mult mai mică decît celelalte acțiuni; atunci, posibilitatea de a ne dispensa de radiere va prezenta o semnificație practică.

Mașinile Turing universale implică o relație „de reproducere" destul de complexă. Astfel, deoarece $U_{b,b}$ poate imita orice program al mașinii generale cu două memorii B, ea poate imita, de asemenea, programul particular U al lui B, care îl determină pe $U_{b,b}$. Așadar, dacă programul particular U este reprezentat pe bandă prin U', atunci orice acțiune posibilă a lui $U_{b,b}$ este reflectată de o anumită acțiune posibilă a lui $U_{b,b}$ cu U' pe bandă. Mai mult, această situație poate fi reflectată mai departe, dacă reprezentăm conținutul benzii inițiale U' prin U'' și așezăm pe banda lui $U_{b,b}$ atît pe U', cît și pe U''.

O mașină reproducătoare întrucîtva mai simplă și mai fidelă a fost discutată de către von Neumann [2]. Redăm pe scurt raționamentul său. Putem construi mașini pornind de la părți fundamentale convenabile cu ajutorul unui număr redus de operații simple, cum este conectarea la un loc a două părți. Prin urmare, este posibil să proiectăm și să construim o mașină M constructoare de mașini, care urmînd instrucțiunile din memoria sa internă, să ne construiască mașini. Nu prezintă vreo dificultate introducerea instrucțiunii de construire a mașinii M însăși și deci producerea unui duplicat. Singura complicație ar fi, să zicem, că volumul de hîrtie care conține instrucțiunea nu poate avea loc în duplicat. Pentru a ridica și această dificultate, putem adăuga mașinii M o mașină cu destinație specială, care copiază instrucțiunea din mașina constructoare de mașini M și apoi o inserează în mașina nou creată. Această mașină M' conține pe M ca o parte a ei și este aptă de autoreproducere. Dacă inserăm instrucțiunea de a construi pe M, atunci mașina M' va produce un duplicat al mașinii M care va cuprinde și instrucțiunea. Dacă inserăm instrucțiunea de a construi M' în M, atunci mașina M' va produce un duplicat complet al lui M', inclusiv instrucțiunea de a construi pe M' inserată de la început.

Pentru a obține un alt model al reproducerii la animale, am vrea să extindem această procedură a lui von Neumann, astfel încît mașina-copil să poată crește. Întîmplător, această proprietate de creștere se află în centrul deosebirii dintre automatele finite și mașinile Turing. Orice mașină Turing, în special mașina universală $U_{b,b}$, este finită la fiecare moment de timp dat, dar ea continuă să crească, dacă la fiecare moment dat considerăm ca parte proprie a mașinii numai acele pătrate de pe bandă care pînă în acel moment au fost citite cel puțin o dată. Așadar, este evident că o mașină Turing universală este în mai mare măsură un model al creierului uman decît mașina M' pentru corpul animal. Putem combina o mașină Turing universală cu o mașină con-

structoare de maşini, astfel încît maşina rezultată H să poată atît calcula, cît şi construi. Printre activităţile de construire, un caz particular este şi adăugarea de părţi noi la maşina însăşi. Astfel, maşina-copil H conţine echipamentul minim care are însuşirea de a calcula şi construi; pătratele de pe o bandă sau de pe amîndouă provin iniţial din exterior (din mediu) şi devin experienţă dobîndită numai după ce ele au fost citite şi li s-a răspuns prin realizarea unor acţiuni convenabile. Maşina poate să crească în două feluri: creşterea pătratelor citite şi adăugirea unor părţi noi la corpul maşinii, ca răspuns la pătrate noi importate din exterior (programele). Deşi maşina poate să crească şi să facă şi alte lucruri, ceea ce ea face în fapt sau ceea ce este în stare să facă depinde de mediu. În special, ea se va reproduce numai dacă mediul oferă pătrate convenabile care determină un program de reproducere. Ce anume să fie aceste pătrate ale benzii ţine, în general, de arbitrar şi scapă controlului maşinii. Pentru a ţine seama de deosebirile de aptitudini înnăscute ale diferiţilor indivizi, reamintim că putem proiecta diferite maşini Turing universale şi maşini de construire a maşinilor, unele mai eficiente decît altele.

Acum este momentul să revenim la problema noastră principală, specificînd maşina $U_{b,b}$, printr-un program atribuit maşinii B.

Problema constă în a găsi un program U pentru B şi o metodă uniformă de reprezentare a programelor şi conţinutului benzilor, astfel încît dacă un program π pentru B şi un conţinut iniţial I sînt reprezentate pe bandă în conformitate cu această metodă, atunci programul U să producă o bandă a cărei porţiune finală reprezintă întregul conţinut care poate fi în cele din urmă produs de π prin operare asupra lui I. În special, dacă primul nu se opreşte niciodată, atunci şi numai atunci nici celălalt nu se va opri.

În [1] am dat o definiţie exactă o programelor pentru B. Este însă suficient să spunem că un program pentru B este un program la care fiecare linie este sau $*$ (marcarea pătratului citit) sau $\rightarrow$ (deplasarea la dreapta cu un pătrat), sau $\leftarrow$ (deplasarea la stînga cu un pătrat) sau transferul condiţionat. De exemplu, un program este următorul:

$$\pi\colon\ 1.\ C3,\ 2.\ \rightarrow,\ 3.\ C2,\ 4.\ *.$$

Acelaşi program îl putem reprezenta ca o mulţime finită de perechi ordonate $\langle a, b\rangle$:

$$\{\langle 1,\ 3\rangle,\ \langle 2,\ \rightarrow\rangle,\ \langle 3,\ 2\rangle,\ \langle 4,\ *\rangle\}.$$

Metoda uniformă de reprezentare a programelor şi a conţinutului benzilor de imitat este următoarea. Vom reprezenta $*$, $\rightarrow$, $\leftarrow$ respectiv prin 1, 2, 3, iar Cn prin $n + 3$. Aşadar programul va fi reprezentat prin: $\{\langle 1,\ 6\rangle,\ \langle 2,\ 2\rangle,\ \langle 3,\ 5\rangle,\ \langle 4,\ 1\rangle\}$. Apoi vom reprezenta pe 1 prin *-, 2 prin *-*- şi aşa mai departe, utilizînd semnul -- pentru separarea a două numere. Pe de altă parte, pentru conţinuturile benzilor de imitat vom reprezenta întotdeauna * prin *--* iar - prin ---*. Vom marca începutul programului cu prefixul **------, iar capătul său prin ----**. Pătratul supus citirii îl vom marca cu patru asteriscuri la dreapta, ****. Extremitatea unei porţiuni de pe bandă care reprezintă o unitate se marchează prin ----**.

Un exemplu va arăta foarte uşor ce anume avem în vedere. Vom ilustra procedura noastră printr-un exemplu unic, în care programul este cel de

mai sus, iar porţiunea iniţială consecutivă a benzii care cuprinde toate pătratele iniţial marcate şi pătratul supus iniţial citirii este

$$\text{I: } \overset{\downarrow}{*}\text{-}**.$$

Se vede uşor că istoricul operării lui π asupra lui I poate fi descris simplu, în felul următor:

programul	*pasul supus atenţiei*	*situaţia benzii*
S_1	1	$\overset{\downarrow}{*}\text{-}**$
S_2	3	$\overset{\downarrow}{*}\text{-}**$
S_3	2	$\overset{\downarrow}{*}\text{-}**$
S_4	3	$\overset{\downarrow}{*}\text{-}**$
S_5	2	$*\text{-}\overset{\downarrow}{*}*$
S_6	3	$*\text{-}*\overset{\downarrow}{*}\text{-}$
S_7...	4	$*\text{-}*\overset{\downarrow}{*}*$

În adevăr, pentru aceste π şi I particulare, situaţia iniţială a benzii pentru programul U, în ipoteza că primul pas al programului este citit la început, va fi următoarea:

$$R_1: \quad \underbrace{**\text{------}\overset{\downarrow}{*}}\underbrace{\text{---}*\text{-}*\text{-}*\text{-}*\text{-}*\text{-}*\text{---}*\text{-}*\text{---}*\text{-}*\text{---}*\text{-}*\text{-}*\text{---}*\text{-}*\text{-}*\text{-}*\text{-}*\text{---}}$$

$$\underbrace{*\text{-}*\text{-}*\text{-}*\text{---}*\text{-----}}\underbrace{***\text{--}*\text{---}**\text{--}*}\underbrace{*****\text{--}*\text{----}**}$$

Programul urmărit U, operînd pe R_1 va furniza o bandă finală a cărei ultimă porţiune imită S_7, adică:

$$\underbrace{*\text{--}*}\underbrace{\text{---}*}\underbrace{*\text{--}*}\underbrace{*\text{--}*}\underbrace{*\text{--}*}\underbrace{****\text{-----}**}$$

Uneori avem de copiat eventual cu o uşoară schimbare (cum ar fi schimbarea pătratului supus citirii) o reprezentare a porţiunii de bandă de imitat, sau chiar o copie uşor revizuită a reprezentării celei mai recente a întregului program, împreună cu cea mai recentă reprezentare a situaţiei de pe bandă. Totuşi aceasta nu complică lucrurile în mod excesiv, deoarece niciodată nu trebuie să copiem de două ori acelaşi original, iar o copie fiind o dată făcută, nu mai operăm niciodată cu originalul respectiv. În virtutea deciziei noastre de a nu face uz de şase sau mai multe pătrate consecutive decît pentru marcarea începutului unui program, putem întotdeauna să trecem la începutul copiei următoare a programului, selectînd la stînga cea mai apropiată înşiruire de şase pătrate libere consecutive.

Fiecare pas $\langle a, b\rangle$, atunci cînd este realizat, va fi marcat prin aşezarea unui asterisc pe primul pătrat liber de după ultimul asterisc din b (denumit urma lui b). În conformitate cu aceasta, la fiecare moment de timp putem

găsi primul pas al programului care încă nu a fost realizat. Apoi putem cerceta dacă pătratele alternative ale lui b cuprind un singur asterisc sau mai multe; dacă este unul singur, atunci trebuie numai să realizăm operația asterisc, marcînd primul pătrat din cele patru care preced imediat **** și marcînd urma lui b. Dacă în b avem mai mult decît un singur asterisc, cercetăm dacă ele sînt exact două; dacă da, atunci realizăm operația deplasării la dreapta, $\rightarrow$, copiind cea mai recentă situație de pe bandă, dar înlocuind **** cu cele patru pătrate care urmează imediat la dreapta (dacă la dreapta imediată avem ----, atunci pur și simplu, inserăm ---* înainte de ****) și marcăm urma lui b. Similar, dacă avem exact trei, atunci realizăm deplasarea la stînga $\leftarrow$. Dacă în b sînt mai mult decît trei asteriscuri, avem un transfer condiționat $a \cdot C$ (b—3) și sînt posibile diferite alternative pentru desfășurarea următoare. Mai întîi, examinăm dacă primul pătrat din cele patru care preced imediat **** este gol sau nu. Dacă este un blanc, marcăm, pur și simplu, urma lui b. Dacă nu este gol, atunci trebuie să determinăm dacă $a = b - 3$, sau $a < b - 3$, sau $a > b - 3$ numărînd asteriscurile din a și b. Dacă $a = b - 3$, avem un caz banal, care poate fi expediat ușor. Dacă $a < b - 3$, atunci putem folosi asteriscuri în b pentru a marca urmele din pașii a, $a + 1$, ..., $b - 3 - 1$, și aceasta este totul. Dacă $a > b - 3$, atunci trebuie să așezăm pasul $b - 3$ (de exemplu, utilizînd asteriscuri ale lui a) și să copiem întregul program împreună cu cel mai nou conținut al benzii, schimbînd însă toți pașii programului dinainte de al (b — 3)-lea pătrat marcat din copie.

Pentru a prezenta mai exact această schemă, dăm un număr de subrutine, exprimînd în cuvinte pe cele mai complicate.

(i) Subrutina α_n. Cititorul trece la stînga de-a lungul benzii, căutînd cel mai apropiat șir de n (sau mai multe) blancuri consecutive, care se află toate la stînga pătratului supus lecturii inițiale (dacă există un asemenea șir), și se oprește în poziția de citire a pătratului celui mai de dreapta din acest șir.

$$1. \leftarrow, \mathrm{Cl}, 2. \leftarrow, \mathrm{Cl}, \ldots, n. \leftarrow, \mathrm{Cl}, (n + 1). \rightarrow^{n-1}.$$

(ii) Subrutina β_n. Cititorul trece la dreapta de-a lungul benzii, căutînd cel mai apropiat șir de n (sau mai multe) blancuri consecutive, care se află toate la dreapta pătratului supus lecturii inițiale (dacă există un asemenea șir) și se oprește în poziția de citire a celui de al n-lea pătrat din acest șir.

$$1. \rightarrow, \mathrm{Cl}, 2. \rightarrow \mathrm{Cl}, \ldots, n. \rightarrow, \mathrm{Cl}.$$

(iii) Subrutina ξ_n^m. Fiind dată o bandă pe care la dreapta pătratului supus lecturii inițiale se află un șir de n sau mai multe asteriscuri consecutive și pe care nu se află mai multe decît m locuri goale consecutive între cel mai apropiat asemenea șir și pătratul supus lecturii inițiale, programul îi impune cititorului să caute șirul respectiv și să se oprească în poziția de citire a celui de al n-lea pătrat al șirului. De exemplu, pentru $m = 6$ și $n = 3$ avem: $1. \rightarrow$, $C2, \rightarrow$, $C2, \rightarrow C2, \rightarrow$, $C2, \rightarrow$, $C2, \rightarrow$, $C2, \rightarrow$, (la pasul 2, * este supus citirii); $2. \rightarrow$, $C3, \leftarrow$, $C1$ (dacă este alt *, trebuie continuat; în caz contrar, trebuie revenit); $3. \rightarrow$, $C4, \leftarrow$, $C1$; $4. \rightarrow, \leftarrow$.

Pentru alte valori ale lui m și n aceste programe se construiesc în mod similar. Deoarece nu ne interesează programele cu $m > 6$, vom utiliza numai ξ_n^6, scriind, pur și simplu, ξ_n.

(iv) Subrutina $\pi(m)$. Atunci cînd dispozitivul de citire citește un pătrat la dreapta începerii a șase pătrate goale din ultima copie a programului, această subrutină îl trimite să caute primul pas al programului $\langle a, b\rangle$, care n-a fost încă realizat și să încheie citind începutul lui b. Dacă toți pașii sînt realizați, atunci cititorul va trece la pasul m. Aceasta depinde de faptul că într-o copie a programului de folosit nu marcăm niciodată blancurile de la extremitatea unui a sau unui b și nici pătratele dintre două numere, exceptînd asteriscurile urmei lui b într-un pas realizat $\langle a, b\rangle$.

1. α_3, α_3, $\rightarrow$ 2. β_3, β_2, $\rightarrow$, $C2$, $\rightarrow$, $C3$, $\rightarrow$, Cm $\leftarrow^2$, 3. α_3, $\rightarrow$.

(v) Subrutina π'. Dacă mai avem vreun pas al programului nemarcat, această subrutină ne permite să marcăm primul asemenea pas și să încheiem prin lecturarea marcării noi.

1. α_6, 2. β_3, β_2, $\rightarrow$, $C2$, $\rightarrow^2$, $*$.

(vi) Subrutina θ. Aceasta trimite dispozitivul de citire să caute începutul ultimei reprezentări de pe bandă.

β_7, $\leftarrow^3$, α_4, α_4, $\rightarrow^3$.

(vii) Subrutina θ'. Aceasta trimite dispozitivul de citire să caute primul pătrat din cele patru care reprezintă pătratul supus lecturii.

θ, ξ_5, $\leftarrow^7$.

(viii) Subrutina $\Rightarrow$. Aceasta este subrutina pentru operația $\rightarrow$. Ea permite mașinii să copieze ultima reprezentare, dar înlocuind între ele $****$ cu cele patru semne imediat următoare dacă ele diferă de ----, iar în caz contrar inserînd ---* înainte de $****$. Apoi se marchează primul pas al programului care nu este încă marcat.

(ix) Subrutina $\Leftarrow$. Aceasta este o subrutină întrucîtva similară pentru operația deplasării la stînga $\leftarrow$.

(x) Subrutina $\mu(m, n)$. Cînd dispozitivul de citire examinează primul pătrat din cele patru care reprezintă pătratul supus citirii, această subrutină îi permite să compare pe a și b din primul pas nerealizat al programului. Dacă $a < (b - 3)$, urmează pasul al m-lea; dacă $a > (b - 3)$, urmează pasul al n-lea; dacă $a = b - 3$ (adică pasul este $a.Ca$), se trece la repetarea unui pas anterior.

(xi) Subrutina $\varphi(m)$. Această subrutină permite mașinii să marcheze pașii a, $a + 1$, ..., $b - 3 - 1$, trecînd apoi la pasul al m-lea.

(xii) Subrutina $\psi(m)$. Această subrutină permite mașinii să copieze cel mai recent program și cea mai recentă reprezentare a benzii, însă marcînd în copie numai pașii 1, 2, ..., $b - 3 - 1$ (în particular, dacă $b - 3 = 1$, nu se marchează nici un pas), trecînd apoi la pasul m.

Problema explicitării subrutinelor (viii) — (xii) prezintă o mare importanță. Deocamdată le presupunem date și să vedem cum va arăta programul U care ne interesează.

Programul U

1. $\pi(13)$ (Caută primul pas din program încă nerealizat, dacă există asemenea pași; în caz contrar treci la pasul următor).

2. $\rightarrow^2$, $C4$ (Vezi dacă b reprezintă operaţia asterisc)
3. θ', $*$, π', Cl (Dacă da, atunci realizează operaţia $*$ şi revino la 1)
4. $\rightarrow^2$, $C6$ (În caz contrar, vezi dacă b reprezintă operaţia deplasării la dreapta)
5. $\Rightarrow$, Cl (Dacă da, realizează această operaţie şi revino la 1)
6. $\rightarrow^2$, $C8$ (În caz contrar, vezi dacă b reprezintă operaţia deplasării la stînga)
7. $\Leftarrow$, $C1$ (Dacă da, realizează această operaţie şi revino la 1)
8. θ', $C10$ (În caz contrar, vezi dacă pătratul supus citirii este gol)
9. π', $C1$ (Dacă da, marchează b şi revino la 1)
10. $\mu(11, 12)$ (Dacă nu, compară a şi b, determinînd dacă are loc $a = b - 3$ sau $a < b - 3$ sau $a > b - 3$)
11. $\varphi(1)$ (Dacă $a < b - 3$, realizează φ şi revino la 1)
12. $\psi(1)$ (Dacă $a > b - 3$, realizează ψ şi revino la 1)
13. β_6, $\rightarrow^6$ (Decidem, în mod arbitrar, ca maşina să încheie prin citirea ultimului pătrat marcat).

O dată dat programul U, putem, desigur, să-l introducem în maşina noastră B (adică să remodelăm B conform cu U şi să îmbogăţim memoria internă), pentru a obţine maşina universală cu memorie în serie $U_{b,b}$ pe care o căutăm (respectiv maşina Turing universală pe care o căutăm).

Acum să dăm subrutinele (viii)—(xii).

(viii) Subrutina $\Rightarrow$. Utilizăm al doilea pătrat din fiecare şir de patru, pentru a urmări ce anume am copiat. (Întîmplător, al treilea din fiecare patru care este întotdeauna gol deosebeşte aceste cvadruplete de indicatorul de lectură ****)

1. θ, $\rightarrow^3$ (Caută începutul ultimei reprezentări a benzii gata de copiat)
2. $\rightarrow^4$, $C8$ (Vezi dacă al doilea pătrat din cvadrupletul următor este sau nu marcat)
3. $\rightarrow^2$, $C5$ (Dacă nu este marcat, vezi dacă este capătul reprezentării benzii)
4. $\rightarrow$, $C16$ (Dacă da, treci la pasul următor)
5. $\leftarrow^2$, $*$, $\leftarrow$, $C7$ (În caz contrar, marchează al doilea pătrat şi pregăteşte-te să copiezi cvadrupletul)
6. β_5, $\leftarrow$, $*$, $C1$
7. β_5, $\leftarrow$, $*$, $\leftarrow^3$ $*$, $C1$ } (Copiază cvadrupletul şi revino la început)
8. $\rightarrow$, $C10$ (Dacă este marcat pasul 2, vezi dacă cvadrupletul este ****)
9. $\leftarrow$, $C2$ (În caz contrar, ceea ce înseamnă că el a fost deja copiat, revino la 2)
10. $\rightarrow^3$, $C2$ (Dacă răspunsul la 8 este afirmativ, examinează dacă a fost copiat cvadrupletul următor; dacă da, revino la 2)
11. $\leftarrow$, $C15$ (În caz contrar, vezi dacă primul pătrat din cvadruplet este gol)
12. $\rightarrow^3$, $C14$ (Dacă da, vezi dacă acest cvadruplet este ultimul)
13. β_5, $\leftarrow$, $*$, $(\rightarrow, *)^4$, $C16$ (Dacă da, copiază şi fii gata de încheiere).
14. $\rightarrow$, $*$, β_5, $\leftarrow$, $*$, $(\rightarrow, *)^4$, $C1$ (În caz contrar, marchează cvadrupletul, copiază-l şi revino la 1)
15. $\rightarrow$, $*$, β_5, $\leftarrow^4$, $*$, $\rightarrow^2$, $(\rightarrow, *)^5$, $C1$ (Similar, în caz contrar treci la pasul 11)
16. β_5, $*$, $\rightarrow$, $*$, π'. (Termină copierea şi marchează primul pas nemarcat din program).

(ix) Subrutina $\Leftarrow$. Aceasta este similară cu (vii), cu deosebirea că înainte de a copia un cvadruplet trebuie, la început, să stabilim dacă cvadrupletul imediat următor la dreapta este **** şi să procedăm în consecinţă. Explicitarea subrutinei o lăsăm pe seama cititorului, ca un exerciţiu.

Dăm cîteva explicaţii simple şi subrutine utile. Cînd reprezentăm un pas al unui program, vom vorbi despre pătrate principale şi pătrate auxiliare. Pătratele marcate iniţial sînt principale, iar cele care sînt iniţial goale se numesc pătrate auxiliare. În cele trei subrutine (x)—(xii) vom pune mereu asteriscuri în faţa asteriscurilor pătratelor principale. Pentru aceasta trebuie să marcăm pătratele auxiliare pe care le străbatem pentru a ţine seama pe care anume le-am parcurs şi pînă unde am ajuns. Vom folosi o mulţime de pătrate auxiliare pentru a marca realizarea operaţiei de asterisc şi altă mulţime pentru a urmări copierea. Pătratele urmelor lui a şi b sînt rezervate pentru numărarea paşilor din program.

Înainte de a aplica programul $\mu(m, n)$ găsisem deja că $b \geqslant 4$, dar dispozitivul de citire mai examinează cvadrupletul care îl precede pe ****. Introducem o subrutină π, variantă a subrutinei $\pi(m)$, pentru a aduce dispozitivul de citire înapoi la începutul lui b, a-l determina să marcheze al doilea pătrat auxiliar de la dreapta lui şi să termine prin a citi ultimul pătrat principal al lui a.

(xiii) Subrutina π. 1. α_6, 2. β_3, β_2, $\rightarrow$, $C2$, α_3, $\rightarrow^4$, $*$, $\leftarrow^7$.

Deoarece aplicînd $\mu(m, n)$, ştim deja că $a \geqslant 1$, $b \geqslant 4$, începem comparaţia lui a cu $b - 3$ prin examinarea celui de al doilea pătrat principal al lui a şi celui de al cincilea al lui b. Pentru aceasta recurgem la două subrutine simple.

(xiv) Subrutina ζ. 1. α_3, $\leftarrow$, α_2, 2. $\rightarrow^4$, $C2$.

(xv) Subrutina ζ. 1. β_3, $\rightarrow^4$, 2. $\rightarrow^4$, $C2$.

Ajungem acum la (x).

(x) Subrutina $\mu(m, n)$. Această subrutină ne permite să stabilim dacă are loc $a > b - 3$, $a = b - 3$ sau $a < b - 3$. Dacă $a = b - 3$, avem un ciclu banal. Dacă $a < b - 3$, treci la pasul m. Dacă $a > b - 3$, treci la pasul n.

1. π (Marchează al doilea pătrat auxiliar din b şi revino la sfîrşitul lui a)
2. ζ', $\rightarrow$, $C6$ (Vezi dacă $b - 3$ are o unitate necomparată)
3. ζ, $\rightarrow$, Cn (În caz contrar, în ipoteza că a are o asemenea unitate, adică $a > b - 3$, treci la pasul n, citind o parte a lui a)
4. $\leftarrow^2$
5. $C5$ (Dacă nici a nici $b - 3$ nu au unităţi necomparate, atunci $a = b - 3$, caz care nu admite încheiere)
6. ζ, $\leftarrow$, $C8$ (Dacă $b - 3$ răspunde afirmativ la pasul 2, cercetează acelaşi lucru pentru a)
7. β_3, $\rightarrow$, Cm (În caz contrar însă, $b - 3 > a$, treci la pasul m citind începutul lui b)
8. $\rightarrow^2$, $C11$ (Dacă şi a are o asemenea unitate, cercetează dacă nu cumva are două)
9. ζ', $\rightarrow^3$, Cm (Dacă a are numai una, dar $b - 3$ are două, $b - 3 > a$, treci la m citind o parte a lui b)
10. $\leftarrow^2$, $C5$ (Dacă atît a cît şi $b - 3$ au exact una, atunci $a = b - 3$.
11. ζ', $\rightarrow^3$, $C13$ (Dacă a are două, cercetează dacă şi $b - 3$ are două)

12. α_3, $\leftarrow$, α_2, $\rightarrow$, Cn (Dacă $b - 3$ nu are două, $a > b - 3$, treci la n citind începutul lui a)
13. $\leftarrow^3$, $*$, ζ, $*$, $C2$ (Dacă atît a cît şi $b - 3$ au două sau mai multe, marchează ambele pătrate auxiliare şi continuă).

Pentru a specifica $\varphi(k)$, să observăm că atunci cînd intrăm în această subrutină, înseamnă că maşina a stabilit că $b - 3 > a$, iar dispozitivul de citire examinează o parte a lui b (conform cu paşii 7 şi 9 din subrutina de mai sus). Apoi, b este ultimul cuvînt de instrucţiune de pe bandă care este mai mare decît 2 şi al cărui al doilea pătrat auxiliar este marcat, deoarece în orice transfer cu $a > b - 3$ putem întotdeauna copia întregul program, lăsînd de o parte asemenea marcări (conform cu $\gamma(k)$ de mai jos); deci subrutina ρ de mai jos este corectă.

(xi) Subrutina $\varphi(k)$. Această subrutină determină ca dispozitivul de citire să facă uz de ceea ce a rămas de comparat din $b - 3$ şi să marcheze paşii a, $a + 1$, ..., $b - 3 - 1$.

1. ζ, $\leftarrow$, $C4$ (Vezi dacă $a - 1$ este par sau impar)
2. ζ', $\rightarrow$, $C5$ (Dacă $a - 1$ este par, sau dacă este impar, dar maşina a trecut deja prin pasul 4 de mai jos, începi să compari)
3. β_3, $\leftarrow^2$, $*$, Ck (Dacă $a - 1$ este par şi $b - 3 = a + 1$, marchează pasul a şi treci la pasul k)
4. ζ', $*$, β_3, $\leftarrow^2$, $*$, α_3, $\leftarrow^3$ $C2$ (Dacă $a - 1$ este impar, marchează pasul $\langle a, b\rangle$, taie o pereche în $b - 3$ şi fii gata să continui să compari $b - 3 - a - 1$ cu paşii $a + 1$ ..., $b - 3 - 1$ din program)
5. $\rightarrow^2$, $C7$ (Vezi dacă mai este şi alt pătrat necomparat în $b - 3$)
6. π', Ck (În caz contrar, marchează pasul următor din program şi treci la k).
7. $\leftarrow^3$, $*$, π', π', ρ, $C2$ (În caz afirmativ, fă uz de două asteriscuri din $b - 3$, pentru a înlătura doi paşi nemarcaţi din program şi revino la a prin subrutina ρ, care urmează să fie precizată, după care continuă).

Subrutina ρ este următoarea:
(xvi) ρ.

1. α_3, $\rightarrow^3$, $C2$, $\leftarrow^6$, $C1$, 2. $\rightarrow^2$, $C3$, $\leftarrow^8$, $C1$, 3. $\leftarrow$, $C4$, $\leftarrow^7$, $C1$, 4. $\leftarrow^7$.

Rămîne doar (xii), pe care-l descompunem în două părţi. Partea întîi utilizează pătratele necomparate din a pentru „a marca dublu" paşii $a - 1$, ..., $b - 3 + 1$, $b - 3$ din program; partea a doua copiază întregul program şi întregul conţinut cel mai recent al benzii, dar lăsînd nemarcaţi paşii dublu marcaţi. Cu alte cuvinte, avem:
(xii) Subrutina $\psi(k)$. 1. $\eta(2)$, 2. $\gamma(k)$.
Problema constă în a defini pe $\eta(k)$ şi pe $\gamma(k)$.
(xvii) Subrutina $\eta(k)$. Structura lui $\eta(k)$ este similară cu aceea a lui $\varphi(k)$. În $\mu(m, n)$, dacă s-a stabilit că $a > b - 3$ şi maşina este gata pentru $\eta(k)$, dispozitivul de citire examinează o parte a lui a [a se vedea şi paşii 3 şi 12 de la $\mu(m, n)$].

1. ζ', $\rightarrow$, $C4$ (vezi dacă $b - 3 - 1$ este par sau impar)
2. ζ, $\leftarrow$, $C5$.
3. $\leftarrow^2$, Ck

4. ζ, *, α_3, $\leftarrow^2$, *, β_3, $\rightarrow$, $C2$ (dacă $b - 3 - 1$ este impar, dublează marcarea lui $a - 1$ etc.)

5. $\rightarrow^2$, $C7$
6. α_3, $\leftarrow^2$, *, Ck
7. $\leftarrow$, *, α_3, $\leftarrow^2$, *, α_3, $\leftarrow^2$, *, β_3, $\rightarrow$, $C2$.

(xviii) Subrutina $\gamma(k)$. Acum sîntem gata să copiem întregul program şi întregul conţinut nou al benzii. Reamintim că la această etapă, urma fiecărui a este marcată numai în cazul marcării duble, iar urma fiecărui b este marcat numai în cazul marcării întregului pas $\langle a, b\rangle$; apoi, în afară de cazurile speciale cînd primul pătrat auxiliar din a sau b coincide cu urma respectivă, primul pătrat auxiliar nu este niciodată marcat. Paşii programului care urmează să fie copiaţi prezintă trei posibilităţi succesive: paşi unimarcaţi (eventual nici unul), paşi dublu marcaţi (cel puţin pasul $a - 1$), paşi nemarcaţi (cel puţin pasul a). Întîi copiem toţi paşii fără vreo marcare. După aceea va fi uşor să marcăm toţi paşii unimarcaţi şi numai pe ei, copiind conţinutul nou al benzii. Ca pas auxiliar utilizăm subrutina $\sigma(m)$:

1. α_6, 2. β_2, $\rightarrow$, $C3$, $\rightarrow$, $C3$, $\rightarrow^2$, Cm, 3. $\rightarrow^2$, $C4$, $\leftarrow^2$ $C2$, 4. $\leftarrow$, $C2$.

Lucrînd la programul de copiat, acesta ne determină să găsim prima expresie numerică mai mare decît unu care n-a fost încă copiată şi ne conduce la pasul m, dacă nu mai sînt atare expresii. În programul pentru $\gamma(k)$, primii 12 paşi realizează copierea paşilor din program. Să observăm că, în reprezentarea paşilor programului, doi de unu nu apar succesiv decît eventual de la bun început.

1. β_7, *, α_6, α_6, $\rightarrow^7$, $C2$, β_7, $\leftarrow^3$, *, α_6 (copiază primul număr al programului; copiază şi numărul următor dacă este 1; în caz contrar, urmezi procedura standard).
2. $\sigma(12)$, $\rightarrow^3$, $C5$, β_7, $\leftarrow$, *, $\leftarrow^2$, * (caută numărul următor > 1 necopiat; dacă este 2, copiază-l şi treci la pasul următor; în caz contrar, treci la pasul 5).
3. α_6, $\sigma(12)$, *, β_2, $\rightarrow$, $C4$, $\rightarrow$, $C4$, $\rightarrow^2$, $C12$ (marchează numerele copiate şi vezi dacă dintre numerele rămase mai sînt de copiat; dacă nu mai sînt, treci la pasul 12).
4. $\rightarrow^2$, $C2$, β_7, $\leftarrow^3$, *, α_6, $\leftarrow^6$, $C2$ (dacă există un număr următor şi el este 1, atunci copiază-l şi continuă; în caz contrar continuă).
5. $\rightarrow^2$, $C6$, β_7, $\rightarrow$, *, $(\leftarrow^2, *)^2$, $C3$ (dacă numărul este 3 atunci copiază-l şi încheie cu paşii 3 şi 4).
6. β_7, $\rightarrow^3$, *, $(\leftarrow^2, *)^3$, $\sigma(12)$, $\rightarrow^4$, *, $\rightarrow^3$, $C7$, $\leftarrow^2$, $C3$ (dacă numărul este 4, copiază-l, marchează al treilea pătrat auxiliar şi încheie cu paşii 3 şi 4).
7. $\rightarrow^2$, $C8$, β_7, $\leftarrow^5$, *, $C3$ (dacă a rămas mai mult decît o unitate, copiază şi încheie).
8. $\rightarrow^2$, $C9$, $\sigma(12)$
9. $\rightarrow$, $C9$, *, β_7, $\leftarrow^3$, *, $\leftarrow^2$, *, $\sigma(12)$ (dacă au rămas două sau mai multe unităţi, copiază două unităţi, marchează un pătrat auxiliar adiţional şi continuă).
10. $\rightarrow^4$, $C10$, $\leftarrow$, $C11$, $\leftarrow^2$, $C2$ (dacă n-au mai rămas, revino la 2)
11. $\leftarrow^2$, $C7$ (în caz contrar, continuă cu 7).
12. β_7, *, $\leftarrow$, * (marchează sfîrşitul programului cu -----**).

Partea rămasă la $\gamma(k)$ este uşoară.

13. α_6, σ_6.

14. β_3, β_2, $\rightarrow$, $C15$, $\leftarrow^3$, $C17$ (Caută următorul pas unimarcat, dacă acesta există; în caz contrar, încheie).

15. α_3, $\leftarrow^2$, $*$, β_7 (marchează dublu).

16. β_3, β_2, $\rightarrow$, $C16$, $*$, $C13$ (marchează un pas în copie şi repetă).

17. β_7, $\rightarrow^2$, α_4, $\rightarrow$ (caută începutul conţinutului de pe bandă care urmează să fie copiat).

18. $\rightarrow^4$, $C19$, $\rightarrow^2$, $C20$, β_7, $(\rightarrow, *)^2$ (dacă începutul este format din patru asteriscuri, copiază-l prin pasul 19, dacă se încheie, copiază-l; în caz contrar treci la pasul 20).

19. β_7, $\rightarrow^2$, $(\rightarrow, *)^4$, $C17$.

20. $\leftarrow^3$, $C21$, $\rightarrow$, $*$, β_7, $\leftarrow^3$, $*$, $C17$ (vezi dacă primul pătrat este gol sau marcat şi copiază în mod corespunzător).

21. $\rightarrow$, $*$, β_7, $\leftarrow^3$, $*$, $\leftarrow^3$, $*$, $C17$.

Aceasta completează explicitarea tuturor subrutinelor necesare pentru programul principal U. Trecem acum la exemplificare, folosind programul $\Pi(1.\ C3,\ 2.\ \rightarrow,\ 3.\ C2,\ 4.\ *)$ şi intrarea dată mai sus $I(* - \overset{\downarrow}{*}*)$. Situaţia iniţială a benzii pentru U este R_1, după cum am arătat mai sus. Să aplicăm acum U la situaţia iniţială şi să considerăm rezultatele la intervalele cruciale. Deoarece primul pas este un transfer condiţionat iar pătratul supus citirii iniţiale este marcat, U va conduce imediat la pasul 10, comparînd 1 cu $3 + 3$. În urma realizării în U a subrutinelor $\mu(11, 12)$, $\varphi(1)$ şi $\pi(18)$ rezultatul este următorul:

R_2: **------*---*-***-*-*-**--*-*---*-**--*-*-*---*-*-*-*-*---

--*-*---*-----***--*---**--******--*----**

Aceasta corespunde lui S_2 în istoricul lui Π. Starea următoare de considerat în programul U este:

R_3: **------**--***-***-****--****--****--*****---***-***-*---

----*-----****-*-*-*******-*----**-----

----*-*-*-*-**--*-*---*-*---*-*-*---*-*-*---

--*-*---*----***--*---**--******--*----**

I se propune cititorului să verifice R_2 şi R_3 şi să stabilească singur R_4, R_5, R_6 şi R_7.

BIBLIOGRAFIE

1] Hao Wang, *A Variant to Turing's Theory of Computing Machines*, în „Jour. Assoc. Comp. Mach.", 4, 1957, pp. 63–92.

2] John von Neumann, *The General and Logical Theory of Automata*, Cerebral mechanisms in behaviour (Simpozionul Hixon), Wiley, 1952; retipărirea în culegerea redactată de James R. Newman *The World of Mathematics*, vol. 4, Simon and Schuster, 1956.

CAPITOLUL VIII
LOGICA AUTOMATELOR[1]

§ 1. INTRODUCERE

În această lucrare ne vom ocupa cu utilizarea sistemelor și tehnicilor logice în vederea analizei atît a structurii, cît și a comportării automatelor.

În § 2 ne ocupăm de automate în general. Introducem aici o nouă specie de automate, automate în creștere, astfel încît mașinile Turing și automatele autoreproducătoare sînt cazuri particulare ale lor. Apoi însă vom limita discuția la automatele deterministe și fixe și vom defini proprietățile lor de bază. Dăm metode de analiză a acestor automate în termenii stărilor lor. În acest scop folosim patru feluri de tabele de stări: tabele complete, arborii admisibilităților, tabele caracteristice și tabelele ieșirilor. Aceste metode ne oferă o procedură de decizie pentru a determina dacă două automate se comportă în același fel sau nu. În final definim o clasă de rețele automate bine formate și arătăm cum se poate trece de la rețele la tabelele de stări și reciproc. Pentru rețele dăm o formă normală codată.

În § 3 arătăm cum se poate exprima în formă matricială informația conținută în tabelele de stări. Elementul (ij) din matricea trecerilor stabilește intrările care determină ca starea S_i să producă starea S_j. În legătură cu aceste matrice demonstrăm diferite teoreme; de asemenea, introducem o formă normală corespunzătoare pentru rețele (forma normală decodată sau forma matricială).

În § 4, la început, arătăm cum se descompune o rețea într-una sau mai multe subrețele care conțin cicluri, dar nu sînt interconectate ciclic. Apoi discutăm relația de cicluri din rețele în vederea utilizării funcțiilor de adevăr și a cuantorilor pentru descrierea rețelelor. Conchidem prin stabilirea legăturii dintre rețelele nervoase și celelalte rețele automate.

§ 2. AUTOMATE ȘI REȚELE

2.1. Automate fixe și automate în creștere

Pentru a începe, să considerăm un obiect sau sistem (de exemplu, un corp fizic, o mașină, un animal sau un sistem solar) care în cursul timpului își schimbă starea; în cursul timpului, el poate să-și schimbe sau să nu-și schimbe

[1] În colaborare cu A. W. Burks. Acest capitol a apărut inițial în „Journal of Association for Computing Machinery", **4**, 1957, pp. 193–218, și pp. 279–297.

mărimea, poate să interacţioneze sau să nu interacţioneze cu mediul său ambiant. Cînd descriem starea obiectului la un moment de timp arbitrar, trebuie, în general, să ţinem seama de următoarele: timpul considerat, istoria trecută a obiectului, legile care guvernează acţiunea internă a obiectului sau sistemului, starea mediului (care la rîndul său este un sistem de obiecte) şi legile care guvernează interacţiunea dintre obiect şi mediul său. Dacă ne hotărîm în felul acesta, atunci putem să ne referim la toate aceste obiecte şi sisteme ca la nişte automate. Obiectivul principal al acestui memoriu este studiul unui caz particular de automate, şi anume calculatoarele digitale (calculatoarele numerice) şi reţelele nervoase. Pentru a defini această clasă ca o subclasă de automate generale, vom introduce diferite ipoteze de simplificare şi particularitate. Este evident că, adoptînd o asemenea ipoteză, realizăm o decizie deliberată şi întrucîtva arbitrară, pentru a ne concentra atenţia asupra unei anumite subclase de automate. De exemplu, modificînd unele dintre aceste decizii putem ajunge la conceptul foarte interesant de automate indefinit crescătoare, care cuprinde binecunoscutele maşini Turing drept cazuri particulare.

A. Unităţi discrete. Prima decizie pe care o luăm este de a considera doar descrieri discrete; aceasta înseamnă că atît între două momente date, cît şi între două elemente (particule, celule etc.) există doar un număr finit de alte momente, respectiv elemente. Această decizie este o consecinţă a interesului nostru pentru calculatoarele digitale. Ea atrage angajarea la folosirea în mai mare măsură a matematicii discrete adică a teoriei funcţiilor recursive şi a logicii simbolice, în vederea analizei sistemelor supuse investigaţiei. Deci problemele noastre diferă de cele uzuale, în care timpul, elementele sistemului, stările (culoarea, duritatea etc.) unui element, precum şi interacţiunea dintre obiect şi mediul său sînt toate tratate ca fiind continue. Evident că, în acest caz, accentul cade pe analiza clasică şi aplicaţiile ei. Spre deosebire de calculatoarele digitale, care fac uz de unităţi discrete, calculatoarele analogice simulează într-o manieră continuă, aşa că pentru studiul lor este deosebit de convenabilă matematica continuă (nediscretă).

Trebuie să observăm că deşi sistemele matematice discrete sînt, în general, mai utile pentru investigarea automatelor discrete, în prezent o utilizare foarte obişnuită (şi poate chiar primordiaiă) a calculatoarelor digitale constă în reprezentarea (desigur aproximativă) a matematicii continue. (De exemplu, în vederea rezolvării ecuaţiilor diferenţiale). De fapt, această procedură implică găsirea unor sisteme matematice discrete, care aproximează în mod adecvat sistemul continuu corespunzător.

B. Comportare deterministă. Nu ne vom ocupa cu elemente apte de o comportare aleatoare (nedeterministă). Vom presupune, mai degrabă, că în fiecare moment de timp, starea completă a unui obiect este în întregime determinată de istoria sa trecută, care include efectele mediului ambiant în trecut. Pentru a trata automatele deterministe cu un număr mare de elemente, statistica poate fi întrebuinţată (a se vedea teoria cinetică a gazelor), dar aici nu vom face aceasta.

C. Finitudinea bazelor. Von exclude întotdeauna „infinitul actual" de stări: fiecare sistem va conţine un număr finit de elemente în fiecare moment de

timp dat, iar fiecare element poate avea doar un număr finit de stări în fiecare moment dat. În ce privește posibilitatea „infinității potențiale" de elemente sau stări, ne rezervăm pronunțarea, adică urmează încă să mai stabilim dacă numărul elementelor sau stărilor fiecărui element poate sau nu să se schimbe cu timpul, în particular să crească nemărginit.

Finitudinea timpului pretinde o exigență separată. Condiția de discreție *A*) implică că între două momente date de timp nu intervin niciodată o infinitate de alte momente. Dar rămîne deschisă problema cît de multe momente de timp diferite sînt de considerat. Pentru o teorie generală, ar fi lipsit de eleganță să luăm un număr finit definit, de exemplu 10^{18} sau 10^{27}, ca margine superioară a numărului posibil de momente. Pare dezirabil să permitem creșterea nedefinită a timpului, cercetînd comportarea obiectului de-a lungul timpului. Mai rămîne chestiunea trecutului infinit. Ipoteza unui trecut infinit prezintă avantajul de a omogeniza întreaga înșiruire a momentelor de timp, desființînd astfel în mare parte individualizarea lor. Însă avînd în vedere ipoteza noastră deterministă, trecutul infinit ar fi neconvenabil (pentru motivele pe care le vom arăta la 3.3) așa că stipulăm că există un moment inițial de timp, momentul zero. Starea internă a automatului la momentul zero va fi o stare marcată.

În terminologia aritmetică, avem două alternative pentru reprezentarea momentelor de timp: întregii pozitivi (sau nenegativi) și mulțimea tuturor întregilor, inclusiv cei negativi.

(*C*.1) Un viitor infinit, dar un trecut finit: fiecare întreg nenegativ reprezintă un moment de timp și reciproc; numărul zero reprezintă începutul timpurilor.

(*C*.2) Un viitor infinit și un trecut infinit.
Decizia noastră constă în a adopta prima din aceste două alternative.

D. Operații sincrone. Unele calculatoare conțin componente care operează cu diferite viteze după funcția lor, după așezarea lor, după timp sau după intrările timpului. Asemenea circuite se numesc „asincrone", spre deosebire de circuitele sincrone care funcționează pe o scară de timp uniformă (de obicei, sub direcția unui orologiu central de control). De fapt, operațiile asincrone prezintă două aspecte: (1) intervalele de timp dintre operații pot varia cu timpul; (2) diferitele părți ale calculatoarelor își schimbă stările cu o viteză diferită, aceasta depinzînd în general de informația conținută în circuite.

Vom presupune că toate elementele unui sistem dat (ale unei rețele date) operează în aceeași măsură și vom spune că un asemenea mod de operare este „sincronic". În particular, aceasta înseamnă că un element poate opera la fiecare moment nenegativ t. Această ipoteză nu implică că toate intervalele de timp ar fi egale; de exemplu, intervalul de la timpul $t = 7$ la timpul $t = 8$ poate fi de o microsecundă, în timp ce intervalul de la timpul 8 la timpul 9 poate fi de 12 ore. Așadar, ipoteza noastră nu exclude posibilitatea (1) din alineatul precedent. Ea cuprinde o restricție în ce privește punctul (2), dar restricția nu este atît de puternică cum s-ar părea. De exemplu, putem reprezenta diferitele părți ale unei mașini asincrone prin subsisteme care operează cu coeficienți diferiți, interconectînd aceste subsisteme cu reprezentările logice ale legăturilor. Așa cum sistemele discrete (de exemplu, calculatoarele digi-

tale) se pot întrebuința pentru a simula sistemele continue (a se vedea alineatul al doilea care urmează după ipoteza (*A*)), tot astfel calculatoarele sincrone pot fi utilizate pentru a simula pe cele asincrone.

E. Determinarea prin trecutul imediat și prezent. Stipularea conform căreia comportarea unui automat la un moment de timp $t + 1$ este determinată de către trecut lasă nerezolvată problema cît de mult trebuie să căutăm în trecut ceea ce influențează prezentul. Vom presupune că o atare influență se manifestă indirect, prin intermediul stărilor momentelor de timp intermediare, astfel încît pentru a calcula starea unui automat la momentul $t + 1$ nu este necesar să cunoaștem decît starea sa la momentul imediat precedent t. Presupunem, așadar, că pentru ca prezentul să fie influențat de un eveniment care s-a întîmplat în trecutul îndepărtat, trebuie ca amintirea acestui eveniment să se fi păstrat de-a lungul timpului în stările interne ale automatului. Acest postulat corespunde îndeaproape cu modul actual de lucru cu sistemele automate. Desigur, un calculator avînd, de exemplu, un orologiu cu microsecunde, poate avea linii de întîrziere, de exemplu, de 500 microsecunde, astfel încît un impuls stocat în memorie nu este accesibil pentru blocul aritmetic la fiecare moment al orologiului, dar o asemenea linie de întîrziere este reprezentată în mod natural ca un lanț de 500 de unități (microsecunde) de întîrziere, elementul inițial și cel final al lanțului fiind legate cu restul calculatorului. De fapt, această ipoteză nu ne face să pierdem din generalitate, deoarece pentru fiecare N, fixat astfel încît un automat A poate să-și amintească ce s-a întîmplat în cursul celor N (dar nu mai multe) momente imediat precedente, putem construi cu ușurință un automat A' care, deși este apt de a memora doar trecutul direct imediat, simulează complet automatul A.

Dacă ne gîndim la automatele care au o memorie nemărginită sau, în special, la acelea care își pot aminti orice s-a întîmplat în trecut, dăm de o situație generală cu totul diferită. În asemenea cazuri, informația care trebuie reținută crește cu timpul, în timp ce pentru un automat cu capacitate fixă poate interveni un moment de timp dincolo de care el nu mai poate menține informația acumulată în cursul istoriei sale. Astfel, pentru ca o mașină să-și amintească întreaga istorie trecută, este necesar și suficient ca ea să crească într-o anumită măsură convenabilă. O asemenea creștere poate fi realizată prin apariția la fiecare moment a unui nou element de întîrziere pentru fiecare intrare. Pe scurt, avînd în vedere postulatul de determinare prin trecutul imediat, alternativa de memorizare a întregului trecut se poate studia cel mai bine în legătură cu automatele crescătoare.

O altă problemă legată de determinarea prin trecutul imediat este rolul intrărilor prezente în ce privește determinarea ieșirilor. S-ar părea că este natural să stipulăm că mediul la momentul $t + 1$ nu poate influența ieșirile automatului la momentul $t + 1$, ci numai pe cele de la momentul $t + 2$. Acesta și este cazul rețelelor de neuroni, deoarece fiecare neuron cuprinde un element de întîrziere. Strict vorbind, aceasta este adevărat în rețelele de calculatoare, dar deoarece într-un comutator întîrzierea poate fi mică în comparație cu unitatea de întîrziere a sistemului, este convenabil să considerăm acțiunea comutatorului ca fiind instantanee. De aceea, rețelele bine formate propuse de Burks și Wright (1), care vor fi discutate mai departe la 2.3., permit ieșiri care sînt funcții comutatoare ale intrărilor.

F. Automate şi mediul. Schimbarea de stare a unui solipsist este independentă de mediu, iar mediul nu este afectat de către solipsist; a se vedea şi conceptul de „Monadă" al lui Leibniz. Un automat „solipsist" ar fi un automat care (1) îşi modifică stările independent de schimbările de mediu şi (2) ale cărui ieşiri nu influenţează mediul. În primă instanţă nu ne interesează asemenea automate. Ne interesează mai curînd cum influenţează mediul (intrările) asupra automatului, dar nu cum influenţează automatul mediul său ambiant.

Această din urmă chestiune este în strînsă legătură cu metoda obişnuită de reprezentare a intrărilor şi ieşirilor. Este bine cunoscut că există simboluri logice semnificative şi utile pentru acţiunea internă a automatelor (a se vedea 2.3.). Metoda standard de reprezentare a intrărilor şi ieşirilor foloseşte terminologia celor două stări posibile ale conductorilor de la intrare şi ieşire. Aceasta nu se poate aplica direct pentru simularea unor asemenea „intrări" ca undele de lumină sau undele sonore, presiunile fizice etc. sau a unor asemenea „ieşiri" ca acţiunile fizice. Teoretic însă, putem tot aşa de bine interpreta anumite elemente binare standard, ca reprezentîndu-le pe acestea. Pentru anumite ţeluri, este bine să adăugăm reprezentări primitive noi ale surselor şi manipulatoare care se folosesc de obicei la calculatoare (a se vedea Burks şi Copi [2] p. 306), precum şi simboluri care prezintă metode adiţionale de percepere şi alte metode de acţionare asupra mediului de care sînt capabile automatele. În această direcţie von Neumann a dat unele lucrări care însă încă n-au fost publicate (a se vedea Shannon [3], p. 1240). S-a propus să se introducă un simbolism pentru intrările şi ieşirile de pe benzile magnetice sau de hîrtie ale calculatoarelor; dar acest lucru nu este necesar, deoarece acestea sînt tot atît de bine reprezentate prin diagramele de reţele pentru memoria în serie (a se vedea Burks şi Copi [2] p. 313, nota 9).

Nu vom încerca aci să introducem notaţii separate pentru diferitele posibilităţi de interacţiuni dintre automat şi mediu, ci ne vom limita la modul obişnuit de simulare a intrărilor şi ieşirilor prin cele două stări posibile ale conductorilor. Chiar şi cu această restricţie, mai rămîne să examinăm diferitele alternative. Cazul cel mai general ar fi să identificăm mediul, în parte sau în întregime, cu anumite automate, astfel încît interacţiunea să aibă loc între ele şi automatul particular supus cercetării (a se compara cu problema celor n corpuri din mecanică). Un caz mai simplu ar fi să identificăm întregul mediu cu un alt automat (a se compara cu problema celor două corpuri din mecanică). Aşadar avem următoarele alternative:

($F0$) Un obiect îşi schimbă starea în mod automat independent de mediu.
($F1$) Un automat îşi schimbă starea în conformitate cu structura sa şi cu intrările (mediul).
($F2$) Diferite automate interacţionează.

Ne vom ocupa mai cu seamă de ($F1$). Cu alte cuvinte, vom presupune că automatul nu influenţează intrările pe care le primeşte şi că, în general, intrările influenţează stările interne ale automatului, adică starea celulelor sale interne. În consecinţă, putem defini unităţile sau atomii din care este compus un automat, despărţindu-le în două clase: celule de intrare şi celule interne sau conductori de intrare şi conductori interni sau circuite de intrare şi circuite interne.

Situația de la ($F0$) devine un caz particular al situației de la ($F1$), atunci cînd sau numărul celulelor de intrare este nul (caz limită), sau efectele intrărilor sînt mai mult sau mai puțin eliminate, astfel încît automatul se comportă în mod independent de intrări. Acest caz din urmă este ilustrat de către un element logic al cărui conductor de ieșire este totdeauna activ, independent de starea conductorului de intrare.

($F2$) poate, de asemenea, să fie considerat ca un caz particular al lui ($F1$). Deoarece intrările și ieșirile unui automat sînt conductori, două automate pot fi legate, producînd un singur automat mai complicat, cele două automate inițiale devenind părți sau subsisteme ale sale. Așadar, considerăm ($F2$) ca un caz particular de analiză a unei mașini complexe: descompunerea ei în submașini interconectate. O aplicație obișnuită a acestui concept este proiectarea calculatoarelor cu destinație universală.

În mod obișnuit, un asemenea calculator are un bloc aritmetic, o memorie, un bloc de intrare și ieșire și o conducere (A se vedea, de exemplu, Burks și Copi [2], p. 301). Utilitatea unor asemenea diviziuni se află în parte în funcționarea relativ independentă a acestor blocuri, iar în parte în faptul (legat de ea) că conceptual este mai ușor să înțelegem astfel ce se întîmplă. Acest fel de a structura intervine, în mod uzual, la diferite nivele, de exemplu, memoria în paralel (a se vedea Burks și Copi [2] p. 307—313) se divide, în mod natural, într-un comutator și 4096 de bobine (fiecare memorizînd un cuvînt), acestea, la rîndul lor, fiind „compuse" din celule (fiecare stocînd un bit al unui cuvînt).

G. *Excluderea creșterii.* Întrucît am adoptat postulatul bazelor finite, trebuie să mai decidem dacă admitem sau nu ca structura automatului, numărul celulelor sale sau numărul stărilor posibile ale fiecărei celule în parte să se modifice în cursul timpului. Dacă permitem modificări, dar le supunem unei margini finite prestabilite, atunci putem tot atît de bine să facem uz de un automat fix, care cuprinde această margine de la bun început. Deci cazul nou care interesează cu adevărat este cel al automatului crescător, fără margine superioară finită prestabilită fie pentru numărul celulelor, fie pentru stările celulelor. Schimbările de structură se pare că nu generează posibilități nemărginite, deși în anumite cercetări, cum ar fi investigarea modurilor de operații ale creierului uman (a se vedea Rochester și alții [4], utilizarea unui automat cu structură variabilă este mai utilă decît apelul la automatul fix corespunzător.

În orice caz, din punct de vedere teoretic, putem reduce toate felurile de creștere, fie la creșterea numărului de celule, fie la creșterea numărului stărilor posibile ale celulelor: fiind dat un automat crescător, putem găsi un altul care îndeplinește aceleași funcții, dar crește doar în ce privește numărul celulelor sale (sau, dimpotrivă, numai în ce privește numărul stărilor posibile pentru fiecare celulă). Oricare ar fi forma de creștere, avînd în vedere ipoteza noastră deterministă, pare natural să pretindem ca procesul să fie efectiv (adică recursiv). De aceea vom presupune, o dată pentru totdeauna, că fiecare definiție a unui automat crescător determină o metodă efectivă cu care la orice moment de timp t putem construi automatul și determina starea lui. Un caz particular important corespunde cu definițiile primitiv recursive; o atare definiție ne oferă o metodă de construire a automatului pentru $t = 0$ și, atunci cînd se dau atît automatul, cît și starea lui la momentul t, o metodă de

construire a automatului la momentul $t + 1$. Creşterea poate să nu depindă nici de stare, nici de situaţia de la intrare, dar în principiu există şi atare posibilităţi. Bineînţeles, „creşterea" include atît contractarea, cît şi expansiunea. De asemenea, putem avea un calculator „crescător", care se dezvoltă sau se contractă după necesităţile de calcul, avînd în fiecare perioadă de timp exact capacitatea necesară pentru a înmagazina în memorie informaţia existentă în perioada respectivă.

Cele două tipuri de automate, *fixe* şi *crescătoare*, se pot caracteriza după cum urmează:

(*G*1) Structura şi celulele automatului sînt fixate o dată pentru totdeauna, iar fiecare celulă este aptă de un număr fix de stări.

(*G*2) Automatul poate creşte (să se dezvolte *şi* să se contracte) în cursul timpului, într-un mod predeterminat efectiv.

În acest memoriu ne vom ocupa în întregime cu automatele fixe, cu excepţia unor remarci cu privire la reţelele crescătoare pe care le facem în acest subparagraf. Aceste observaţii urmăresc elucidarea conceptului de reţea crescătoare şi indicarea motivelor care ne fac să credem că acest concept este important. Însă în prealabil vrem să determinăm mai amănunţit (*G*1), stipulînd în plus că fiecare celulă sau conductor poate să aibă două stări, închis şi deschis (aprins şi stins); mai tîrziu vom corela aceste stări cu unu şi zero, precum şi cu adevăr, şi fals. Am putea, desigur, permite ca fiecare celulă să aibă un număr finit fix de stări posibile, iar diferite celule să aibă diferite numere de stări. Dar este mai bine să fixăm numărul stărilor la constanta doi. Aceasta din mai multe motive. Conductorii şi celulele multor automate şi a celor mai multe calculatoare digitale au de fapt două stări semnificative. Atunci cînd lucrurile nu stau astfel, putem întotdeauna reprezenta o celulă cu q stări posibile cu ajutorul a p celule cu două stări posibile pentru orice $p \geqslant \log_2 q$ (de exemplu, zece din cele şaisprezece stări diferite a celor patru reţele binare de conductori pot prezenta zece stări electrice ale unui singur circuit), astfel încît adaptînd sistemul nostru la cazul cel mai obişnuit, nu pierdem posibilitatea de a trata cazurile nebinare. Această angajare în logica bivalentă nu trebuie să ne facă să pierdem din vedere că pot exista cazuri cînd logica multivalentă este mai convenabilă; fapt este că şi logica noastră poate trata aceste cazuri, iar deocamdată nu ne interesează avantajele pe care le-ar putea prezenta în exploatare logica multivalentă.

Revenim acum la reţelele crescătoare, menţionînd în primul rînd unele cazuri particulare binecunoscute ale lor. O maşină Turing (a se vedea Turing [5]; Kleene [6]; Wang [7, 8]) poate fi considerată ca un automat cu o bandă crescătoare. De obicei banda este considerată ca infinită, dar în orice moment de timp, ea poate înmagazina doar o cantitate finită de informaţii, astfel încît important este să avem o reţea finită, dar în creştere (a se vedea şi Burks, şi Copi [2], p. 313, nota 8). Dacă într-o maşină Turing considerăm ca celule de intrare pătratele cuprinse în poziţia consecutivă minimă care conţine toate pătratele marcate ale benzii la momentul respectiv, atunci creşterea se reduce, pur şi simplu, la desfăşurarea şi contractarea benzii. Dacă însă folosim formularea lui Wang [7] care elimină operaţia de radiere, atunci o maşină Turing este un automat crescător de un tip de creştere şi mai limitat: şi anume, cu bandă în dezvoltare. Însă, în general, un automat crescător poate să crească

oriunde, nu numai la periferie, dar și în ce privește structura sa internă (adică între elementele deja prezente pot apare elemente noi).

Deși o mașină Turing este un caz particular de automat crescător, posibilitățile ei matematice (de calcul) sînt cele ale unui automat crescător general; căci fiecare tip de calcul poate fi realizat cu ajutorul unei mașini Turing, iar posibilitățile matematice ale unui automat se limitează la calcul. Dacă așa stau lucrurile, se pune întrebarea: ce interes mai prezintă conceptul general de rețea crescătoare? Importanța acestui concept se poate arăta prin considerentele ce urmează.

John von Neumann a dezvoltat unele modele de mașini cu autoreproducere (von Nemnann [9]; Shannon [3], p. 1240; Kemeny [10], pp. 64—67). Aceste mașini pot crește pînă ce apar două mașini legate între ele, cea inițială și un duplicat al ei; apoi cele două mașini se separă. Deci este clar că avem aci un caz de rețea crescătoare.

Procesul de bază care urmează să fie simulat sau modelat în creșterea și reproducerea organismelor vii este procesul complet de la oul fecundat pînă la un organism dezvoltat care poate produce un ou fecundat. În acest scop trebuie să proiectăm un automat relativ mic și simplu, care să crească pînă la maturitate (presupunînd un mediu convenabil), iar apoi să producă, ca o progenitură, un ou automat mic. Modelele lui von Neumann se pot construi fie la nivelul celulelor, fie la nivelul organismelor complete, dar în orice caz ele par să ofere doar o soluție parțială. Procesul de duplicare a celulelor este numai o componentă a procesului complet descris mai sus, iar autoreproducerea unei entități complet dezvoltate omite procesul important de dezvoltare de la copilărie la maturitate. Așadar, modelul pe care-l propunem noi este un tip de automat crescător, care nu a fost încă studiat în literatură.

Un alt tip de automat crescător este o mașină Turing generalizată, care poate să crească în alte puncte decît la extremitățile benzii. O mașină Turing tipică, deși are o mare putere logică, este greoaie și lucrează cu dificultate. De aceea, proiectarea unei mașini Turing cu destinație specială sau codarea unui program pentru mașina Turing universală este un proces complicat și laborios, deși fără dificultăți de principiu. Ceea ce complică treaba este așezarea liniară a informației pe o singură bandă; aceasta cere ca banda sau dispozitivul de citire să se miște înainte și înapoi, pentru a stabili informația. Deplasarea poate fi întrucîtva redusă, dacă înlăturăm informația veche pentru a face loc informației noi, dar și această operație complică procesul în ansamblul său. Pentru a dezvolta mai mult această chestiune, vom discuta mai detaliat relația dintre funcțiile recursive și mașinile Turing. Turing [5] a lucrat în termenii numerelor calculabile; Kleene [6] și Wang [7, 8] au folosit terminologia funcțiilor recursive. Deoarece discuția noastră a avut loc în terminologia funcțiilor, ne vom referi acum la lucrările lui Kleene și Wang.

Rezultatul matematic esențial, fundamental pentru semnificația mașinilor Turing este următorul. Matematicienii au caracterizat, în mod riguros, o mulțime de funcții, denumite funcții parțial recursive, iar această mulțime de funcții este, într-un anumit sens, echivalentă cu ceea ce este calculabil (Kleene [6], cap. XII). O funcție parțial recursivă se definește printr-un șir finit de definiții, avînd una dintre șase forme posibile (Kleene [6], pp. 219 și 279). Este cunoscut cum trebuie tradus fiecare șir de definiții într-o mașină Turing cu destinație specială sau într-un program pentru o mașină Turing

cu destinaţie universală (Kleene [6], cap. XIII; Wang [7]). Această traducere, deşi este riguroasă, şi fără dificultăţi de principiu, este adesea complicată, printre altele, din cauza motivelor arătate în alineatul precedent. Traduceri mai simple şi mai directe se pot realiza folosind reţele crescătoare, în care se permite creşterea oriunde; aceasta simplifică construcţia nu numai în două locuri, adică la extremităţile benzii, aşa cum se permite la maşinile Turing convenţionale. Aceste reţele crescătoare vor fi deci generalizări ale maşinii Turing.

O a treia speţă nouă de automat crescător o obţinem generalizînd calculatorul cu destinaţie universală în acelaşi fel în care în alineatul precedent am generalizat maşina Turing. Calculatorul cu destinaţie universală obişnuit este alcătuit dintr-o parte internă fixă şi una sau mai multe benzi. Ca şi la maşina Turing, se poate considera că aceste benzi se prelungesc la extremităţi ori de cîte ori este necesar; în practică, prelungirea este realizată de către un operator care înlocuieşte rolele de benzi, fie utilizînd benzi albe, fie utilizînd benzi dintr-o bibliotecă de benzi. Atunci cînd alcătuieşte programul pentru atare maşină, programatorul trebuie să aibă în vedere două lucruri:

(1) desfăşurarea calculului în termenii creşterii vechilor blocuri de informaţie şi a apariţiei unor blocuri noi de informaţie;

(2) deplasarea informaţiei de la un fel de memorie la altul (de exemplu, de la o memorie în serie la una în paralel) şi mişcarea informaţiei în cadrul unităţii de memorie. Pentru calcul sînt esenţiale ambele aceste componente. Dar (1) pare mai fundamental pentru înţelegerea naturii calculului şi în orice caz ea este de ajutor pentru studierea componentelor izolate. Aceasta se poate face cu reţele crescătoare, căci putem elimina (2), admiţînd creşterea oriunde este necesar pentru adaptarea informaţiei noi (sau a legăturilor noi) la informaţia veche. Considerăm că studiul automatelor crescătoare va contribui la teoria programării automate.

Pînă acum, dezvoltarea unei teorii puternice de programare automată a fost împiedicată de numeroase detalii inerente calculului actual; eliminînd (2) putem elimina numeroase asemenea detalii, concentrîndu-ne atenţia asupra lui (1), care este mai fundamental.

Acum, revenim la automatele fixe care satisfac ipotezele (*A*), (*B*), (*C*1), (*D*), (*E*), (*F*1) şi (*G*1) de mai sus. În definitiv, ajungem la următoarea definiţie a automatului (finit):

Definiţia 1. *Un automat (finit) este o structură finită fixă cu un număr finit fix de legături de intrare şi un număr finit fix de legături interne, astfel încît (1) fiecare legătură poate avea două stări (2), stările legăturilor de intrare în fiecare moment dat sînt arbitrare, (3) stările legăturilor interne la momentul zero sînt marcate* [2], *(4) starea internă (adică stările legăturilor interne) la momentul* $t + 1$ *este complet determinată de stările tuturor legăturilor la momentul* t *şi de stările legăturilor de intrare la momentul* $t + 1$, *conform* cu o lege predeterministă dar altfel arbitrară, care este încorporată în structura dată. Un *automat abstract se obţine dintr-un automat permiţînd o stare internă iniţială arbitrară.*

Este necesar să comentăm unele aspecte ale acestei definiţii. Aici, stările automatelor se definesc cu ajutorul stărilor legăturilor. În aceasta am urmat

[2] Această condiţie se aplică numai la acele legături a căror stare la un moment dat de timp nu depinde de intrările din momentul respectiv, a se compara cu condiţiile (4) ce urmează.

pe Burks și Wright [1], unde fiecare conductor are starea legăturii de care este atașat, iar nucleele sau corpurile celulelor nu se consideră că ar avea stări, ci numai ca realizînd transformări între legături sau conductori. O alternativă ar fi să definim stările automatelor cu ajutorul stărilor celulelor. Condiția (4) stabilește unele restricții în ce privește interconectarea elementelor din automate, dar situația nu este complet determinată; vom reveni asupra acestei chestiuni în § 2.3.

Starea inițială a legăturilor interne trebuie, de asemenea, să fie discutată. Definind automatul abstract, am considerat-o mai mult sau mai puțin ca ceva adițional, care se poate schimba în mod arbitrar. În consecință, două automate abstracte pentru a fi echivalente trebuie să aibă aceeași comportare pentru fiecare stare inițială. Pe de altă parte, pentru cele mai multe aplicații ale automatelor existente este mai convenabil să presupunem o stare inițială unică.

Cuvîntul „structură" din definiția de mai sus poate fi evitat, dacă folosim exclusiv terminologia matematică și considerăm transformările realizate de automate și automate abstracte. Așa vom proceda în subparagraful următor, revenind la o investigare mai detaliată a structurii automatelor în subparagraful care urmează (adică 2.3.).

2.2. Tabele caracteristice și procedură de decizie

Să considerăm deocamdată automatele la care stările interne sînt determinate numai de către trecutul imediat, adică nu sînt influențate de către intrările din prezent. Fie că avem M stări de intrare posibile, I_0, I_1 ..., I_{M-1} și N stări interne posibile S_0, S_1, ..., S_{N-1}. Deși fiecare legătură a automatului poate avea numai două stări, nu pretindem ca M și N să fie puteri ale lui doi. Căci, pe de o parte, atunci cînd un automat este definit, valorile lui M și N sînt stipulate și nu sînt neapărat puteri ale lui doi. Apoi, cînd e dat un automat, nu toate combinările posibile ale stărilor legăturilor interne pot avea loc din cauza structurii automatului și nu toate combinațiile posibile ale legăturilor de la intrări pot prezenta interes (de exemplu, pentru că automatul este încorporat într-un automat mai mare, în care nu se face uz de toate intrările posibile).

Stărilor de la intrare, precum și stărilor interne, le vom atribui numere întregi nenegative. Fie ca I și S variază respectiv pe aceste mulțimi de numere. Atunci o stare completă a unui automat este reprezentată prin perechea ordonată $\langle I, S\rangle$. (Dacă automatul nu are intrări atunci nu există I-uri și starea completă este tocmai S). Fie că S_0 este numărul întreg atașat stării interne inițiale marcate; de obicei S_0 este zero, dar nu întotdeauna. Un automat abstract se deosebește de unul neabstract tocmai prin aceea că nu are o stare inițială marcată.

Deoarece stările de la intrare sînt reprezentate prin numere, un istoric complet al intrării va fi o funcție numerică care aplică mulțimea întregilor nenegativi 0, 1, 2, ... (reprezentînd momentele discrete de timp) pe întregii din mulțimea I. Cu alte cuvinte, avem un șir infinit $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$,..., $I(t)$...; se poate considera că acest șir reprezintă numărul real $\{I(0) + [(I(1)/K)] + [I(2)/K^2] + + \ldots\}$, unde K este maximul din mulțimea $\{I\}$. În virtutea convenției noastre

că starea internă inițială este S_0, avem: $S(0) = S_0$. Prin ipoteza determinării complete de către trecutul imediat, pentru orice t avem

$$S(t + 1) = \tau [I(t), S(t)],$$

unde τ este o funcție arbitrară de la perechile de întregi $\{\langle I, S\rangle\}$ la întregii $\{S\}$. Sau, cu alte cuvinte, întrucît funcția de intrare I și timpul t sînt variabile independente, τ este o funcție arbitrară de două argumente (unul variind pe funcții de numere întregi iar celălalt pe numere întregi) cu valori întregi. Printr-o inducție simplă rezultă că pentru fiecare șir infinit $I(0)$, $I(1)$,... $I(t)$,..., aplicarea repetată a funcției τ oferă un șir infinit unic $S(0)$, $S(1)$,..., $S(t)$,..., cu $S(0) = S_0$. Deoarece pentru multe scopuri ne interesează nu numai existența valorilor funcției τ, dar ne interesează să și le găsim, vom presupune că τ este definită efectiv, deși, de fapt, multe din considerentele noastre rămîn valide fără această restricție.

Extinderea următoare a teoriei noastre urmărește să includă automatele a căror stare internă la momentul $t + 1$ depinde și de intrările la momentul $t + 1$. În acest scop, vom permite P stări „de ieșire" O_0, O_1,... O_{p-1}, astfel încît

$$O(t) = \lambda [I(t), S(t)],$$

unde, iarăși, λ este o funcție efectivă arbitrară. În general, starea completă a unui automat la un moment dat de timp este dată de tripletul ordonat $\langle I, S, O\rangle$. În anumite cazuri particulare, I, S sau O pot lipsi.

Acum putem da o definiție analitică a automatelor și automatelor abstracte folosind aceste transformări.

Definiția 2. Un automat este caracterizat, în general, prin două transformări efective arbitrare (τ și λ) *de la perechi de întregi la numere întregi. Aceste numere întregi sînt extrase din mulțimile finite* $\{I\}$, $\{S\}$ *și* $\{O\}$. $\{S\}$ *conține un întreg marcat* S_0. *Transformările sînt date de*

$$S(0) = S_0$$

$$S(t + 1) = \tau [I(t), S(t)],$$

$$O(t) = \lambda [I(t), S(t)].$$

Dacă omitem condiția $S(0) = S_0$ *obținem un automat abstract.*

Așadar, în terminologia analitică, putem spune că studiul automatelor finite este, în esență, cercetarea claselor foarte simple de transformări τ și λ din definiția de mai sus. Definiția clasei ca atare este foarte generală, întrucît permite ca τ și λ să fie funcții calculabile arbitrare; dacă însă ținem seama de domeniul și codomeniul foarte restrîns al acestor funcții, vedem că generalitatea este numai aparentă. O reprezentare simplă a clasei transformărilor la automate o putem găsi în felul următor.

Deoarece τ este efectivă, și deoarece domeniul și codomeniul ei sînt finite, putem, în mod efectiv, pentru fiecare pereche $\langle I, S\rangle$ să găsim valoarea lui τ $I(t)$, $[S(t)]$. Așadar putem stabili un tabel de $M \times N$ perechi $\ll I, S >, S' >$ astfel încît dacă $< I, S >$ face parte din starea la momentul t, atunci S' face parte din starea la momentul $t + 1$. Vom spune că această

mulțime este *tabelul complet* $M—N$ pentru automatul respectiv. Un tabel complet este totdeauna o definiție a funcției τ.

La fel, putem construi un *tabel de ieșiri* ale automatului, unde fiecare linie este de forma $\langle\langle I, S\rangle, 0\rangle$. Un atare tabel definește funcția λ.

Este important faptul că funcția τ și tabelul complet implică o deplasare de timp, ceea ce nu e cazul cu funcția λ și tabelul ieșirilor. De aceea, pentru o investigare a comportării unui automat în cursul timpului tabelul complet este fundamental, pe cînd tabelul ieșirilor are un caracter derivat. Adică, cu ajutorul tabelului complet, cunoscînd intrările $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$, ..., putem calcula $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$,..., lăsînd pentru mai tîrziu determinarea lui $O(0)$, $O(1)$, $O(2)$,... . Să observăm că a stipula că ieșirea la momentul t nu poate fi influențată de către intrarea de la același moment înseamnă a cere ca λ să fie astfel, încît $O(t) = \lambda[S(t)]$. Dacă acesta este cazul, atunci ne putem dispensa de stările $O(t)$ și de tabelul ieșirilor, deoarece $O(t)$ este complet dependentă de $S(t)$. (Dacă însă studiem comportarea legăturilor individuale, atunci tabelul ieșirilor este convenabil). Din toate aceste motive, numerele din $\{I\}$ și $\{S\}$ sînt mai fundamentale decît cele din O, iar tabelul complet este mult mai important decît tabelul ieșirilor. Așa stînd lucrurile, ne vom concentra adesea asupra automatelor la care stările interne sînt determinate numai de către trecutul imediat și vom ignora tabelul ieșirilor.

Deoarece stările S din momentul t sînt astfel definite, încît ele nu depind de intrările la momentul t, fiecare I poate apare alături de orice S și deci tabelul complet are $M \times N$ posibilități pentru perechile $\langle I, S\rangle$. Există N valori posibile pentru S'. Deci pentru un automat $M — N$ numărul tabelelor complete posibile este de $N^{M \times N}$.

Vom spune că două automate abstracte $M — N$, oricare ar fi limbajul în care ele sînt descrise, sînt echivalente, dacă și numai dacă ele au același tabel complet. Faptul că această definiție este convenabilă se poate vedea din următoarele considerente. Atunci cînd tabelul complet este același, pentru aceeași stare internă inițială și aceleași funcții de intrare, stările complete inițiale vor fi aceleași, iar aceeași stare completă, la orice moment dat, împreună cu aceleași funcții de intrare, furnizează întotdeauna aceeași stare completă la momentul imediat următor. Pe de altă parte, dacă două tabele complete sînt diferite, atunci trebuie să existe o pereche $\langle\langle I, S\rangle, S'\rangle$ într-un tabel dar nu în amîndouă, astfel încît alegînd funcții de intrare convenabile și starea internă convenabilă reprezentată de $\langle I, S\rangle$, putem avea starea completă reprezentată prin $\langle I, S\rangle$ realizată la momentul de timp zero, precum și starea completă la momentul de timp următor. Deoarece pentru un automat dat putem stabili totdeauna, în mod efectiv, tabelul complet (detaliile acestui proces le vom expune în subparagraful următor) și putem stabili efectiv dacă două tabele complete sînt sau nu identice, rezultă că avem o procedură de decizie în ce privește echivalența a două automate abstracte date $M — N$.

Situația este mai complicată la automatele cu stări interne inițiale predeterminate, căci două automate cu tabele complete diferite pot totuși să se comporte la fel (adică să fie echivalente). Aceasta este posibil, deoarece se poate întîmpla ca, pentru fiecare pereche $\langle\langle I, S\rangle, S'\rangle$, care figurează într-un tabel, dar nu în celălalt, să nu putem ajunge niciodată la o stare internă S pornind de la starea internă inițială S_0 și deci nu putem avea niciodată starea completă $\langle I, S\rangle$, indiferent de felul în care alegem funcțiile de intrare.

Într-un asemenea caz, două automate cu aceeași stare internă inițială prestabilită pot să se comporte la fel, oricare ar fi punctele de intrare, în pofida faptului că tabelele lor complete sînt diferite. Așadar, identitatea tabelelor complete este o condiție suficientă, dar nu necesară pentru echivalența a două automate. Pentru a obține o condiție necesară și suficientă, este de ajuns să determinăm toate stările interne pe care le poate oferi starea internă inițială dată, atunci cînd se combină cu intrări arbitrare, iar apoi să repetăm acest proces cu stările interne astfel găsite etc. Dacă două tabele complete coincid, în sensul că toate perechile care intervin în aceste determinări sînt aceleași, atunci cele două automate sînt echivalente. Pentru a arăta că această succesiune de determinări se va încheia întotdeauna într-un timp finit, recurgem la următorul argument: deoarece avem doar o mulțime finită de perechi în fiecare tabel complet, de la un moment de timp încolo, procesul de determinare se va repeta.

Pentru a descrie exact procedura, sînt necesare cîteva concepte auxiliare. Recurgem la imaginea unui arbore avînd ca rădăcină starea internă inițială aleasă S_0. Din rădăcină cresc M ramuri, cîte una pentru fiecare intrare posibilă I_i, avînd la capăt starea internă corespunzătoare la momentul următor S_{0i}. Aceste M ramuri pot fi reprezentate prin $\langle\langle I_0, S_0\rangle, S_{00}\rangle, \ldots, \langle\langle I_{M-1}, S_0\rangle, S_{0,M-1}\rangle$, care toate aparțin tabelului complet. Dacă toate numerele $S_{00}, \ldots, S_{0,M-1}$ sînt egale cu S_0, atunci creșterea arborelui încetează. Dacă nu, atunci pe fiecare S_{0i} cresc M ramuri, astfel încît $S_{0i} \neq S_0$ și astfel încît S_{0i} nu este identic cu vreun S_{0p}, pentru care cele M ramuri au crescut deja, și ajungem la $S_{0i0}, \ldots, S_{0i,M-1}$. Dacă toate numerele S_{0ij} (cu i și j arbitrari) figurează printre $S_0, S_{01}, \ldots, S_{0,M-1}$, atunci creșterea arborelui încetează. Dacă nu, atunci pe fiecare O_{0ij} cresc M ramuri, astfel încît ele diferă atît de S_0, cît și de S_{0p} sau S_{0pq}, pe care cele M ramuri au crescut deja. Adică ori de cîte ori ajungem în cursul construcției la un S, dacă acest S se află deja pe arbore, ne oprim, iar în caz contrar facem să crească pe dînsul M ramuri, cîte una pentru fiecare I. Acest proces se continuă cît timp la fiecare nod se introduce o anumită stare internă nouă. Deoarece *apriori* avem cu totul doar M stări interne posibile, numărul nivelelor distincte pentru ramuri nu poate depăși M. Pentru orice automat $M - N$ putem construi un asemenea arbore care se va numi *arborele admisibilităților* al automatului. Putem, desigur, porni cu orice stare S presupusă ca stare inițială, obținînd astfel *arborele admisibilităților relative la* S pentru un automat abstract.

Valorile lui S (inclusiv S_0) care apar în arborele admisibilităților se numesc stări interne *admisibile*. Toate celelalte valori ale lui S sînt inadmisibile. (A se vedea Burks și Wright, [1] pp. 1359, 1364).

Dacă adunăm la un loc perechile ordonate care reprezintă ramurile arborelui admisibilităților, obținem o submulțime (proprie sau improprie) a tabelului complet, pe care-l numim *tabel caracteristic* $M - N$ a automatului. (Ca și în cazul arborelui de admisibilitate, este ușor să definim conceptul de *tabel caracteristic relativ la* S pentru un automat abstract). Pentru ca două automate să fie echivalente (adică să se comporte la fel), este necesar și suficient ca ele să aibă același tabel caracteristic. Deoarece avem o metodă efectivă pentru a decide dacă două automate au sau nu același tabel caracteristic, rezultă că avem o procedură de decizie pentru testarea echivalenței a două automate.

Destul de des ceea ce ne interesează nu este automatul în ansamblu, ci mai curînd transformările pe care le realizează diferitele sale porțiuni (celule, legături, conductori). Pentru a discuta acest aspect al situației, trebuie să corelăm stările automatului cu stările elementelor sale. Vom face aceasta în două etape; în primul rînd exprimînd numerele de stare în formă binară (în subparagraful de față), iar apoi corelînd stările de joncțiune cu zero și unu (în paragraful următor).

Numerele de stare I și S sînt întregi nenegativi. Reprezentarea binară a stărilor se realizează simplu, punînd fiecare număr de stare în formă binară, făcînd ca toate I-urile să aibă aceeași lungime și de asemenea toate S-urile (punînd zerouri la început dacă acest lucru este necesar). Fie m, respectiv n, numărul biților lui I, respectiv S, dintr-un tabel caracteristic sau tabel complet în formă binară. Este evident că m este cel mai mic întreg tot atît de mare (sau mai mare) ca logaritmul (în baza doi) a maximului din I; similar n. Fie că biții lui I sînt $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$, astfel încît

$$I = \widehat{A_0 A_1 \ldots A_{m-1}},$$

unde arcurile denotă concatenarea (alăturarea). Similar, fie că biții lui S sînt $\widehat{B_0, B_1, \ldots, B_{n+1}}$, astfel încît

$$S = \widehat{B_0 B_1 \ldots B_{n+1}}.$$

În subparagraful următor vom asocia A-urile cu legăturile de intrare iar B-urile cu legăturile interne. Vom spune că un tabel caracteristic în formă binară este un *tabel caracteristic m-n.*

Din discuția de mai sus cu privire la tabelele caracteristice rezultă că funcția τ din definiția 2 dată prin

$$S(0) = S_0,$$

$$S(t + 1) = \tau[I(t), S(t)],$$

este o funcție primitiv recursivă simplă (cu domeniu finit), iar funcția $S(t)$ este definită primitiv recursiv relativ la funcția de intrare $I(t)$. Dacă ceea ce ne interesează este transformarea realizată de către o legătură internă anumită, vom face uz de o altă funcție primitiv recursivă σ_i, astfel încît $\sigma_i(n)$ furnizează a i-a cifră binară a lui $n (i = 0, 1, \ldots)$. Așadar, fiecare asemenea legătură realizează o transformare $\sigma_i(S(t)]$ sau $B_i(t)$, care este primitiv recursivă relativ la $i(t)$ (Burks și Wright [1] teorema XIV; Kleene [11], teorema 8).

Deoarece mărimile lui m și n influențează numărul legăturilor din automatul corespunzător, prezintă interes obținerea unei reprezentări minime cu ajutorul biților. Fiind dat un tabel caracteristic, numerele de stare se pot rescrie astfel, încît să minimalizăm pe m și pe n. Aceasta se realizează atribuind numerele astfel, încît cel mai mare I să fie mai mic decît prima putere a lui 2 mai mare sau egală cu M și similar în ce privește S și N. Un caz special intervine atunci cînd stărilor $I_0, I_1, \ldots, I_{M-1}$ le sînt atribuite respectiv numerele $0, 1, \ldots, N$—1 iar stărilor $S_0, S_1, \ldots, S_{N-1}$ le sînt atribuite numerele $0, 1, \ldots, N$—1 respectiv (să observăm că starea marcată S_0 este atașată de numărul zero). Un tabel caracteristic prezentat în această formă spunem că este *în formă normală codată.* Rețelele de automate corespunză-

toare acestei forme vor fi discutate în subparagraful următor. (Să observăm că aici nu este suficientă minimizarea unui tabel complet, deoarece numărul stărilor inadmisibile poate să fie astfel, încît să pretindă mai mulți biți pentru reprezentarea mulțimii stărilor decît pentru reprezentarea mulțimii stărilor admisibile).

Un alt tip particular de automat este automatul decodat în formă normală. El prezintă interes în legătură cu aplicarea matricelor la analiza rețelelor. Un tabel caracteristic *în formă normală decodată* are intrările codate la fel ca și pentru forma normală codată, însă stărilor interne S_0, S_1, ..., S_{N-1} li se atribuie numerele 2^0, 2^1, ..., 2^{N-1}; aici, pentru a reprezenta cele N stări interne, este necesar un cuvînt cu N biți. Pentru șase stări interne vom avea numerele 100000, 010000, 001000, 000100, 000010, 000001; să observăm că S_0 îl are pe unu la extremitatea stîngă, adică pentru S_0, B_0 este unu, iar ceilalți B_i sînt zerouri. Rețelele automate corespunzătoare tabelelor caracteristice în formă normală decodată vor fi înfățișate în paragraful 3.

Toate A-urile și B-urile din reprezentările binare ale lui I și S sînt variabile binare. Deci tabelul complet și — ceea ce este mai important — tabelul caracteristic sînt (atunci cînd sînt așezate în formă binară) un fel de tabele de adevăr. În felul acesta am redus, într-o mare măsură, problema descrierii și analizei automatelor la probleme ale teoriei funcțiilor de adevăr. Desigur, că în perechea $\langle\langle I, S\rangle, S'\rangle$, S' este starea la momentul $t+1$, în timp ce S este starea la momentul t, așa încît trebuie să distingem aici diferite momente de timp și deci să recurgem la funcții propoziționale (a se vedea §. 4). Totuși, după cum arată tabelul, nu avem nevoie decît de o formă cu totul particulară a teoriei funcțiilor propoziționale, în care fiecare pas de timp este obiectul teoriei funcțiilor de adevăr. Avantajul acestei reduceri parțiale la teoria funcțiilor de adevăr din logică este atît de mare, încît de acum încolo vom presupune că toate tabelele caracteristice sînt în formă binară. În consecință, vom face uz de orice tehnică a teoriei funcțiilor de adevăr și nu numai de tehnica tabelelor de adevăr, care adesea este greoaie.

Să revenim acum la transformările realizate de către elementele individuale ale automatului care cuprind B-urile. În subparagraful următor, fiecare B va fi asociat cu o legătură internă, astfel că și analiza decurge în terminologia legăturilor. Problema fundamentală constă în a compara comportarea a doi biți sau a două legături care pot să aparțină sau nu aceluiași automat sau aceleiași tabele caracteristice.

Dacă cele două legături supuse comparației aparțin aceluiași automat, atunci ele realizează aceeași transformare (se comportă la fel), dacă și numai dacă biții corespunzători în intrările S (sau S') ale tabelului caracteristic sînt peste tot aceiași. (Starea S_0 nu este necesar să apară în coloana S' din $\langle\langle I, S\rangle, S'\rangle$; fiecare stare diferită de ea care se află în coloana S se află și în coloana S' și reciproc. Desigur, toți biții sînt aceiași în S_0). Aceasta, pentru că valorile lui S sînt stările admisibile ale automatului, iar la fiecare moment dat, legăturile interne ale automatului se află tocmai într-una dintre aceste stări. Așadar, putem decide, în mod efectiv, dacă două legături ale unui automat se comportă sau nu la fel.

Dacă cele două legături aparțin unor automate diferite, atunci, în general, nu este necesar ca automatele să aibă același număr de legături (adică tabelele caracteristice corespunzătoare să aibă același număr de coloane) pentru

ca ele să aibă aceeași comportare. Deoarece, în ultimă instanță, transformările depind numai de timp și de intrări, numărul legăturilor interne nu trebuie să fie neapărat același; deoarece comportarea unei legături interne poate fi independentă de anumite intrări, rezultă că și numărul legăturilor de intrare poate fi diferit. Să presupunem că una dintre legături aparține unui automat m_1-n_1, iar cealaltă unui automat m_2-n_2. Atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca aceste legături să realizeze aceeași transformare este să existe un alt automat m_3-n_3, astfel încît $n_3 = n_1 + n_2$, $m_1 + m_2 \geqslant m_3 \geqslant \max.\ (m_1,\ m_2)$, care se obține din cele două automate date conectînd o submulțime a intrărilor unuia cu o submulțime a intrărilor celuilalt printr-o corespondență biunivocă și în care legăturile interne considerate realizează aceeași transformare. Aceasta presupune o procedură efectivă, deoarece fiecare automat are doar un număr finit de intrări, așa încît există doar un număr finit de posibilități de conectare a lor și pentru fiecare mod de conectare problema echivalenței comportărilor poate fi decisă în mod efectiv. Atunci cînd procesul are loc pe tabelele caracteristice, el implică identificarea unor coloane din porțiunea I a tabelelor.

Este permis ca submulțimea intrărilor supuse conectării să fie vidă, în care caz $m_3 = m_1 + m_2$ și automatul rezultat este exact ceea ce se obține prin alăturarea celor două automate inițiale. În adevăr, după cum comportarea unei legături sau a unei celule poate să fie independentă de o intrare sau alta, tot astfel ea poate să fie independentă de toate intrările. În acest caz, legătura își schimbă starea de la momentul t la momentul $t + 1$ într-un mod uniform, independent de stările intrărilor la momentul t. Cu alte cuvinte, ea realizează o transformare care este independentă de funcțiile de intrare; vom spune că o asemenea transformare este *independentă de intrare* (la Burks și Wright [1], p. 1358 ea se numește „transformarea constantă") și spunem că legatura este *independentă de intrare*. Numărul stărilor interne ale unui automat este finit, iar un automat este complet determinat de către trecutul imediat, deci toate transformările independente de intrare trebuie să fie periodice (Burks și Wright [1], teorema I). Prin urmare, nici un automat nu poate realiza transformarea primitiv recursivă independentă de intrare care ia valoarea 1, dacă și numai dacă t este un pătrat (0, 1, 4, 9, ...) (Burks și Wright [1], teorema II; Kleene [11] § 13).

Un tip foarte particular de automat este acela la care toate legăturile interne sînt independente de intrare. Într-o asemenea rețea, pe care o vom numi *rețea independentă de intrare*, pot exista legături de intrare, dar ele nu pot influența starea internă la vreun moment de timp. Pentru un asemenea automat putem stabili tabele complete și caracteristice fără stări de intrare.

Arborele admisibilităților oferă un mijloc efectiv pentru a decide dacă comportarea unei legături interne sau a unei celule interne este independentă de o anumită intrare sau nu și deci pentru a decide întrucît comportarea unei legături este independentă de toate intrările (adică realizează o transformare independentă de intrare). În acest scop este util să identificăm toate aparițiile unei stări date în arborele admisibilităților. Atunci putem trasa comportarea unui automat după ciclurile arborelui. Nu vom descrie procedura în detaliu, ci ne vom limita la cîteva observații în legătură cu ea. Printr-o inspectare directă a tabelei caracteristice ne putem da seama dacă o schimbare într-o legătură de intrare A la momentul t poate determina

o deosebire în B la momentul $t + 1$. Repetînd acest proces, putem găsi toate legăturile pe care A le poate influenţa direct, toate acele pe care acestea le pot influenţa direct etc. Deoarece reţeaua este finită, acest proces se va încheia în finit. Adică, din cauza naturii finite a reţelei există un interval de timp q astfel, încît dacă A poate influenţa comportarea lui B, atunci această influenţă are loc în cadrul intervalului de timp q; acest interval poate fi determinat din structura reţelei.

Dacă nici o legătură de intrare nu influenţează B_j, atunci B_j realizează o transformare independentă de intrare, despre care am spus deja că ea trebuie să fie periodică. Acest caz particular de independenţă de intrare poate fi descoperit direct din tabelul caracteristic, deoarece B_j realizează o transformare independentă de intrare, dacă şi numai dacă pentru fiecare S avem în S' o valoare unică pentru B, independent de I. Comportarea transformării independente de intrare în cursul fazei sale iniţiale, cît şi în cursul perioadei sale principale se poate determina din arborele admisibilităţilor.

(Problema de a decide dacă două legături B_j şi B_k realizează sau nu aceeaşi transformare este de fapt un caz particular al problemei de a decide dacă o legătură realizează sau nu o transformare independentă de intrare; în adevăr B_j şi B_k pot acţiona un element de echivalenţă a cărui ieşire să fie transformarea independentă de intrare 11 111 ... dacă şi numai dacă B_j şi B_k realizează aceeaşi transformare. A se vedea subparagraful următor).

Pînă acum n-am ţinut seama de tabelul ieşirilor. Şi acest tabel se poate aşeza în formă binară. Deoarece atît elementele din O, cît şi cele din S se referă la acelaşi timp, rezultatul va fi un tabel de adevăr obişnuit (spre deosebire de tabelul caracteristic, unde unele coloane se referă la timpul t, iar altele la $t + 1$). Aşadar, rezultatele precedente se pot generaliza uşor extinzîndu-le la tabelele ieşirilor.

Pînă acum nu am luat în consideraţie metodele de minimalizare a lucrărilor pe care le pretinde calculul arborelui admisibilităţilor şi a tabelului caracteristic. În numeroase cazuri este convenabil să lucrăm cu ecuaţii care descriu o reţea cu ajutorul unor variabile (a se vedea subparagraful următor) şi nu cu valorile acestor variabile. În unele cazuri putem trece direct de la aceste ecuaţii la tabelul caracteristic. De asemenea, multe reţele se pot descompune astfel, încît numărul stărilor de considerat să fie mult redus (a se vedea § 4.1). Alte metode de simplificare pot fi relevate de cei care lucrează efectiv, precum şi de cei care sînt familiarizaţi cu metodele de simplificare ale tabelelor de adevăr.

Înainte de a trece mai departe, să revenim, pe scurt, la conceptele introduse în acest subparagraf.

DEFINIŢIA 3. Un automat este în general caracterizat prin numerele de stare I, S şi O. Tabelul complet al unui automat este mulţimea tuturor perechilor $\langle\langle I, S\rangle, S'\rangle$, astfel încît pentru $I(t)$ şi $S(t)$ daţi, S' este valoarea lui $S(t + 1)$. Tabelul caracteristic al unui automat este o submulţime a tabelului complet, care se caracterizează prin aceea că fiecare S şi S' este admisibil. O stare S este admisibilă, dacă şi numai dacă ea este starea iniţială marcată S_0 sau poate fi atinsă pornind de la starea iniţială printr-un şir finit convenabil de intrări. Arborele admisibilităţilor este un graf utilizat pentru determinarea stărilor admisibile, începînd cu S_0 şi continuînd sistematic. Un tabel de ieşiri

este un tabel de perechi $\langle\langle I, S\rangle, 0\rangle$, *care furnizează o valoare* $O(t)$, *atunci cînd se dau valorile pentru* $I(t)$ *și* $S(t)$. *O legătură independentă de intrare realizează o transformare ale cărei valori sînt independente de intrări.*

Vom încheia acest subparagraf cu unele comentarii în legătură cu alte proceduri de decizie în ce privește testarea identității transformărilor realizate de două legături. Recent a fost anunțată o procedură de decizie pentru formularea lui Church a logicii calculatoarelor[3]. Nu cunoaștem această procedură de decizie, deci nu putem s-o comparăm cu a noastră. Putem însă să demonstrăm echivalența sistemului lui Church[4] cu sistemul nostru, de unde rezultă că cele două proceduri de decizie dau același lucru. Această demonstrație o facem în două etape. În primul rînd, definiția automatului dată în § 2.1 este, în esență, echivalentă cu aceea a rețelei bine formate de la Burks și Wright [1] (după cum se va arăta în subparagraful următor). Recurența simultană a lui Church este o mică generalizare a celei de a doua definiții a determinismului oferită de Burks și Wright [1], p. 1360; deosebirea constă în faptul că A-urile și B-urile lui Church sînt independente între ele, în timp ce în definiția determinismului, dată de Burks și Wright, fiecare A_i este într-o anumită relație cu B_i-ul corespunzător. Avînd în vedere această relație dintre cele două definiții, rezultă imediat că orice transformare realizată cu ajutorul unei rețele bine formate se poate defini cu ajutorul recursivității lui Church. Reciproca se poate arăta construind o rețea în care pentru fiecare i se realizează o rețea pentru A_i și pentru B_i, iar ieșirile sînt combinate pentru a da A_i pentru $t = 0$ și B_i pentru $t \neq 0$.

Poate că merită să extindem procedura noastră de decizie în vederea stabilirii unei metode de decizie a caracterului determinist sau nu a transformărilor definite printr-o mulțime de ecuații (Burks și Wright [1] p. 1358). Aceasta se poate realiza inspectînd toate stările $\langle I, S\rangle$ și stabilind pentru fiecare din ele dacă ecuațiile furnizează un S' unic sau nu. Dacă un S dat este admisibil (în virtutea arborelui admisibilităților) și totuși nu furnizează un S' unic pentru fiecare I, atunci rețeaua (adică transformările pe care le realizează) nu este deterministă. Deoarece întotdeauna nu avem de considerat decît un număr finit de cazuri, procedura este efectivă.

În încheiere, observăm că deoarece funcțiile propoziționale monadice de timp pot fi folosite pentru descrierea comportării rețelelor, s-ar părea că procedurile de decizie cunoscute pentru calculul funcțional monadic se pot aplica aici nemijlocit. Totuși nu se cunoaște relația exactă dintre cuantori și teoria rețelelor și în orice caz dacă se folosesc cuantorii este necesar ca ei să fie mărginiți, ceea ce este esențial diadic (a se vedea § 4.2).

2.3. Reprezentarea cu ajutorul rețelelor și forma normală codată

Trecem acum la reprezentarea automatelor cu ajutorul diagramelor (numite rețele automate) care arată structura internă a automatelor. Pentru aceasta,

[3] Joyce Friedman, *Some Results in Church's Restricted Recursive Arithmetic*, în „Jour. Symbolic Logic", **21**, iunie, 1956, p. 219; aceasta este un rezumat al unui memoriu prezentat la o reuniune a Asociației pentru logica simbolică, ținută la 29 decembrie 1955.

[4] Alonzo Church, Recenzie a lucrării lui Edmund C. Berkeley, *The Algebra of States and Events*, în „Jour. Symbolic Logic", **20**, sept. 1955, pp. 286—287.

trebuie să corelăm cifrele binare zero și unu folosite în subparagraful precedent cu stările fizice ale conductorilor legăturilor sau celulelor. Conform *interpretării normale*, zero se asociază cu starea neactivă, iar unu cu starea activă. *O interpretare duală*, în care zero se asociază cu starea activă, iar unu cu cea neactivă, este de asemenea posibilă; cele două interpretări pot fi legate prin binecunoscutul principiu al dualității.

Din cele spuse în subparagraful precedent este clar că avem nevoie de elemente de rețea apte de două feluri de operații: funcții de adevăr și întîrzieri. În acest scop adoptăm două spețe distincte de elemente: elemente comutatoare pentru operațiile funcții de adevăr și un element de întîrziere pentru operația de întîrziere.

Unele conective logice standard din teoria funcțiilor de adevăr sînt: ., & (amîndoi reprezintă conjuncția „și"), $\vee$ (care reprezintă disjuncția „sau"), $\downarrow$ („nici"), $\mid$ („nu amîndouă"), $\equiv$ („dacă și numai dacă"), $\supset$ („dacă ..., atunci ..."), —, $\sim$, $'$ (ultimele trei reprezentînd negația „nu"). Circuitele pentru realizarea tuturor acestor conective logice sînt obișnuite. După cum este bine cunoscut, toate funcțiile de adevăr se pot construi pornind de la una singură ($\downarrow$) sau ($\mid$) astfel încît, în general, vom presupune suficiente elemente comutatoare primitive pentru realizarea lor. Uneori este convenabil să avem o infinitate de elemente comutatoare primitive, cîte unul pentru fiecare funcție de adevăr. Desigur, în practică, funcțiile comutatoare complicate se realizează compunînd elementele comutatoare simple, dar atunci cînd reprezentăm asemenea circuite prin elemente de rețea, putem separa problema compunerii circuitelor de celelalte probleme din analiza rețelelor (a se vedea, de exemplu, fig. de mai jos).

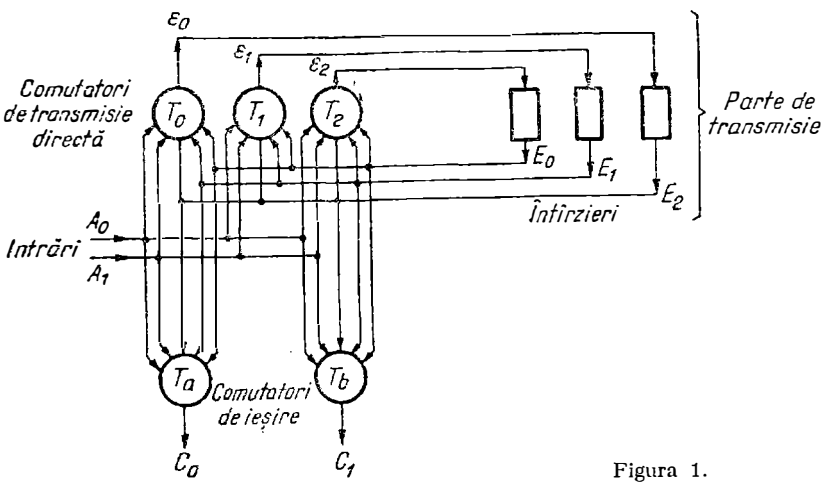


Figura 1.

Un element comutator constă dintr-un nucleu împreună cu conductori de intrare și conductori de ieșire. Extremitățile acestor conductori se numesc legături. Elementele comutatoare se pot lega în *rețele comutatoare* într-un fel care va fi arătat mai jos. Pentru ilustrare, a se vedea fig. 1 și celelalte figuri din această lucrare. Variabilele propoziționale se asociază cu fiecare legătură a rețelei. Fiecărui element comutator îi corespunde o egalitate din teoria funcțiilor de adevăr, care descrie comportarea acestui element. De exemplu,

dacă o conjuncție („și") are variabilele A_0 și A_1 atașate la legăturile ei de intrare și dacă la legătura ei de ieșire este atașată variabila C_0, atunci acest element de conjuncție realizează ecuația $C_0(t) \equiv [A_0(t) \,\&\, A_1(t)]$ sau, mai pe scurt: $C_0 \equiv (A_0 \,\&\, A_1)$. Teoria rețelelor comutatoare corespunde cu teoria funcțiilor de adevăr și este destul de dezvoltată (a se vedea Shannon [12]; Burks și Wright [1]).

Trebuie să atragem atenția asupra unui aspect al egalității $C_0(t) \equiv (A_0(t) \,\&\, A_1(t))$: valoarea la ieșire este dată pentru același moment de timp t ca și valorile la intrare. Desigur că acest lucru nu se poate realiza fizic; totdeauna ieșirea are loc întrucîtva mai tîrziu decît intrările. Aceasta sugerează așezarea unei întîrzieri la ieșirea fiecărui element comutator. De fapt, în fiecare celulă nervoasă există un asemenea element de întîrziere. Totuși, pentru țelurile analizei teoretice, este mai bine să izolăm funcțiile logice netemporale ale automatelor de aspectele temporale ale comportării lor. Putem adică construi la început teoria comutatoarelor, bazînd-o exclusiv pe teoria funcțiilor de adevăr și introducînd abia mai tîrziu complicațiile suplimentare produse de către întîrzieri. O atare organizare a materiei are anumite însușiri practice, precum și o valoare teoretică, căci în vederea unei anumite ganeralizări, proiectarea comutatoarelor poate și trebuie să se facă independent de proiectarea acelor părți ale calculatoarelor care realizează trecerile de la o stare la alta. Așadar, rețelele noastre comutatoare nu cuprind întîrzieri. Cînd vom ajunge la formularea regulilor care guvernează interconectarea lor (reguli de formare a rețelelor bine formate), vom ține seama de acest factor de idealizare și nu vom permite interconectări care să ducă la dificultăți, din cauză că noi l-am ignorat. Așadar, la timpul oportun, vom reveni asupra acestor chestiuni.

Elementul de întîrziere constă dintr-un nucleu cu un conductor de intrare și unul de ieșire, așa cum se arată în fig. 1. Acest element întîrzie un semnal de la intrare cu o unitate de timp; adică starea sa de la intrare la timpul t devine starea conductorului său de la ieșire la timpul $t + 1$. Presupunem că conductorul său de la ieșire este inactiv (adică este în starea zero) la momentul de timp zero. Dacă intrarea sa se asociază cu variabila A_0, iar ieșirea elementului de întîrziere se asociază cu E_0, atunci comportarea sa se definește prin ecuațiile

$$E(0) \equiv 0,$$

$$E_0(t + 1) \equiv A_0(t).$$

Acest lucru se mai poate exprima astfel

$$E_0(t) \equiv (t > 0) \,\&\, A_0(t \dot{-} 1),$$

unde „$\dot{-}$" înseamnă pseudoscăderea primitiv recursivă (scăderea aritmetică) definită după cum urmează:

$$x \dot{-} y = x - y, \text{ dacă } x \geqslant y,$$

$$x \dot{-} y = 0 \qquad \text{dacă } x < y.$$

Fiecare element comutator corespunde cu un simbol (sau un complex de simboluri) din teoria funcțiilor de adevăr. Introducem acum simbolul δ pen-

tru a corespunde cu elementul de întîrziere. Dacă intrarea și ieșirea elementului de întîrziere continuă să fie, ca și mai sus, A_0 și E_0, atunci $E_0(t) \equiv \delta[A_0(t)]$ sau, mai pe scurt, $E_0 \equiv \delta A_0$. Deci

$$\delta[A_0(0)] \equiv 0,$$

$$\delta[A_0(t+1)] \equiv A_0(t).$$

Luat ca atare, operatorul δ nu ne face, strict vorbind, să părăsim teoria funcțiilor de adevăr (a se vedea § 4.2), dar operatorul δ, împreună cu o regulă de ciclu care permite ca ieșirea unei rețele să fie legată invers cu intrarea aceleiași rețele, depășește cadrul teoriei funcțiilor de adevăr, ținînd de teoria cuantorilor. (A se vedea § 4).

Acum avem nevoie de niște reguli de formare, astfel încît toate rețelele construite cu ajutorul lor să reprezinte automate, iar toate automatele definite cu ajutorul tabelelor caracteristice și a tabelelor de ieșiri să poată fi reprezentate prin aceste rețele. Vom face uz de regulile date de Burks și Wright [1] p. 1361, pe care le generalizăm astfel, încît să fie permise mulțimi arbitrare de elemente comutatoare.

DEFINIȚIA 4. O combinație de figuri este o rețea bine formată (r.b.f.) relativă la mulțimea Σ, *dacă și numai dacă ea poate fi construită prin următoarele reguli:*

(1) *Un element comutator sau un element de întîrziere este r.b.f.*

(2) *Fie că* N_1 *și* N_2 *sînt (r.b.f.) disjuncte.* Atunci:

(a) *juxtapunerea lui* N_1 *și* N_2 *este r.b.f.*;

(b) *rezultatul racordării funcțiilor* $F_{q1}, \ldots, F_{qj}$ *ale lui* N_1 *la legăturile de intrare distincte ale lui* N_2 $G_{p1}, \ldots G_{pj}$ *este r.b.f.*;

(c) *rezultatul asocierii legăturilor de la intrarea lui* N_1 F_p *și* F_q *este r.b.f.*;

(d) *dacă toți conductorii legați de* F_p *din* N_1 *sînt conductori de intrare ai unui element de întîrziere, atunci rezultatul legării oricărui* F_q *din* N_1 *la* F_p *este r.b.f.*

Extremitățile conductorilor care nu sînt legați de un element comutator și nici de un element de întîrziere se numesc *legături.* O legătură la care nu este atașat vreun conductor de ieșire se numește *legătură de intrare*; toate celelalte legături se numesc *legături interne* (unii autori le numesc *legături de ieșire*).

Fiecare legătură a unei rețele poate fi asociată cu o variabilă. De obicei vom eticheta cu A_0, A_1, ... legăturile de intrare, cu C_0, C_1, ... legăturile de ieșire ale comutatoarelor (legături acționate de elemente comutatoare) și cu E_0, E_1, ... legăturile de ieșire ale elementelor de întîrziere (legături acționate de elemente de întîrziere). O rețea bine formată (diagramă) la care fiecare legătură este etichetată cu o variabilă se numește *rețea etichetată.* Putem, de asemenea, denumi legăturile de intrare cu constante funcționale care desemnează anumite funcții de intrare (de exemplu, 000, ..., 111, ..., 0101 ..., 01000100001000001 ...), iar legăturile interne le putem asocia cu constante funcționale, care denumesc funcțiile pe care ele le realizează (de exemplu, dacă intrările unei conjuncții se asociază cu 111 ... și 010101 ..., atunci ieșirea trebuie să fie etichetată 010101 ...). Rezultatul se numește

rețea istoric; a se compara cu conceptul de stare a unei rețele la Burks, McNaughton și alții [13] p. 207.

Să examinăm rețeaua din fig. 1. Fiecare rețea de această formă (cu un număr arbitrar de elemente de întîrziere și elemente comutatoare) este bine formată (relativ la o mulțime suficient de vastă de elemente comutatoare) conform cu regulile noastre. Spunem că rețeaua din fig. 1 este *în formă normală*. O formă normală este organizată după cum urmează. Ea are un *comutator de trecere directă* care este alimentat de intrările rețelei și ieșirile întîrzierilor și comandă intrările întîrzierilor și un *comutator de ieșire* care este alimentat de ieșirile întîrzierilor și intrările rețelei și nu comandă vreun element de întîrziere.

Fiind dată o mulțime suficient de vastă de elemente comutatoare, pentru fiecare rețea bine formată putem construi o rețea în formă normală, care se comportă la fel cu rețeaua inițială. În primul rînd așezăm întîrzierile rețelei inițiale așa ca în fig. 1. Apoi, pentru fiecare element de întîrziere E_i, analizăm rețeaua inițială pentru a determina care element comutator T_i va produce același rezultat la ε_i ca și rezultatul pe care-l produce circuitul comutator al rețelei inițiale. În același fel stabilim acele elemente comutatoare T_a, T_b, ..., ale căror ieșiri se comportă la fel ca legăturile de ieșire ale rețelei inițiale sau ca acele legături de ieșire care ne interesează în special (ceea ce poate fi indicat semnîndu-le prin triunghiuri). La fel, fiind dată o mulțime Σ de elemente comutatoare suficient de vastă pentru a reprezenta toate funcțiile de adevăr, putem traduce o rețea în formă normală într-o r.b.f. alcătuită din elementele comutatoare ale acestei mulțimi; de exemplu, dacă mulțimea Σ conține doar semnul bară | înlocuim fiecare T din fig. 1 printr-un element comutator echivalent. (Să observăm că deși un element comutator T_i primește intrări de la toate legăturile de intrare ale rețelei și toate legăturile de ieșire ale întîrzierilor, totuși ieșirea sa nu depinde de toate acestea. De exemplu, dacă în rețeaua inițială intrarea la elementul de întîrziere E_2 era legătura de intrare a rețelei A_0, atunci T_2 are proprietatea că pentru toate valorile lui $A_1(t)$, $E_0(t)$, $E_1(t)$ și $E_2(t)$ are loc $\varepsilon_2(t) \equiv A_0(t)$). (Să observăm, de asemenea, că orice rețea bine formată poate fi aranjată cumva în forma fig. 1, dacă admitem alte forme pentru comutatoare și admitem comutatoare de trecere directă cu legături care nu acționează intrări de întîrziere).

Aici am vrea să facem două comentarii în legătură cu reprezentarea noastră a comutatoarelor. Primul se referă la o chestiune pe care am mai menționat-o, și anume faptul că fizicește este necesar un timp pentru ca informația să treacă de la intrarea unui comutator la ieșirea lui, în timp ce în calculul comportării unui comutator am presupus că ieșirea are loc în același timp ca și intrarea. Această ipoteză este motivată de faptul că, în multe aplicații, timpul comutatorului este mult mai mic decît timpul de întîrziere, astfel încît logica comutatoarelor se tratează separat de logica întîrzierilor. Dorim ca teoria noastră să fie acomodată acestui caz. Cititorul poate imagina o întîrziere redusă în ieșirea fiecărui element comutator, cu întîrzieri așezate în diferite locuri. Atunci putem imagina că fiecare unitate de întîrziere din fig. 1 este redusă de cantitatea de întîrziere acumulată în conductorul care o acționează, astfel încît întîrzierea totală de la ieșirea unei întîrzieri înapoi spre ieșirea întîrzierii este de o unitate. (Aici este util conceptul de rang

aşa cum se defineşte la Burks şi Wright [1], p. 1361). Conceptul de reţea bine formată (r.b.f.) a fost definit astfel, încît acest lucru să fie întotdeauna posibil, după cum se vede din fig. 1. Acest fel de a considera lucrurile este conform cu practica proiectării unor maşini, a se vedea De Turk şi alţii [14]. Automatele cu întîrzieri introduse în fiecare element comutator (de exemplu, reţelele de neuroni) se pot şi ele acomoda, adaptîndu-se la teoria noastră; ele corespund la cazuri particulare de r.b.f. şi pot fi definite, modificînd regulile de formare.

Al doilea comentariu este în legătură cu faptul că elementele noastre comutatoare reprezintă fluxul de informaţie unidirecţionat, adică intrările şi ieşirile nu se pot permuta între ele. Există numeroase dispozitive care permit ca informaţia să curgă într-o singură direcţie (aşa sînt, de exemplu, tuburile cu vid, tranzistoarele etc.), dar nu toate dispozitivele sînt astfel, iar o excepţie bine cunoscută o constituie releurile. Contactele releurilor permit scurgerea informaţiei în orice direcţie şi deci se pot construi punţi. Releurile sînt instrumente electromecanice şi ca atare relativ lente. Pentru acest motiv, ele au devenit mai puţin importante pe măsură ce instrumentele electronice şi solide, mai rapide, devin mai disponibile şi mai competitive în ce priveşte preţul. Apoi din cauza combinării tamburelor şi contactelor, automatele cu releuri prezintă probleme speciale şi nici un fel de reguli de formare ale lor nu pot să ţină seama în întregime de toate uzurile posibile care au fost publicate. Totuşi, un instrument nou şi promiţător, criotronul, permite de asemenea ca informaţia (în acest caz curentul) să curgă în orice direcţie şi deci poate fi utilizat în circuite cu punţi (a se vedea Buck [15]). Nu vom încerca aici să stabilim reguli de formare pentru releuri criotroni sau orice alte dispozitive care nu sînt unidirecţionale.

Trebuie însă să arătăm aici că fiecare reţea cu comutatoare bine formată poate fi realizată printr-un circuit cu releuri şi criotroni. Deoarece fiecare transformare de adevăr (adică fiecare funcţie de comutare) poate fi reprezentată printr-un comutator bine format şi reciproc (teorema XII din Burks şi Wright [1]), diagramele noastre reprezintă moduri de realizare ale funcţiilor de adevăr cu elemente neunidirecţionate. Deoarece diagramele noastre reprezintă un flux unidirecţionat de informaţie, rezultă că posibilitatea releelor şi criotronilor de a face să treacă informaţia în ambele direcţii nu măreşte posibilităţile lor logice. Această posibilitate determină ca numărul elementelor necesare să fie diferit. De exemplu, un circuit de relee cu punţi poate să fie în unele privinţe mai economic decît o reţea cu relee şi contacte în forma unui comutator bine format.

Să revenim la problema asocierii automatelor cu r.b.f. Ca un prim pas, definim o mulţime de numere de stare $D_0, D_1, \ldots D_q$. Fiecare D va exprima stările legăturilor de ieşire ale întîrzierilor. Fie că aceste legături sînt intitulate $E_0, E_1, \ldots, E_q$. Atunci D este numărul binar $\widehat{E_0 E_1} \ldots \widehat{E_q}$. Deoarece o ieşire de întîrziere se presupune că este zero în momentul de timp zero, $D(0) = 0$. Fie D_0 această stare iniţială, adică $D(0) = D_0$. Vrem să justificăm această decizie, dar mai întîi trebuie să discutăm o chestiune în legătură cu identitatea automatului.

Putem face ca o maşină să funcţioneze de luni pînă vineri, oprind-o la ora 5 d.a. vineri şi punînd-o din nou în funcţiune la ora 8 î.a. în lunea următoare. Trebuie atunci să considerăm că avem de-a face cu o singură

mașină, sau cu două? Această situație seamănă cu aceea a unui om (automat?) care se culcă să doarmă noaptea; însă atunci cînd un om se trezește în dimineața următoare, el își mai amintește cîte ceva din trecutul său, pe cînd adesea (deși nu întotdeauna) un calculator începe o viață nouă de fiecare dată cînd este pus în funcțiune. Pentru a păstra identitatea mașinii înainte și după pauza de inacțiune, ne putem imagina un instrument ad-hoc destul de simplu, cum ar fi o celulă de intrare specială, avînd unica funcție de a închide și deschide mașina astfel încît, cînd mașina funcționează, stimulînd această celulă de intrare, noi punem mașina într-o stare inițială unică; o atare operație se numește adesea radiere inițială. În acest chip putem păstra identitatea mașinii de-a lungul diferitelor ei funcționări.

Conform cu această ipoteză, un automat are o singură stare inițială, pe care o putem identifica cu starea absolut închisă sau cu starea repausului total. O asemenea identificare este firească, deoarece neuronii, tuburile cu vid etc. sînt îndeobște inactivi, atunci cînd îi punem să funcționeze și chiar dacă nu sînt, această identificare se poate face printr-o convenție care nu ne face să pierdem din generalitate. Situația este întrucîtva diferită, dacă preferăm să considerăm fiecare funcționare a unei mașini ca un automat nou. Dar probabil că și aici va fi o stare inițială unică pentru toate funcționările și este convenabil să o identificăm cu starea repausului total. Să observăm însă că aceasta nu ne obligă să identificăm S_0 cu D_0. De fapt, nici nu vom face aceasta întotdeauna (un exemplu este rețeaua complet decodată din § 3.2). Așadar, putem avea alte stări inițiale, identificînd D_0 cu alte valori ale lui S, diferite de S_0.

Să trecem acum la stabilirea echivalenței automatelor cu r.b.f. În primul rînd să arătăm cum se poate deriva dintr-o r.b.f. dată un tabel caracteristic și un tabel al ieșirilor. Traducem rețeaua dată într-o rețea în forma normală. Etichetăm intrările acestei forme normale cu A_0, A_1, ... și fie $I = \widehat{A_0 A_1} \ldots$; pentru două rețele de intrare vom avea, de exemplu, $I_0 \equiv \bar{A}_0 \,\&\, \bar{A}_1$, $I_1 \equiv \bar{A}_0 \,\&\, \bar{A}_1$, $I_2 \equiv A_0 \,\&\, \bar{A}_1$ și $I_3 \equiv A_0 \,\&\, A_1$. Să notăm intrările întîrzierilor cu ε_0, ε_1, ... și să definim $\Delta = \widehat{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \ldots$ Să denumim ieșirile întîrzierilor E_0, $E_1 \ldots$; atunci $D = \widehat{E_0 E_1} \ldots$. Fie T_0 $T_1 \ldots$ funcțiile de adevăr realizate de comutatoarele de trecere directă; atunci, pentru fiecare i, avem:

$$\varepsilon_i(t) \equiv T_i[A_0(t),\ A_1(t), \ldots;\ E_0(t),\ E_1(t), \ldots],$$

$$E_i(t) \equiv \delta\varepsilon_i\,(t).$$

În sfîrșit, identificăm D_0 cu S_0 și în locul fiecărui D punem un S, obținînd astfel un tabel complet. Folosind arborele admisibilităților, putem construi tabelul caracteristic. Această procedură ține seama de partea de trecere a rețelei în formă normală. Pentru a completa analiza, realizăm o construcție similară pentru elementele comutatoare ale rețelei inițiale sau pentru acele ieșiri ale comutatoarelor care ne interesează în calitate de ieșiri finale. Fie T_a, T_b, ... funcțiile de adevăr realizate de aceste ieșiri. Atunci, pentru fiecare j, avem $C_j(t) \equiv T_j[A_0(t), A_1(t), \ldots j, E_0(t), E_1(t)_1 \ldots]$ ceea ce ne da tabelul ieșirilor.

O rețea în formă normală codată este o rețea în formă normală al cărei tabel caracteristic este în formă normală codată.

Atunci cînd alcătuim tabelul complet al unei rețele, pentru fiecare legătură de intrare și fiecare legătură de ieșire a întîrzierilor obținem un loc în tabel. În acest caz, numerele m și n (de la § 2.1) sînt respectiv numerele legăturilor de la intrare și de la ieșirea întîrzierilor. Deci un automat m-n are 2^{m+n} stări complete posibile și 2^n stări interne posibile. Dacă luăm în considerare toate stările de la intrare, avem $(2^n)^{(2^{m+n})}$ diferite tabele complete m—n. Multe dintre ele sînt identice în afară de o permutare a coloanelor (adică a intrărilor și a celulelor interne sau legături). Evident că este puțin semnificativ dacă o anumită legătură spunem că este prima, a doua sau a m-a. Cu alte cuvinte, dacă putem găsi un procedeu de identificare biunivocă a legăturilor de intrare a două automate m-n, astfel încît ele se comportă la fel, atunci ele sînt echivalente chiar dacă tabelele lor caracteristice sînt diferite. De asemenea, permutarea denumirilor legăturilor de ieșire ale întîrzierilor nu determină deosebiri esențiale. Rezultă deci că, în realitate, avem numai $(2^n)^{(2^{m+n})}/(m!)\,(n!)$ tabele complete distincte pentru automatele abstracte m-n. La fel, identificăm tabelele caracteristice care se pot obține una dintr-alta prin permutarea coloanelor. Atunci vom avea mai puțin de $(2^n)^{(2^{m+n})}/(m!)\,(n!)$ tabele caracteristice distincte, deoarece unele dintre tabele complete distincte se vor deosebi numai în privința stărilor inadmisibile.

Pentru a proiecta porțiunea de tranziție a unui automat este, în general, de dorit să maximalizăm numărul stărilor interne admisibile (adică să minimalizăm numărul stărilor inadmisibile), deoarece numărul total de stări determină, într-o mare măsură, numărul părților necesare pentru construcție, întrucît posibilitățile de a face lucruri diferite sînt, în general, proporționale cu numărul stărilor admisibile. Spunem că un automat este *complet*, dacă toate stările S sînt admisibile. (O condiție mai tare ar fi ca toate stările S să fie admisibile relativ la orice stare inițială, și nu numai relativ la starea inițială marcată S_0; nu vom da însă un nume deosebit unui automat care satisface condiția mai tare). Dacă numărul stărilor admisibile a unui automat este mai mic decît 2^{n-1}, putem înlocui întotdeauna automatul printr-un automat mai simplu, folosind forma normală codată. Într-un tabel caracteristic în formă normală codată, n este cel mai mic întreg, tot atît de mare sau mai mare ca logaritmul lui N în baza doi (similar pentru m).

În ce privește automatele cu același număr de stări admisibile, pare convenabil să maximalizăm pe cele care pot fi recuperabile. O dată cu Moore [16], p. 140, vom spune că un automat este *tare conectat*, dacă și numai dacă de la fiecare stare admisibilă S_i se poate ajunge la orice altă stare admisibilă S_j, inclusiv ea însăși (adică cuprinzînd cazul $i=j$). O altă definiție poate fi dată utilizînd terminologia arborelui admisibilităților, în care sînt identificate toate intrările unei stări date S_i. Un automat este tare conectat, dacă și numai dacă pentru orice pereche ordonată de stări (S_i, S_j) (unde i poate fi eventual egal cu j), putem trece de la S_i la S_j de-a lungul unui drum continuu al arborelui (eventual împreună cu salturi de la o stare dată la aceeași stare așezată mai jos pe arbore). Deoarece posibilitatea repetării este importantă pentru un automat, o stare admisibilă care nu poate fi reluată nu mărește prea mult posibilitățile automatului. Așadar, în general cel mai bine este să proiectăm o mașină care să fie atît completă, cît și tare conectată.

Aşadar, dintr-un punct de vedere practic, automatele complete, tare conectate şi în formă normală codată sînt cele mai importante. Din punct de vedere teoretic însă prezintă interes şi multe reţele care nu se încadrează în aceste clase. În particular, vom găsi reţele de automate în formă normală decodată ca prezentînd interes în legătură cu utilizarea matricelor în vederea analizării reţelelor.

Rămîne acum să arătăm cum se poate construi o reţea bine formată pentru un tabel caracteristic (sau tabel complet) şi tabel al ieşirilor date. Aceasta se poate face în diferite moduri; unul dintre ele ar fi să identificăm S_0 cu D_0 (dacă S_0 nu are din capul locului valoarea zero, atunci îi schimbăm valoarea) şi fiecare S cu o valoare a lui D. Procesul general de trecere de la reţele la tabele este atunci exact invers. Există diferite căi de a construi comutatoare necesare. Să considerăm problema relativ la tabelul caracteristic $\ll I, S >, S' >$. O coloană de S' o identificăm cu un anumit E_i (şi ε_i). Să înlăturăm celelalte coloane din porţiunea S' a tabelului. Obţinem atunci o definiţie tabulară a funcţiei noastre T_i astfel încît

$$\varepsilon_i(t) \equiv T_i\,[A_0(t),\ A_1(t), \ldots;\ E_0(t),\ E_1(t), \ldots].$$

Fiind date suficiente primitive, aceasta se poate realiza cu ajutorul unui singur element comutator, după cum se arată în fig. 1. Dacă sînt date comutatoare pentru „şi", „sau" şi „nu", atunci aceasta se realizează cu ajutorul formei normale disjunctive. Să considerăm fiecare linie a tabelului de adevăr. Dacă ε_i este zero, nu avem nimic de făcut; în contrar, construim un element în sensul $\widehat{IS}$ al acestei linii. Comutatorul dorit pentru ε_i se obţine prin disjuncţia tuturor ieşirilor astfel obţinute (adică făcînd uz de „sau").

Am stabilit astfel prima noastră teoremă.

Teorema 1. Fiind dată o reţea bine formată, putem construi un tabel complet, un tabel caracteristic şi tabelul ieşirilor care descriu comportarea ei. Fiind dat un tabel complet, un tabel caracteristic şi tabelul ieşirilor, putem construi o reţea bine formată, care realizează aceste tabele.

Această teoremă stabileşte echivalenţa automatelor cu reţelele şi deoarece reţelele sînt reprezentări idealizate ale calculatoarelor digitale, rezultă că, pentru majoritatea consideraţiilor teoretice, automatele fără organe speciale de sensibilitate sau acţiune pot fi considerate ca fiind calculatoare digitale.

Încheiem acest paragraf atrăgînd atenţia asupra asemănării diagramelor reţelelor bine formate cu diagramele folosite în programare. Este o asemănare la care ne puteam aştepta, deoarece o diagramă de reţele descrie structura unui calculator, pe cînd o diagramă a programării descrie comportarea calculatorului în cursul unui anumit calcul, iar amîndouă lucrurile sînt simbolizate prin funcţiile recursive. Cînd un program este introdus în memoria unui calculator, o parte a sa (reprezentarea codată a operaţiilor) rămîne de obicei invariantă în cursul calculului; aceasta înseamnă că de-a lungul calculului nu se face uz de toate stările calculatorului. Pentru fiecare asemenea program fixat am putea proiecta o maşină cu destinaţie specială, care să realizeze acelaşi calcul. Aceasta nu este decît un caz particular al principiului general, conform căruia este foarte laxă deosebirea dintre scopul pentru care este construită o maşină şi treaba pentru care este instruită. Aceasta ne su-

gerează că ar putea să există o teorie unificată care să cuprindă în calitate de părți atît teoria structurii automatelor, cît și teoria comportării automatelor, adică teoria programării.

De fapt, fiecare program este o definiție a unei funcții recursive. Deoarece nu avem vreun mijloc efectiv de decizie în ce privește echivalența a două definiții a unor funcții recursive, nu putem decide, în mod efectiv, dacă două programe produc sau nu același răspuns. Două programe diferite, amîndouă finite, pot totuși să ofere același răspuns, deoarece legătura inversă cu calculul poate fi diferită.

§ 3. MATRICE DE TRECERE ȘI REȚELE ÎN FORMĂ MATRICEALĂ

3.1. Matrice de trecere

Partea de trecere dintr-o rețea controlează trecerea rețelei de la o stare la altă stare și de aceea ea este inima rețelei. În acest subparagraf introducem „matricea trecerilor", un tabel care descrie o rețea, arătînd diferitele posibilități de trecere de la o stare de întîrziere la alta.

Folosim un tabel caracteristic cu M cuvinte (stări) de intrare I, N cuvinte de stare internă S și MN linii, fiecare de formă $\ll I, S >, S' >$ pentru a defini N^2 *expresii de trecere directă* I_{ij}, după cum urmează. I_{ij} este o disjuncție a tuturor acelor I_k pentru care $\ll I_k, S_i > , S_j >$ este o linie a tabelului caracteristic; dacă nu există un asemenea I_k, atunci I_{ij} este „falsul" $\emptyset$. Adică, cu alți termeni, I_{ij} este disjuncția tuturor cuvintelor de intrare (dacă există asemenea cuvinte) care pot determina rețeaua să treacă de la starea S_i la momentul de timp t, la starea S_j, la timpul $t + 1$, unde i poate fi eventual egal cu j. Este clar că fiecare I_{ij} este o formă normală disjunctivă ale cărei variabile sînt funcțiile de intrare.

Să remarcăm că trecerea directă „$\emptyset$" este deosebită, de expresiile de trecere „0", „00", „000" etc.; expresia „$\emptyset$" arată că între două stări nu este posibilă trecerea directă, pe cînd expresiile celelalte înseamnă că o asemenea trecere se poate realiza, făcînd ca toate intrările să fie zero.

O trecere directă de la S_i la S_j într-o rețea este o trecere de la starea S_i la momentul t la starea S_j la momentul $t + 1$. O asemenea trecere este posibilă numai în cazul cînd $I_{ij} \not\equiv \emptyset$. Spunem că $\langle I_k, S_i \rangle$ (sau $\widehat{I_k S_i}$) la timpul t *produce direct* S_j la momentul $t + 1$ numai în cazul cînd rețeaua determină o trecere directă de la S_i la S_j sub influența intrării I_k la momentul t.

O trecere de la S_i la S_j într-o rețea este o trecere de la starea S_i la momentul t la starea S_j la momentul $t + w$ ($w > 0$). O asemenea trecere este posibilă, numai dacă există un șir de expresii de trecere directă, în care nu figurează nici un $\emptyset$, de formă I_{ia_1}, $I_{a_1a_2}$, ... $I_{a_{w}j}$. Spunem că $\widehat{I_{ia_1}S_i}(t)$, $I_{a_1a_2}(t + 1)$, ... $I_{a_{w}j}(t + w - 1)$ îl *produce* pe S_j la momentul $t + w$, dacă și numai dacă există o trecere de la $S_i(t)$ la $S_j(t + w)$ sub influența intrărilor din această listă; spunem că o atare trecere are w *pași* (sau că ea este de *lungime* w).

Este convenabil să așezăm informația într-un $M-N$ tabel caracteristic într-o matrice a trecerilor directe de ordin N, așezînd în pătrățelele pătratului

cele N^2 expresii de trecere directă. Iată o matrice a trecerilor directe de ordin patru:

$$\begin{bmatrix} I_{00} & I_{01} & I_{02} & I_{03} \\ I_{10} & I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{20} & I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{30} & I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}.$$

Este clar că o matrice a trecerilor directe înfățișează aceeași informație ca și un tabel caracteristic, dar într-un chip diferit. Pentru multe țeluri această formă este mai convenabilă, întrucît ea reflectă faptul că ceea ce este fundamental în comportarea unui automat sînt trecerile de la o stare la alta. (Deoarece o matrice a trecerilor este echivalentă cu un tabel caracteristic, formulele date în § 2.3 pentru numărul tabelelor caracteristice ale unui M-N automat se aplică și aici.)

Informația conținută într-un tabel complet se poate exprima și în formă matricială. Deoarece pentru un atomat abstract tabelul complet este tabelul caracteristic, matricea derivată din tabelul complet este tocmai matricea trecerilor directe.

Să dăm un exemplu de matrice a trecerilor. Pentru un numărător (contor) ciclic în patru etape matricea este:

$$\begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} I_0 & I_1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & I_0 & I_1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & I_0 & I_1 \\ I_1 & \emptyset & \emptyset & I_0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(Am adăugat S-urile ca un ajutor mnemotehnic, dar avînd în vedere o convenție de ordonare, nu mai este necesar ca ele să fie scrise explicit). Aici, o intrare I_0 (de exemplu 0) determină ca numărătorul să se oprească într-o stare dată, pe cînd intrarea I_1 (de exemplu 1) determină ca el să treacă la starea următoare (modulo 4). Toate celelalte intrări sînt Ø-uri, deoarece ele reprezintă cazurile cînd trecerile directe sînt imposibile.

3.2. Rețele în formă matriceală

În acest subparagraf vom prezenta o formă a rețelelor strîns legată de matricea trecerilor. Vom face această prezentare în două etape; prima constă în construirea formei normale decodate.

Să considerăm deocamdată o rețea în formă normală codată, în legătură cu tabelul lui caracteristic codat. Fiecare S este asociat cu un D și, în general, un număr arbitrar de cifre din D poate fi 1. În schimb, în cazul formei normale decodate a tabelului caracteristic, pentru fiecare S exact o cifră este 1, astfel încît sîntem conduși la ideea de a asocia fiecare stare a lui S la început cu o singură legătură. Pentru un tabel în formă normală decodată cu N stări, aceasta se poate face după cum urmează: Fie $S = \widehat{B_0 B_1} \ldots B_{N-1}$ ca și înainte

și să formăm o rețea cu N elemente de întîrziere, astfel încît $D = \widehat{E_0 E_1} \ldots \widehat{\ldots E_{N-1}}$. Dintre cele 2^N cuvinte de întîrziere D folosim numai $N + 1$, și anume D_0 ($= 000 \ldots$) și N cuvinte o cifră egală cu unitatea, celelalte fiind zerouri ($100 \ldots$, $010 \ldots$ etc.). Apoi construim o legătură C, care este ieșirea unui element disjunctiv („sau") alimentat de E_0 și transformarea independentă de intrare $100 \ldots$ Așadar,

$$C(0) \equiv 1,$$

$$C(t) \equiv E_0(t), \text{ pentru toți } t > 0.$$

Acum asociem B_0 cu C, iar pentru $0 < i < N$ fiecare B_i îl asociem cu E_i; adică punem semnul identității între $\widehat{B_0 B_1} \ldots \widehat{B_{N-1}}$ și $CE_1 \ldots E_{N-1}$. Așadar avem N legături (C, $E_1, \ldots E_{N-1}$), astfel încît fiecare stare S este asociată, la început, cu o legătură: și anume cu legătura activă pentru starea respectivă a rețelei. Aceste legături se numesc *legături de stare* ale rețelei. A se vedea fig. de mai jos unde legăturile de stare sînt denumite C, E_1 și E_2, figurînd totodată pe ele stările S_0, S_1 respectiv S_2, pe care ele le „reprezintă".

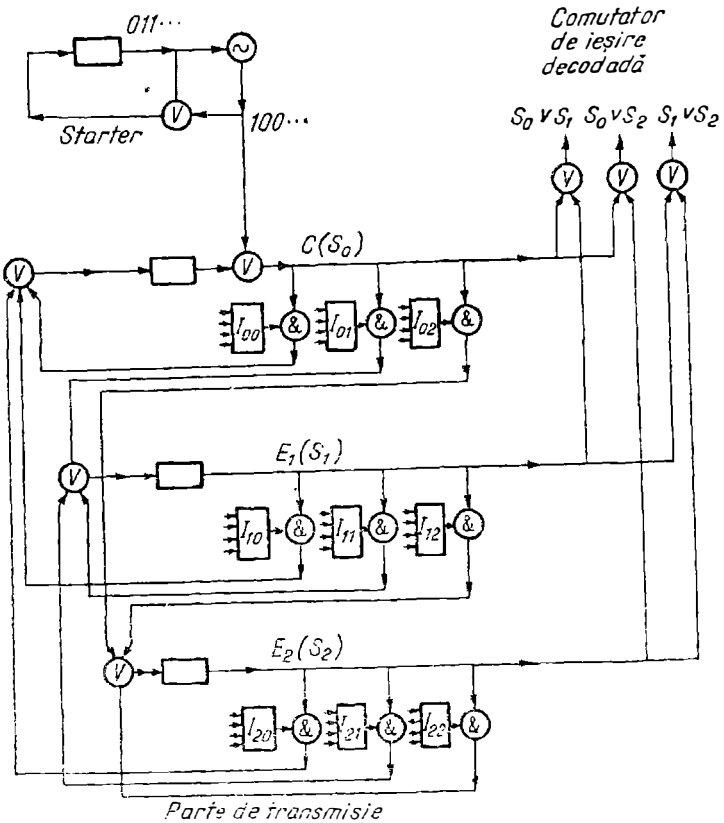


Figura 2. *Rețea în formă normală decodală*

Acum vrem să construim o rețea conținînd conductorii C, $E_1 \ldots E_{N-1}$ astfel legați, încît în fiecare moment de timp, exact unul din ei să fie activ (în starea unu), ceilalți fiind la zero și cu următoarea proprietate inductivă.

(A) Legătura C (care reprezintă S_0) este activă la momentul de timp 0.

(B) Pentru orice moment de timp t, dacă legătura intitulată S_i (adică C pentru $i = 0$ și E_i pentru $i > 0$) este activă la momentul t, intrarea la momentul t este I_k, iar $\ll I_k, S_i >, S_j >$ este o linie a tabelului caracteristic, atunci legătura intitulată S_j va fi activată la momentul $t + 1$.

Pentru a realiza condiția (A), construim un *startor* (a se vedea fig. 2), care produce transformarea independentă de intrare 100... Atunci ieșirea startorului este pusă în disjuncție cu E_0 pentru a produce pe C. Aceasta ne asigură că $C(0) = 1$, iar $C(t) = E_0$ pentru $t > 0$. Startorul, care adaugă un nou element de intîrziere la rețea, poate fi construit fără ciclu (a se vedea § 4.3.)

Mai complicată este realizarea proprietății (B). Deoarece avem cîte o legătură de stare pentru fiecare stare (C pentru S_0, E_{i+1} pentru S_{i+1}) apare util aci conceptul de cuvînt de trecere directă. Pentru fiecare legătură de stare S_i introducem N comutatoare, astfel încît:

$\widehat{I_{i0}S_i}$ produce direct S_0 (adică la momentul de timp următor îl activează pe C);

$\widehat{I_{i1}S_i}$ produce direct S_1 (adică la momentul de timp următor îl activează pe E_1);

$\vdots$

$\widehat{I_{i,N-1}S_i}$ produce direct S_{N-1} (adică la momentul de timp următor îl activează pe E_{N-1}).

În fig.2 se arată o rețea care satisface aceste cerințe, dar care este de fapt o *schemă de rețea* și nu o rețea, deoarece I_{ij}-urile nu sînt specificate.

Casetele etichetate cu expresiile de trecere directă I_{ij} se numesc *comutatoare de trecere directă.* (Să remarcăm că aceste comutatoare de trecere directă sînt altele decît comutatoarele de trecere directă din fig. 1, deși pot juca, în esență, același rol). Un comutator de trecere directă I_{ij} are o ieșire la momentul t, dacă și numai dacă intrarea la rețea este reprezentată printr-o disjuncție de I_{ij}. Fiecare asemenea comutator poate fi realizat printr-o disjuncție acționată de conjuncții de intrări pozitive și negative. De exemplu, fie I_{10} identic cu $0101 \vee 0110 \vee 1111$, ceea ce se poate scrie ca $\bar{A}_0 A_1 \bar{A}_2 A_3 \vee \vee \bar{A}_0 A_1 \bar{A}_2 A_3 \vee \bar{A}_0 A_1 A_2 \bar{A}_3$, ceea ce este realizat printr-un comutator. Desigur că numărul intrărilor poate varia de la o rețea la alta; în figurile noastre (așa cum am procedat și în fig. 2) vom indica de obicei patru intrări.

Dacă un anumit I_{ij} este $\emptyset$, atunci comutatorul I_{ij} și conjuncția pe care o acționează pot fi lăsate deoparte. Dacă o rețea trece direct de la o stare S_i la o stare S_j independent de intrările care au loc (sau pentru că nu au loc intrări), putem trage o linie directă de la legătura S_i la intrarea elementului de întîrziere care acționează legătura S_j. O rețea independentă de intrare devine astfel o succesiune de întîrzieri (corespunzător cu partea inițială a transformării independente de intrare) acționată de către un startor și acționînd la rîndul său un ciclu de întîrzieri (corespunzător cu partea periodică a funcției); a se vedea și teorema XIII precum și figura care o însoțește la Burks și Wright [1] p. 1363.

O rețea care are forma din fig. 2 spunem că este în *formă normală decodată*. În primul rînd să explicăm de ce spunem că această formă este „decodată", spre deosebire de forma „codată" descrisă înainte; abia după aceea vom discuta în ce relații se află exact rețelele decodate cu celelalte rețele. Terminologia este justificată de faptul că într-o formă normală codată numerele care reprezintă stările de întîrziere (adică D-urile) apar în formă codată, în timp ce în forma normală decodată numerele care reprezintă stările de întîrziere (D-urile, numai că E_0 este înlocuit cu C la momentul zero) apar în formă decodată exact în sensul în care termenii „codat" și „decodat" sînt utilizați în teoria comutatoarelor. Un *comutator decodat* este un comutator la care numărul legăturilor de ieșire $C_0,..., C_{N-1}$ este același ca și al cuvintelor de intrare admisibile, $I_0,... I_{N-1}$, iar legăturile sînt astfel conectate, încît atunci cînd starea la intrare este I_n, legătura de ieșire C_n este activă, toate celelalte ieșiri fiind neactive. (Avem aici un caz particular de rețele discutat la Burks, McNaughton și alții [13]). Informația cu privire la intrări este în *formă codată*, pe cînd informația referitoare la ieșiri este *decodată*. Numai că, în formele noastre normale codată și decodată, pentru rețele, codarea și decodarea se aplică mai curînd la ieșirile întîrzierilor decît la ieșirile comutatoarelor.

Fiind dată o rețea automat, putem construi o rețea în formă normală decodată, care o modelează în sensul că are legături cu aceeași comportare. Să începem cu porțiunea de trecere a rețelei date. Să presupunem că ea are n legături de ieșire ale întîrzierilor F_0, F_1, ..., F_{n-1} și N stări admisibile S_0, S_1, ..., S_{N-1} ($N \leqslant 2^n$). Construim apoi porțiunea de tranziție a unei rețele în formă normală decodată, cu legăturile C, E_1, ..., E_{N-1}, astfel încît a i-a cifră de la stînga din $\widehat{CE}_1...\widehat{E}_{N-1}$ este unu, atunci cînd automatul inițial se află în starea S_{i-1}. O funcție F_j este echivalentă cu disjuncția $S_{a_1} \vee S_{a_2} \vee ... \vee S_{a_k}$ ai cărei termeni sînt exact acele stări pentru care F_j are valoarea unu. Așadar, cu ajutorul disjuncției legăturilor de stare convenabilă a rețelei în formă normală decodată, putem obține o funcție F'_j, astfel încît $F'_j(t) \equiv F_j(t)$ pentru orice t. Fig. 2 arată un *comutator de ieșire decodat* care realizează $S_0 \vee S_1$, $S_0 \vee S_2$ și $S_1 \vee S_2$. „Disjuncțiile cu un singur termen" S_0, S_1 și S_2 sînt deja reprezentate în fig. 2, iar ieșirile independente de intrări, ($\bar{S}_0 \,\&\, \bar{S}_1 \,\&\, \bar{S}_2$) și ($S_0 \vee S_1 \vee S_2$) (adică 000 ... și 111...) se pot obține ușor la nevoie.

Aceasta ne arată cum să construim legăturile unei rețele în formă normală decodată, care să se comporte la fel ca și legăturile de ieșire ale întîrzierilor din rețeaua inițială. Orice altă legătură din rețeaua inițială a cărei comportare la momentul t nu depinde de starea de la intrare la momentul t poate fi tratată la fel. În ce privește celelalte legături, putem alcătui un comutator la ieșire, alimentat atît de comutatorul de ieșire decodat, cît și de intrările rețelei. De asemenea, comutatorul de ieșire decodat poate fi înlocuit printr-un comutator pus în funcțiune de legăturile de stare și de intrările rețelei. Rețelele în formă normală decodată pot avea ca părți comutatoare de diferite feluri. Acum, putem încorpora rezultatele noastre într-o teoremă.

Teorema 2. Pentru orice rețea bine formată, avînd legăturile C_0, C_1..., putem construi o rețea în formă normală decodată cu legăturile C'_0, C'_1,..., astfel încît pentru orice i și orice t, $C_i(t) \equiv C'_1(t)$.

Porțiunea de tranziție a rețelelor în formă normală decodată se poate așeza în formă matricială, pentru a i se putea stabili mai bine legătura cu matricea

trecerilor. În fig. 3 aceasta se realizează pentru o matrice de ordinul 4. Rezultatul obținut se numește celula sau *cutia matricială*. Elementele disjuncției din fig. 2 sînt omise prin convenție (a se vedea Burks și Copi [2]., p. 307). O rețea în formă normală a cărei porțiune de trecere are forma unei cutii matriceale se numește *rețea în formă matriceală*. Fig. 4 este un exemplu lipsit de comutator la ieșire.

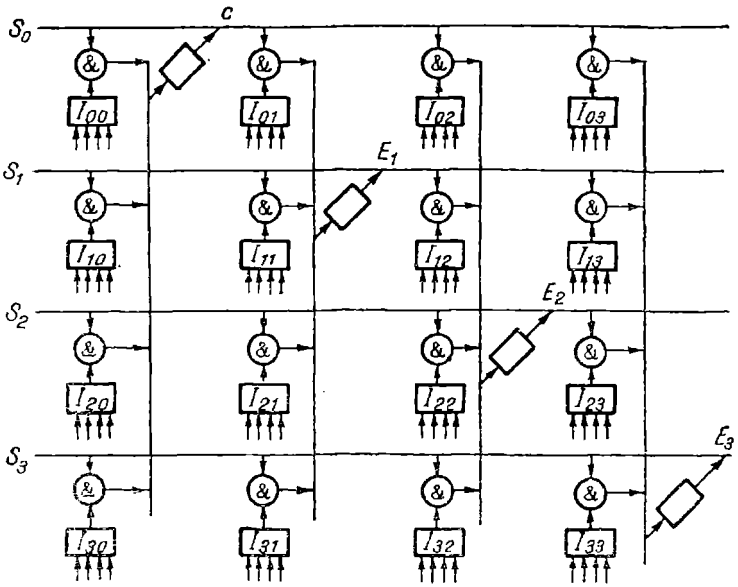


Figura 3. *Celulă matriceală de ordinul 4*

O rețea particulară de ordinul patru se poate obține din schema dată în figura de mai sus, înlocuind schemele comutatoarelor de trecere directă prin comutatoare convenabile. Să exemplificăm aceasta pentru numărătorul ciclic în patru timpi a cărui matrice a trecerilor am dat-o la 3.1. Dacă lăsăm intrarea $I_0 \equiv 0$ și intrarea $I_1 \equiv 1$ (astfel încît să fie numărate impulsurile și nu absența lor), obținem cutia matricială din fig. 4. Deoarece avem $I_{ii} \equiv I_c \equiv 0$, înlocuim aceste scheme de trecere directă prin elemente de negație; pentru fiecare i, j cu $j = i + 1$ modulo patru, avem $I_{ij} \equiv 1$, așa încît înlocuim aceste scheme prin linii de intrare; toate celelalte scheme de comutatoare de trecere corespund cu Ø-urile din matricea de trecere, așa încît ele pot fi înlăturate (de exemplu, nu este posibilă o trecere directă de la S_2 la S_1, astfel încît nu se pot cupla direct S_2 și ε_1). Din fig. 4 este evident că numărătorul se află în etapa întîi atunci cînd intrarea este zero, dar înaintează spre etapa următoare (modulo patru), atunci cînd intrarea este unu.

3.3. Unele utilizări ale matricelor

Descoperirea că matricele pot fi utilizate pentru caracterizarea rețelelor automate determină apariția unor interesante direcții de cercetare. În subparagraful de față vom discuta cîteva aplicații ale matricelor la analiza rețelelor de automate.

O matrice de trecere directă (ale cărei elemente sînt expresii de trecere directă) caracterizează trecerile directe din automat. Vom stabili, la început, cîteva proprietăţi ale unei asemenea matrice, iar apoi vom generaliza conceptele de expresie de trecere directă şi matrice de trecere directă pentru a cuprinde trecerile de lungime arbitrară.

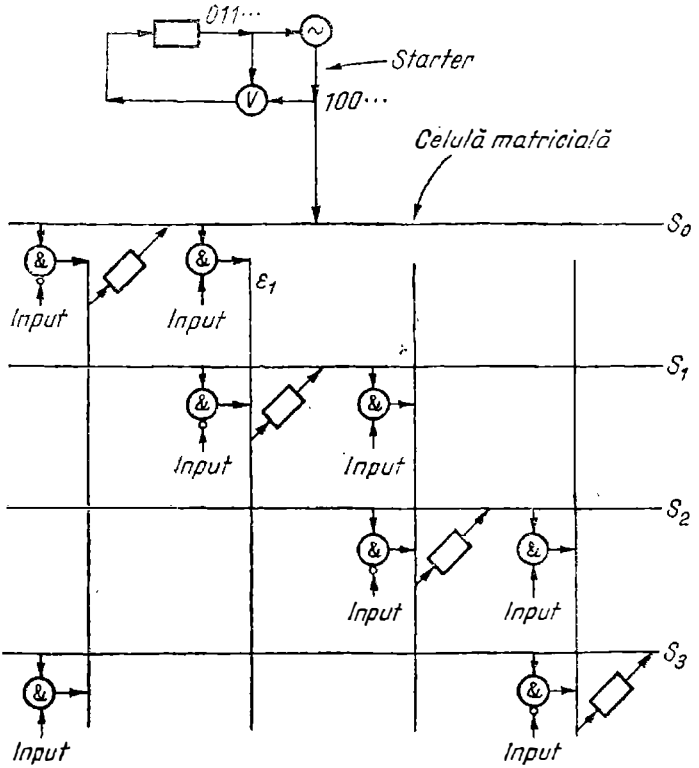


Figura 4. Forma matriceală a contorului binar

Fiecare linie a unei matrice de trecere directă este o compartimentare a M cuvinte de intrare $I_0, I_1, \ldots I_{M-1}$ în N coloane $S_0, S_1, \ldots S_{N-1}$. Aşadar, disjuncţia unei linii conţine toate cuvintele de intrare admisibile. Dacă cu aceasta se epuizează cuvintele posibile, atunci disjuncţia liniei este o tautologie. Dacă există cuvinte de intrare inadmisibile, atunci expresia ipotetică a cărei consecinţă este disjuncţia liniei matriciale şi al cărei antecedent este disjuncţia tuturor cuvintelor de intrare admisibile este o tautologie. În acest caz putem spune că „suma" liniei matriciale este o tautologie relativ la condiţiile de admisibilitate, sau că ea este o *tautologie* în sensul larg al cuvîntului. (Să remarcăm că acest sens relativ al cuvîntului „tautologie" prezintă importanţă în problemele de minimalizare; cînd minimalizăm un comutator nu ne interesează un comutator logic echivalent cu cel dat, ci mai curînd un comutator logic echivalent cu cel dat relativ la condiţiile de admisibilitate la intrare). Un element j dintr-o linie i poate fi o tautologie; în acest caz, toate celelalte elemente ale liniei sînt nule; aceasta înseamnă că ori de cîte ori automatul

este în starea S_1, el trece direct la S_j, indiferent de intrări. Nici un cuvînt de la intrare nu poate interveni într-o linie mai mult decît o dată, căci altfel automatul n-ar fi determinist.

Disjuncția elementelor unei coloane nu este, în general, o tautologie, dar prezintă un interes special cazul cînd ele sînt legate de conceptul determinismului invers.

Definiția 5. Un automat abstract este invers determinist dacă și numai dacă pentru fiecare șir finit $I(0), I(1), \ldots I(t), S(t+1)$, există un șir unic $S(0), S(1), \ldots, S(t)$ care satisface tabelul complet. O matrice a trecerilor directe este invers deterministă, dacă și numai dacă pentru fiecare I_k și S_j există cel mult o stare S_j astfel încît $\widehat{I_k S_i}$ produce direct S_j.

Dăm un exemplu de matrice invers deterministă de ordinul trei:

$$\begin{vmatrix} I_0 \vee I_1 & \Phi & I_2 \\ \Phi & I_0 \vee I_1 \vee I_2 & \Phi \\ I_2 & \Phi & I_0 \vee I_1 \end{vmatrix}.$$

Un alt exemplu interesant este următorul:

$$\begin{bmatrix} I_0 & I_1 & I_2 & I_3 \\ I_1 & I_2 & I_3 & I_0 \\ I_2 & I_3 & I_0 & I_1 \\ I_3 & I_0 & I_1 & I_2 \end{bmatrix}.$$

Această matrice în afară de faptul că este invers deterministă mai are proprietatea că de la orice stare se poate trece direct la orice altă stare. Vom spune că o asemenea matrice este tare direct conectată (a se vedea și definiția 6 de mai jos).

Teorema 3. Disjuncția oricărei coloane dintr-o matrice a trecerilor directe este o tautologie, dacă și numai dacă matricea este invers deterministă. Un automat abstract este invers determinist, dacă și numai dacă matricea trecerilor sale directe este invers deterministă.

Să demonstrăm, la început, că pentru ca orice sumă logică a unei coloane să fie o tautologie este necesar și suficient ca matricea să fie invers deterministă. Dacă suma fiecărei coloane este o tautologie, atunci orice cuvînt de intrare trebuie să intervină cel puțin o dată în fiecare coloană. Dar nici un cuvînt de intrare nu poate interveni de două ori într-o coloană, deoarece în matricea $N \times N$, fiecare cuvînt de intrare trebuie să apară într-o linie și numai într-una și există exact N apariții ale fiecărui cuvînt de intrare. Dacă un cuvînt de intrare apare de două ori în aceeași coloană, atunci acest cuvînt trebuie să lipsească cel puțin într-una din coloanele rămase și deci aceasta nu va fi tautologie. Așadar, pentru o stare S_j la timpul $t+1$ și un cuvînt de intrare I_k la timpul t există doar o singură stare S_i, care împreună cu I_k să poată produce direct pe S_j. În concluzie, faptul că suma fiecărei coloane este

o tautologie este condiţie suficientă pentru ca matricea trecerilor directe să fie invers determinstă. Faptul că acest lucru este şi o condiţie necesară se demonstrează urmînd raţionamentul de mai sus în sens opus. Într-o matrice invers determinstă nici un cuvînt de intrare nu poate interveni de două ori în aceeaşi coloană. Dar fiecare linie conţine o apariţie şi numai una a fiecărui cuvînt de intrare. Aşa că există exact N apariţii ale fiecărui cuvînt de intrare. Deci nici un cuvînt nu lipseşte din vreo coloană, căci altfel el ar trebui să intervină de două sau mai multe ori în cel puţin o altă coloană. Aşadar, fiecare sumă a unei coloane trebuie să fie o tautologie.

Acum, să arătăm că dacă matricea trecerilor directe este invers determinstă, atunci şi automatul abstract respectiv este invers determinist. Să considerăm un şir finit $I(0)$, $I(1), \ldots, I(t)$, $S(t+1)$. Din rezultatele alineatului precedent reiese că există un $S(t)$ şi numai unul, care împreună cu $I(t)$ produce direct $S(t+1)$. Repetînd acest raţionament, vedem că există un şir unic $S(0)$, $S(1), \ldots, S(t)$ care satisface tabelul complet (atunci cînd sînt date $I(0), \ldots I(t)$, $S(t+1)$. Pentru a demonstra a doua parte a teoremei, să observăm că dacă o matrice nu este invers determinstă, atunci există cel puţin un I_k şi cel puţin un S_j pentru care două stări distincte S_a şi S_b produc direct, fiecare în parte, împreună cu I_k, pe S_j. Aşadar, pentru şirul $I(0) = I_k$ şi $S(1) = S_j$ avem două şiruri (şi anume $S(0) = S_a$ şi $S(0) = S_b$, care satisfac tabelul complet).

În § 2.1 am observat că, dată fiind ipoteza noastră determinstă, un trecut infinit n-ar fi convenabil. Prima parte a teoremei 3 poate da o justificare a acestei afirmaţii. Pentru a descrie comportarea unei reţele în cursul unei anumite perioade de timp t, $t+1, \ldots, t+w$, ar trebui, firesc, să cunoaştem intrările $I(t)$, $I(t+1), \ldots I(t+w)$ şi stările interne S într-unul din aceste momente (eventual la momentul $t+w+1$). Or, dacă fiecare reţea ar fi invers determinstă, nu ar conta pentru care moment de timp îl cunoaştem pe S; însă pentru o reţea care nu este invers determinstă trebuie să-l cunoaştem pe $S(t)$ pentru a determina pe $S(t+1), \ldots S(t+w)$. Deoarece întotdeauna am putea lua ca punct de referinţă standard pentru analiză momentul $t = 0$, vom permite ca t să varieze numai pe mulţimea întregilor nenegativi. (Am putea defini determinismul invers pe baza fiecărui şir infinit..., $I(-7)$, ..., $I(0), \ldots, I(t)$, $S(t+1)$ determinînd un şir infinit..., $S(-7), \ldots, S(0), \ldots, S(t)$ şi conducînd discuţia în termenii acestei definiţii. Teorema 3 continuă să fie valabilă cu următoarea excepţie: matricea trecerilor directe a unui automat invers determinist poate să nu fie invers determinstă relativ la stările care nu pot fi repetate. De exemplu, un automat invers determinist poate avea o matrice a trecerilor în care atît $\widehat{S_a I_k}$ cît şi $\widehat{S_b I_k}$ să producă direct aceeaşi stare S_j, dar în care nici o stare împreună cu vreo combinaţie de intrare nu produce direct S_a sau S_b).

Să trecem acum la problema generalizării noţiunii de expresie de trecere directă, astfel încît să cuprindem şi trecerile nedirecte. Să considerăm un exemplu. Să presupunem că de la starea trei la starea şapte a unui automat putem trece fie prin şirul I_4, I_6, fie prin şirul I_2. Putem scrie acest lucru ca $I_4 I_6 \vee I_2$, dar trebuie să ne înţelegem că aici alăturarea reprezintă o conjuncţie de tip necomutativ, deoarece I_6 urmat de I_4 poate să nu asigure trecerea reţelei de la starea trei la starea şapte. Vom folosi uneori o operaţie specială,

denumită conjuncție de concatenare, pentru a exprima conjuncția necesară aici, care ține seama de ordine. Atunci expresia de mai sus se poate scrie $I_4 \frown I_6 \vee I_2$. Dar atunci cînd în context nu există vreun pericol de confuzie, simbolul conjuncției de concatenare $\frown$ poate fi omis. Natura necomutativă a conjuncției de concatenare poate fi înlăturată, dacă explicităm rolul timpului: $I_4 \frown I_6$ nu este decît o prescurtare pentru $I_4(t) \cdot I_6(t+1)$, pe cînd $I_6 \frown I_4$ este o prescurtare pentru $I_6(t) \cdot I_4(t+1)$. Evident, $I_4(t) \cdot I_6(t+1)$ nu este același lucru cu $I_6(t) \cdot I_4(t+1)$.

Conjuncția de concatenare se poate utiliza pentru construirea cuvintelor de tranziție din expresii de trecere directă. De exemplu, să presupunem că avem expresiile de trecere $I_{3,2} \frown I_{2,5} \frown I_{5,7} \vee I_{3,7}$ sau, mai direct, $I_{3,2} I_{2,5} I_{5,7} \vee I_{3,7}$. Într-un caz concret, aceasta poate fi o reducere a expresiei de trecere $I_4 \frown (I_6 \vee I_9) \frown I_5 \vee (I_3 \vee I_6)$ sau, mai pe scurt, $I_4(I_6 \vee I_9)\ I_5 \vee (I_3 \vee I_6)$, care, desigur, că este echivalentă cu expresia de trecere $I_4 \frown I_6 \frown I_5 \vee I_4 \frown I_9 \frown I_5 \vee I_3 \vee I_6$ sau, mai pe scurt, $I_4 I_6 I_5 \vee I_4 I_9 I_5 \vee I_3 \vee I_6$. În virtutea acestei desfășurări, utilizăm un principiu de distribuție pentru conjuncția de concatenare $(p \vee q) \frown (r \vee s) \equiv (p \frown r \vee p \frown s \vee q \frown r \vee q \frown s)$.

Acum, putem defini conceptul general de expresie de trecere. *O expresie de trecere* este o disjuncție de conjuncții de concatenare a unor expresii de trecere directă cu condiția înlocuirii prin $\varnothing$ a oricărei conjuncții de concatenare în care figurează $\varnothing$. De exemplu, $I_{2,5} I_{5,3} \vee I_{2,3}$ poate deveni $(I_3 \vee I_7) \frown \varnothing \vee \varnothing$, care se va reduce la $\varnothing$. Expresiile de trecere directă le vom considera drept cazuri particulare ale expresiilor de trecere.

Definiția 6. O matrice de trecere de ordin N este un pătrat cu N linii și N coloane ale cărui element sînt expresii de trecere. Două matrice de ordin N se pot combina cu ajutorul următoarelor operații, unde $\alpha(a, b)$ $\beta(a, b)$ *sînt expresii de trecere pentru trecerile de la starea a la starea b.*

Disjuncția matricelor: $[\alpha(a, b)] \vee [\beta(a, b)] = \alpha[(a, b) \vee \beta(a, b)]$.

Conjuncția de concatenare a matricelor $[\alpha(a, b)] \frown [\beta(a, b)] = [\gamma(a, b)]$, unde, notînd cu Σ disjuncția,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \alpha(a, i) \frown \beta(i, b) = \gamma(a, b).$$

Puterea (de concatenare) matricelor: $M^1 = M$ $M^n = M^{n-1} \frown M$.

Suma puterilor matricei: $\sum_{i=1}^{n} M^i = M \vee M^2 \vee \ldots \vee M^n$.

Matricea caracteristică $C(M)$ a unei matrice de trecere M se obține înlocuind elementele lui M cu zerouri sau unități, după cum aceste elemente se reduc sau nu se reduc la $\varnothing$, adică după cum trecerile de la starea a la starea b sînt imposibile sau nu în M. O matrice de trecere directă M este direct tare conectată, dacă și numai dacă fiecare element din $C(M)$ este unu. *Inegalitatea între două matrice caracteristice* este definită prin $C(M) \leqslant C(N)$, dacă și numai dacă pentru fiecare element $\alpha(a, b)$ din $C(M)$ și elementul corespunzător $\beta(a, b)$ din $C(N)$ avem $\alpha(a, b) \leqslant (a, b)$, adică $\alpha \supset \beta$.

Teorema 4. Fie M o matrice de treceri directe de ordin n. O trecere de la starea S_i *la starea* S_j *în exact w pași este posibilă, dacă și numai dacă elementul* $\alpha(i, j)$

din $C(M^w)$ *este unul. O trecere de la* S_i *la* S_j *în cel mult* w *paşi este posibilă, dacă şi numai dacă elementul* $\alpha(i, j)$ *din* $C\left(\sum_{k=1}^{w} M^k\right)$ *este unu. O trecere de la starea* S_i *la starea* S_j *este posibilă, dacă şi numai dacă* (*a*) *pentru* $i \neq j$, *elementul* $\alpha(i, j)$ *din* $C\left(\sum_{k=1}^{n-1} M^k\right)$ *este unu*; (*b*) *pentru* $i = j$, *elementul* $\alpha(i, j)$ *din* $C\left(\sum_{k=1}^{n} M^k\right)$ *este unu. O reţea este tare conectată, dacă şi numai dacă fiecare element din* $C\left(\sum_{k=1}^{n} M^k\right)$ *este unu. Dacă* α *şi* β *sînt numere întregi pozitive, atunci*

$$C\left(\sum_{k=1}^{\alpha} M^k\right) \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{\alpha+\beta} M^k\right),$$

$$C\left(\sum_{k=1}^{n} M^k\right) = C\left(\sum_{k=1}^{n+\alpha} M^k\right).$$

Pentru a demonstra această teoremă, să examinăm întîi structura elementelor din M^w, unde M este matricea trecerilor directe. Fiecare element $\alpha(i, j)$ este o disjuncţie de conjuncţii de concatenare, avînd fiecare forma $I_{ia_1}I_{a_1a_2}\ldots$ $\ldots I_{a_wj}$. Evident, o trecere de la S_i la S_j, în exact w paşi, este posibilă, dacă şi numai dacă cel puţin una dintre aceste conjuncţii de concatenare nu se reduce la Ø, adică dacă şi numai dacă elementul $\alpha(i, j)$ din $C(M^w)$ este unitate. Elementele matricei $\sum_{i=1}^{w} M^k$ sînt expresii de trecere care acoperă trecerile în 1, 2,... w paşi şi deci elementele din $C\left(\sum_{i=1}^{w} M^k\right)$ sînt unu sau zero, după cum este posibil sau nu ca trecerea de la S_i la S_j să se realizeze în cel mult w paşi. Rămîne să arătăm că dincolo de o anumită putere (n pentru $i = j$, $n - 1$ pentru $i \neq j$) ridicarea lui M la o putere mai înaltă nu adaugă nimic la posibilitatea de apariţie a trecerilor, ci modifică numai posibilităţile modurilor de apariţie. Să considerăm două stări distincte, S_i şi S_j. Pentru a trece de la una la alta, nu avem decît $n - 2$ stări. Dacă automatul se află într-una dintre aceste stări S_k mai mult decît un singur moment de timp, posibilitatea de a obţine pe S_j din S_i nu creşte, deoarece tot ce poate fi realizat dintr-o apariţie ulterioară a lui S_k se poate realiza şi prin prima apariţie a lui S_k. Argumentarea este similară în ce priveşte tranziţiile posibile de la S_i la S_i, cu unica deosebire că aici trebuie să luăm în considerare $n - 1$ stări diferite de cea dată.

§ 4. CICLURI, REŢELE ŞI CUANTORI

4.1. Reţele cu descompunere

În acest paragraf vom vorbi despre cicluri în reţele şi aplicaţiile lor la analiza logică a reţelelor. În primul rînd, să examinăm eliminarea din reţele a ciclurilor nenecesare.

O rețea bine bine formată (r.b.f) poate avea intrări ale unor elemente comutatoare neutilizate. Aceasta pare deosebit de verosimil pentru rețelele în formă normală codată construite pornind de la un tabel caracteristic, deoarece nu este cazul ca toate cifrele din D și I să influențeze o legătură de intrare a unei întîrzieri date. Prin inspectarea tabelului caracteristic al unei r.b.f., putem să ne dăm seama de cifrele nerelevante pentru ieșirea unui comutator C_i. Un bit particular A_t din $\widehat{ID}$ este nerelevant pentru C_t, dacă și numai dacă pentru fiecare pereche $\widehat{ID}$ care este identică în fiecare poziție A_j valoarea lui C_t este aceeași. Utilizînd acest criteriu, putem elimina toate intrările neutilizate ale comutatoarelor, înlocuind elementele comutatoare inițiale cu alte elemente care se comportă la fel în ce privește toate intrările și la care fiecare intrare în parte are o influență. Același proces se poate aplica atît tabelului ieșirilor, cît și comutatoarelor de ieșire.

Trebuie remarcat că procesul de mai sus este o tehnică de minimizare, adică o tehnică care oferă o rețea mai simplă ce realizează aceleași transformări ca și rețeaua inițială. În § 2.3 am arătat cum se poate reduce numărul elementelor de întîrziere cu ajutorul formei normale codate. Alte metode de minimalizare sînt cuprinse, implicit, în rezultatele paragrafelor precedente. De exemplu, dacă două legături dintr-o rețea se comportă la fel (a se vedea procedura de decizie de la § 2.2.), una poate fi eliminată. Să observăm că în cadrul acestor proceduri de reduceri putem lucra asupra tabelelor complete, tabelelor caracteristice și a tabelelor de ieșiri; nu avem de loc nevoie să ne referim la diagramele rețelelor.

Însă în momentul de față, ceea ce ne interesează cel mai mult nu este minimalizarea în general, ci numai în măsura în care ea este legată cu numărul și natura ciclurilor unei rețele. De exemplu, fiecare rețea în formă normală cu cel puțin un element de întîrziere va avea cicluri, în timp ce rețeaua corespunzătoare, fără elemente comutatoare nerelevante poate să aibă mai puține cicluri sau eventual să nu aibă de loc cicluri. Iată de ce de aci încolo vom considera numai asemenea rețele. Acum trebuie să definim o măsură a complexității ciclurilor unei rețele.

Un șir de legături A_1, A_2, ..., A_n, A_1 (eventual cu repetiții) constituie un *ciclu*, dacă și numai dacă fiecare A_i este o intrare la un element a cărui ieșire este A_k, unde $k = j + 1$ modulo n. Așadar, o legătură intervine într-un ciclu, dacă este posibil să pornim de la acea legătură, să înaintăm (în direcția indicată de săgeți) de-a lungul elementelor comutatoare și a elementelor de întîrziere, revenind ulterior la acea legătură. O legătură care nu intervine într-un ciclu se spune că este de *grad* zero; așa sînt legăturile independente de intrări. Trebuie observat că această definiție atribuie gradul zero și unor legături care intervin în cicluri, adică tuturor legăturilor independente de intrări care intervin în cicluri. Motivul va deveni clar în subparagraful următor. Din aceeași cauză pretindem o nouă modificare a rețelei, înainte de a se atribui cîte un grad legăturilor rămase în ea. Modificarea constă în înlocuirea tuturor ciclurilor care conțin atît legături independente de intrări, cît și legături care nu sînt independente de intrări, prin cicluri care conțin numai legături de un fel. Fie C o legătură independentă de intrare care intervine într-un ciclu, cu o legătură E, care nu este independentă de intrare. Desfacem ciclul în C, înlăturînd elementul a cărui ieșire este legată de legătura C; pentru ca rețeaua

să aibă aceeaşi comportare, conectăm C cu ieşirea unei subreţele care realizează transformarea independentă de intrare pe care iniţial o realiza C. O asemenea subreţea se poate construi astfel, încît ea să aibă doar un ciclu şi deci fiecare legătură a ei este independentă de intrare (Burks şi Wright [1]. teorema XIII, p. 1363). Aşadar, fiind dată o reţea N, putem găsi o reţea echivalentă N', care nu are mai multe cicluri decît N şi în care nici un ciclu nu conţine legături independente de intrări, cît şi legături ce nu sînt independente de intrări. Spunem că o reţea fără intrări nerelevante la elementele comutatoare şi fără cicluri în care figurează atît legături independente de intrări, cît şi legături neindependente este *în formă redusă*. Acum atribuim cîte un grad fiecărei legături din N' (şi deci, prin derivare, fiecărei legături din N) după cum urmează.

Gradul unei legături care nu este independentă de intrări şi care intervine într-un ciclu este maximul numărului de elemente de întîrziere distincte pe care le parcurgem atunci cînd ne deplasăm de-a lungul ciclurilor în care intervine legătura respectivă. Figura 5 arată o reţea, în care gradul fiecărei legături este indicat în paranteză. (Stipulăm că în fig. de mai jos funcţiile comutatoare sînt alese astfel, încît nici o legătură nu este independentă de intrări, iar reţeaua este în formă redusă). Să observăm că pentru a ajunge atît la E_2 cît şi la E_3 din C_0 este necesar să trecem de două ori prin E_1.

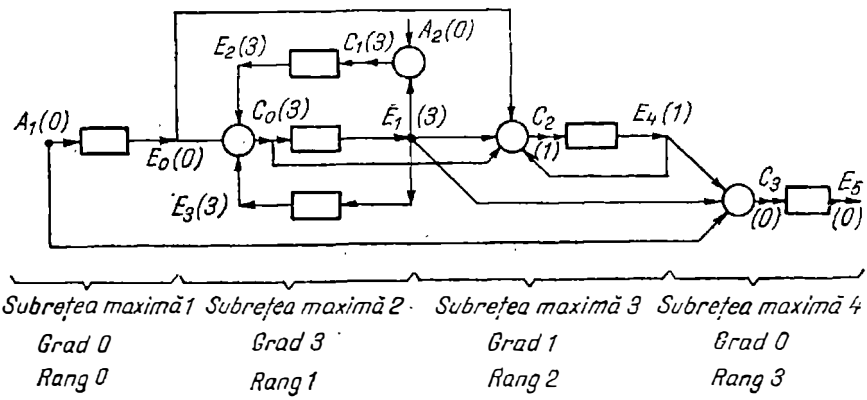


Figura 5. Reţea de gradul 3

Gradul unei reţele este maximul gradelor legăturilor ei. Fig. 5 este de grad 3. O reţea este *total conectată*, dacă şi numai dacă gradul ei este mai mare decît zero, iar numărul elementelor de întîrziere este egal cu gradul ei. Această noţiune trebuie comparată cu noţiunea analogă de „tare conectat", definită în paragraful 2.3. Definim conceptul de *direct total conectat* prin analogie cu cel de „direct tare conectat" din paragraful 3.3.; adică într-o reţea direct total conectată este posibil ca, pornind de la orice ieşire de întîrziere şi înaintînd pe orice legătură de intrare a întîrzierilor să trecem doar prin elemente comutatoare. Prima dintre acestei mulţimi de noţiuni se referă la stări; cealaltă mulţime se referă la cifrele utilizate pentru a reprezenta stările.

Fig. 5 nu este total conectată, dar ea poate fi complet descompusă în două reţele de grad zero (reţeaua $A_1 - E_0$ şi reţeaua $E_4 - E_1 - A_1 - C_3 - E_5$)

și două subrețele total conectate ($E_0 - C_0 - E_1 - A_2 - C_1 - E_2 - E_3$ și $E_0 - C_0 - E_4 - C_2$).

O subrețea total conectată maximală asociată cu o legătură a rețelei, să zicem F, este rețeaua formată din toate legăturile care intervin într-un ciclu cu F împreună cu toate elementele dintre aceste legături și legăturile de intrare ale tuturor comutatoarelor ale căror legături de ieșire se află într-un ciclu cu F. Subrețeaua 2 din fig. 5 ($E_0 - C_0 - E_1 - A_2 - C_1 - E_2 - E_3$) este o subrețea total conectată maximală asociată cu legăturile E_2, C_1, C_0, E_1 E_3. Porțiunea acestei rețele care rezultă prin înlăturarea elementului de întîrziere dintre E_1 și E_3 este și ea subrețea total conectată, dar nu este maximală (fig.5).

Deoarece fiecare pereche de legături dintr-o rețea sau intervine sau nu intervine în același ciclu, rezultă că fiecare element al unei rețele sau aparține unei subrețele de grad zero (adică nu este într-un ciclu) sau aparține unei subrețele total conectate maximale, unice, din rețeaua inițială. (Să observăm în legătură cu aceasta că relația de „apariție în același ciclu" este o relație tranzitivă). Un element dat al unei rețele poate să aparțină la diferite subrețele de grad zero; de exemplu, întîrzierea $C_3 - E_5$ din fig. 5 aparține subrețelei 4 și în același timp subrețelei care se reduce la această întîrziere.

Există diferite căi pentru a grupa elementele conectate cu legături de grad zero în subrețele maximale; vom da una dintre ele. Fie A o legătură de grad zero și fie B o altă legătură a rețelei. Înaintînd de la B la A, de-a lungul unui anumit drum, putem trece prin n ($n \geqslant 0$) subrețele total conectate maximale înainte de a ajunge la A. Să observăm că n este mărginit, căci dacă am putea trece printr-o subrețea total conectată maximă M, dată, iar apoi (continuînd să înaintăm în direcția săgeților) să revenim la M trecînd iarăși prin ea, atunci nu s-ar mai putea ca M să fie maximală. Deoarece există un număr finit de legături în rețea și un număr finit de drumuri de la fiecare din ele la A, rezultă că există un număr maxim N, care poate fi asociat cu A. Atunci grupăm într-o *subrețea maximă de grad zero* toate elementele care se află între legăturile cu același număr maximal N împreună cu toți conductorii de intrare ai tuturor comutatoarelor ale căror legături de ieșire sînt asociate cu numărul N. Subrețeaua 4 din fig. 5 este o subrețea maximă de grad zero.

Acum este clar că orice rețea în formă redusă se poate descompune în mod unic și efectiv în subrețele total conectate maximale și subterane maximale de grad zero, adică în *subrețele maximale* de diferite grade. Figura 5 se descompune în mod unic în cele patru subrețele arătate acolo. Pentru a descompune o rețea, nu avem nevoie decît să stabilim, unul cîte unul, gradul fiecărei legături, să înlăturăm toate legăturile independente de intrări care intervin în cicluri cu legături neindependente de intrări, să determinăm clasele de legături care aparțin acelorași cicluri și apoi să determinăm subrețelele maximale de grad zero.

Fiecărei subrețele maximale i se poate atribui un *rang* care se definește inductiv după cum urmează. O subrețea maximală care nu are intrări ale rețelei sau ale cărei intrări sînt toate intrări ale rețelei este de rang O. O subrețea maximală care are cel puțin o intrare dintr-o altă subrețea maximală de rang r și nu are intrări din subrețele maximale de rang mai mare decît r este de rang $r + 1$. Un exemplu este dat de fig. 5. Desigur că diferite subrețele maximale pot avea același rang. Este clar că fiecare subrețea maximală are un rang

unic, căci două subrețele nu pot fi în interacțiune, în caz contrar ele n-ar fi maximale (conform cu teorema IX din Burks și Wright [1]). Merită subliniat că dacă fiecare subrețea maximală dintr-o rețea este înlocuită cu o singură casetă cu intrări și ieșiri, rezultatul va fi o diagramă fără cicluri. Toate aceste rezultate sînt cuprinse de către următoarea teoremă de structură.

Teorema 5. O rețea în formă redusă poate fi descompusă în mod unic în una sau mai multe subrețele maximale, avînd fiecare un grad univoc determinat și un rang univoc determinat.

Încheiem acest subparagraf cu o conjectură: și anume, presupunem că pentru orice grad d există o anumită transformare ce nu poate fi realizată de nici o rețea de acest grad, cu alte cuvinte, nu există un grad maxim, astfel încît toate transformările să poată fi realizate de o rețea de acest grad. Emitem această ipoteză pe următorul temei. Să considerăm contoare cu o intrare proiectate să furnizeze o ieșire modulo m. Atunci cînd m este o putere a lui doi, putem construi un șir de contoare binare, fiecare de grad unu, fiecare acționînd asupra succesorului său, cu excepția ultimului care produce ieșirea dorită; întreaga rețea va fi de grad 1. Atunci cînd m nu este o putere a lui doi, procedeul standard de construire a contorului dorit este de a lua un contor modulo o putere a lui doi prevăzîndu-l cu un comutator atunci cînd el atinge $m - 1$ și a utiliza informația pentru a lega contorul invers cu zero. Dar o asemenea conexiune inversă produce o rețea de un grad arbitrar D. Considerentele de acest fel ne determină să credem că ipoteza propusă este adevărată.

4.2. Funcții de adevăr și cuantori

Am indicat deja (§ 2.2.) strînsa legătură dintre comutatoare și teoria funcțiilor de adevăr (calculul propozițional sau algebra booleeană). Această corespondență ne permite să atribuim variabile intrărilor comutatoarelor și să asociem fiecare ieșire a unui comutator cu o expresie care este o funcție de adevăr avînd ca argumente variabilele de intrare ale comutatorului respectiv. Putem astfel reprezenta ieșirea unui comutator ca o funcție explicită (în particular, funcție de adevăr) de intrările sale.

Este firesc să căutăm asemănări pentru rețele bine formate generale. Vom da un analog pentru rețele de grad zero, iar apoi vom discuta problema pentru rețele de grad oarecare.

Să considerăm, în primul rînd, rețele cu întîrzieri, dar fără cicluri. În acest caz, fiecare ieșire se poate exprima ca funcție explicită de intrări, recurgînd la teoria funcțiilor de adevăr îmbogățită cu operatorul de întîrziere δ. De exemplu, în fig. de mai sus $E_0 \equiv \delta A_1$. Faptul că aceasta se poate realiza întotdeauna pentru rețele fără cicluri se poate demonstra pe baza regulilor de formare (evident lăsînd la o parte regula 5); considerațiile sînt generalizări ale celor legate de conceptul de rang la Burks și Wright [1] 1361 și următoarele.

Acum menționăm două teoreme pentru rețele cu întîrzieri fără cicluri. Prima se referă la deplasarea operatorului de întîrziere prin distribuire în raport cu o conectivă logică, de exemplu:

$$\delta(A \,\&\, B) \equiv \delta A \,\&\, \delta B.$$

Pentru a demonstra aceasta formulă aplicăm definiția lui δ ambelor părți:

$$\delta\,[A(0)\ \&\ B(0)] \equiv \delta A(0)\ \&\ \delta B(0) \equiv 0,$$

$$\delta\,[A(t+1)\ \&\ B(t+1)] \equiv \delta A(t+1)\ \&\ \delta B(t+1) \equiv A(t)\ \&\ B(t).$$

Legitimitatea acestei operații rezultă din faptul că conjuncția este o funcție de adevăr pozitivă (adică are valoare zero atunci cînd toate argumentele ei au valoarea zero). În general, dacă P este o funcție de adevăr pozitivă, are loc următoarea relație:

$$\delta P(A_1,\ A_2,\ \ldots) \equiv P(\delta A_1,\ \delta A_2,\ \ldots).$$

Atît $\vee$ cît și $\not\equiv$ sînt de asemenea funcții de adevăr pozitive. Funcții de adevăr negative sînt acelea care au valoarea unu atunci cînd toate argumentele sînt zero; de exemplu $\sim$, $|$, $\downarrow$, $\equiv$, și $\supset$ sînt funcții de adevăr negative. Pentru a da principii analoge, avem aici nevoie de un operator δ', definit prin

$$\delta' A(0) \equiv 1,$$

$$\delta' A(t+1) \equiv A(t).$$

Dacă N este o funcție de adevăr negativă, atunci avem

$$\delta' N(A_1,\ A_2,\ldots) \equiv N(\delta A_1,\ \delta A_2\ \ldots).$$

Dacă funcția negativă nu este o tautologie (adică nu are valoarea „adevărat" pentru toate valorile variabilelor sale), atunci

$$\delta N(A_1,\ A_2\ldots) \equiv N(\delta^{\alpha_1} A_1,\ \delta^{\alpha_2} A_2\ldots,),$$

unde fiecare δ^{α_i} este sau δ sau δ'. De exemplu, $\delta \sim A \equiv \simeq \delta' A$.

Să remarcăm că două formule care sînt identice, abstracție făcînd de absența sau prezența semnului prim la delta, desemnează două funcții care diferă numai la început; după un anumit timp fix determinat de numărul de delta cuprinse, ele sînt echivalente. Distribuirea delta-urilor relativ la conectivele care sînt funcții de adevăr echivalează cu deplasarea tuturor elementelor de întîrziere la intrare, astfel, încît rețeaua rezultantă constă din elemente de întîrziere urmate de un comutator. Această teoremă se poate folosi adesea pentru simplificarea expresiilor și rețelelor. Să examinăm, de exemplu, o rețea care realizează $\delta(\delta A \not\equiv A) \not\equiv (\delta A \not\equiv A)$. Aplicînd teorema, obținem $(\delta\delta A \not\equiv \delta A) \not\equiv (\delta A \not\equiv A)$ care, conform cu teoria funcțiilor de adevăr, se reduce la $\delta\delta A \not\equiv A$.

A doua teoremă se referă la transformări independente de intrări. Conform unui rezultat de la § 2, fiecare asemenea transformare este periodică și deci este de formă $\widehat{\text{Ø}\,\alpha\alpha\alpha}\ldots$, unde Ø și α sînt cuvinte binare. De exemplu în 1010100100100.. Ø este 1010 iar α este 100. Spunem că lungimea în cifre a lui α este periodicitatea transformării, în ipoteza că α are o lungime minimă. În exemplul nostru, periodicitatea este trei (nu șase sau nouă etc.). A doua teoremă afirmă că clasa transformărilor independente de intrări realizată prin rețele fără cicluri este echivalentă cu clasa transformărilor periodice de perioadă unu. Nu dăm aici detaliile demonstrației. Partea esențială a ei constă în aceea că se arată că orice transformare independentă de intrări, realizată

printr-o reţea fără cicluri, este de perioadă unu, fiindcă un automat fără cicluri nu-şi poate aminti nimic decît în cursul unei perioade date de timp. Pentru a arăta că orice transformare periodică de perioadă unu se poate realiza printr-o reţea fără cicluri, se poate folosi o porţiune a construcţiei din figura alăturată teoremei XIII din Burks şi Wright [1]. Cu această construcţie putem realiza orice transformare de formă $\emptyset\ 0000\ldots$. Pentru a realiza o transformare de forma $\psi\ 1111\ldots$, legăm $\bar{\psi}\ 0000\ldots$ printr-un element de negaţie, unde $\bar{\psi}$ este complementul cifric al lui ψ.

Să considerăm acum reţelele independente de intrări, adică reţelele ale căror legături interne realizează transformări independente de intrări. Asemenea reţele pot avea cicluri. Totuşi putem exprima comportarea unei ieşiri a reţelei ca funcţie explicită de intrări, fără a folosi cuantori. Pentru aceasta ajunge să ţinem seama de momentele de timp la care legăturile sînt active. De exemplu, pentru $F(t) \equiv 1110101\ldots$, avem $F(t) \equiv [(t = 1) \vee (t = 0 \mod 2)]$. Acum putem permite ca o intrare a unei reţele neciclice să fie acţionată de o legătură independentă de intrări şi cu ajutorul unei substituţii convenabile obţinem exprimarea ieşirii ca funcţie explicită de intrări. De exemplu, dacă avem

$$C(t) \equiv A_0(t) \,\&\, \delta A_1(t),$$

putem identifica pe A_1 cu F de mai sus şi obţinem:

$$C(t) \equiv A_0(t) \,\&\, \delta\,[(t = 1) \vee (t = 0 \mod 2)] \equiv$$

$$\equiv A_0(t) \,\&\, [(t = 2) \vee \{(t > 0) \,\&\, (t \equiv 1 \mod 2)\}].$$

Putem acum să extindem teoria noastră a funcţiilor de adevăr pentru ca ea să cuprindă expresii asemănătoare cu cele pe care le-am folosit aici. Adăugînd $t = a$, $t > a$, $(t - a) \equiv c \mod b$, unde t este o variabilă iar a, b şi c sînt numere întregi, putem descrie orice funcţie periodică (evident, cu ajutorul conectivelor funcţii de adevăr). Spunem că teoria care se obţine prin adăugirea acestor simboluri şi a operatorului delta este *teoria extinsă a funcţiilor de adevăr*. Din cele discutate mai sus rezultă că are loc următoarea teoremă:

Teorema 6. Pentru orice legătură a unei reţele de grad zero, putem, în mod efectiv, să construim o formulă a teoriei extinse a funcţiilor de adevăr, care să descrie comportarea acestei legături ca funcţie explicită de comportările intrărilor ei.

Această teoremă ne oferă justificarea deciziei noastre din subparagraful precedent în ce priveşte clasificarea legăturilor independente de intrări care intervin în cicluri împreună cu legături neindependente care nu intervin în cicluri, căci amîndouă pot fi manipulate de teoria extinsă a funcţiilor de adevăr. O problemă mult mai dificilă este aceea de a găsi formule care descriu comportarea legăturilor de grad mai mare decît zero ca funcţii explicite de intrările reţelelor. Este firesc să căutăm asemenea formule în cadrul teoriei cuantorilor, care în dezvoltarea uzuală a logicii simbolice ocupă pasul imediat următor după teoria funcţiilor de adevăr.

Pe lîngă conectivele funcţiei de adevăr, teoria cuantorilor foloseşte cuantorii „(x)“ („toţi x“), „$(\exists x)$“ sau „$(\mathrm{E}x)$“ („unii x“) etc. Este evident că expresiile funcţionale din teoria reţelelor „$A(t)$“, „$B(t + 3)$“ etc. sînt funcţii propozi-

ționale sau predicate monadice (de un argument). O însușire esențială a unei rețele deterministe constă în aceea că nici o ieșire $C(t)$ nu poate depinde de intrări la momente de timp mai mari decît t; deci cuantorii utilizați trebuie să fie mărginiți (adică, cu domeniu de variație mărginit). Aceste margini se pot exprima prin predicate ca „$x < t$" și „$x \leqslant y < t$", care sînt în esență diadice (predicatul al doilea este triadic, dar poate fi ușor redus la predicate diadice). Așadar, avem nevoie de acea formă a teoriei cuantorilor care cuprinde predicatele monadice și predicate mărginite avînd domeniul de variație mulțimea numerelor întregi nenegative.

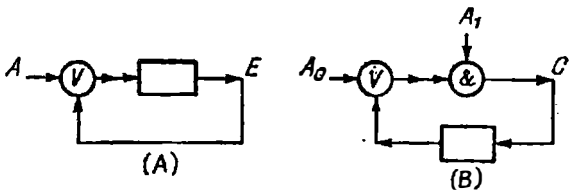


Figura_6. *Două rețele simple*

Figura A de mai sus arată o rețea ciclică foarte simplă; ea poate fi descrisă prin expresia cu cuantori mărginiți

$$E(t) \equiv (Ex) : x < t \cdot A(x), \qquad (4.2-1)$$

care afirmă că E este activă la momentul t, dacă și numai dacă A a fost activă la un moment anterior. Rețeaua ciclică întrucîtva mai complicată, arătată în fig. 6B, este descrisă de către expresia cu cuantori

$$C(t) \equiv (Ex) : : x \leqslant t \cdot A_0(x) : \cdot (y) : x < y \leqslant t \cdot \supset A_1(y), \qquad (4.2-2)$$

care afirmă că C este activă la momentul t, dacă și numai dacă există un anumit moment de timp x la care A_0 a fost activă și astfel încît în toate momentele ulterioare (inclusiv el însuși) A_1 a fost activă. Se pot da cu ușurință exemple de formule cu cuantori pentru rețele cu cicluri mult mai complicate. Rămîne deschisă problema dacă formule de acest tip se pot da pentru r.b.f. arbitrare. Trebuie să observăm că în exemplele de mai sus expresiile cu cuantori descriu ieșirea ca funcție explicită de intrări; adică numai variabilele de funcție de la dreapta sînt variabile de intrare. Aceasta aduce cu utilizarea expresiilor funcției de adevăr pentru descrierea ieșirilor unui comutator ca funcții de adevăr doar a intrărilor sale, ceea ce contrastează cu metodele recursive de descriere a comportării rețelelor utilizate anterior, metode în care ieșirea se exprima ca funcție nu numai de legăturile de intrare ale rețelei, dar și (în cazul general) de legăturile interne (din momentele de timp anterioare). În unele cazuri, o asemenea formulare recursivă este calea cea mai firească pentru specificarea comportării unui circuit ales. Pe de altă parte, adesea este mai simplu și mai direct să specificăm comportarea unei rețele utilizînd numai intrările cu ajutorul cuantorilor și a unor predicate aritmetice simple, cum ar fi „este impar" „se află între m și n" etc. De aceea este interesant să dezvoltăm o formă a teoriei cuantorilor care să faciliteze această metodă de caracterizare a unui automat și să găsim căi efective (în sensul teoretic al cuvîntului), dar care să fie și practice pentru a trece de la formulele calculului la rețelele corespunzătoare și reciproce.

Problema stabilirii unei formule cu cuantori pentru o rețea caracterizată recursiv poate fi considerată ca o problemă de convertire a unor definiții recursive în definiții explicite. După cum am remarcat la paragraful 2.2., transformarea realizată printr-o ieșire a unei întîrzieri este primitiv recursivă relativ la intrările rețelei. Din punct de vedere teoretic, am putea recurge la procedurile binecunoscute de convertire a funcțiilor primitiv recursive (a se vedea Hilbert și Bernays [17], pp. 412—421) pentru a obține rezultatul dorit. Se constată însă că această metodă conduce la expresii în care unele variabile cuantificate au ca domeniu de variație nu timpul, ci istoricul stărilor de la ieșirile întîrzierilor. Expresiile cu cuantori astfel obținute sînt de fapt mai puțin transparente decît caracterizarea recursivă corespunzătoare.

4.3. Rețele nervoase

Vom încheia acest memoriu cu cîteva observații cu privire la rețelele nervoase și ciclurile în rețele nervoase. O rețea nervoasă este un caz particular de rețea automată bine formată în care fiecare neuron constă dintr-un element comutator pozitiv care acționează un element de întîrziere. Așadar, rezultatele noastre generale se aplică și la rețelele nervoase; însă nu toate transformările realizabile prin rețele bine formate pot fi realizate prin rețele nervoase.

Conform cu teorema 2, orice transformare realizată de o r.b.f. poate fi realizată și de o rețea în formă normală decodată. Conform rezultatelor de la § 4.1, startorul unei rețele în formă normală decodată poate să fie construit fără cicluri. Așadar, putem construi o rețea în formă normală decodată ale cărei cicluri trec doar prin conjuncții și întîrzieri. Deci orice transformare realizată de o r.b.f. poate fi realizată de o r.b.f. la care numai comutatoarele pozitive apar în cicluri. O rețea de neuroni este o rețea în care în cicluri intervin numai comutatoarele pozitive. Ea diferă de o rețea în formă normală decodată în două privințe fundamentale: în primul rînd nu are un startor, iar în al doilea rînd fiecare comutator e combinat cu o întîrziere. Deci, dacă se adaugă un startor la sistemul rețelelor nervoase, fiecare transformare a unei rețele poate fi realizată de o rețea nervoasă, numai că ieșirea la rețelele nervoase va avea loc într-un moment de timp întîrziat, deoarece fiecare neuron are în interiorul său o întîrziere. De obicei, întîrzierea totală de timp poate fi redusă la doi, deoarece o expresie în formă normală disjunctivă, de exemplu $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$, este o disjuncție de conjuncții (a se vedea, de exemplu, Kleene [11] teorema 3).

Kleene [11] a cercetat oarecum detaliat logica rețelelor nervoase. El analizează rețelele utilizînd terminologia spețelor de evenimente (un eveniment este un istoric la intrare) pe care ele le pot detecta și stabilește rezultatul că un eveniment poate fi detectat de o rețea, dacă și numai dacă el este regulat (teoremele 3 și 5). Cititorul este trimis la p. 22 de la Kleene [11] pentru definiția conceptului de „eveniment regulat"; ne limităm aici să observăm că o însușire importantă a evenimentelor regulate este periodicitatea. De exemplu, o intrare de forma $\widehat{\alpha\alpha} \ldots \widehat{\alpha\emptyset}$, în care numărul alfa-urilor este nedefinit, este regulată. Este ușor să construim o rețea activă la momentul t, dacă și numai dacă istoricul intrării sale este de forma $\widehat{\alpha\alpha} \ldots \widehat{\alpha\emptyset}$, pentru un număr nedefinit de alfa-uri; a se vedea discutarea transformărilor periodice în §.4.2.

Importanța ciclurilor în analiza rețelelor automate și a rețelelor nervoase merită să fie subliniată. Atunci cînd sînt admise ciclurile, rețelele automate

devin mult mai puternice și în mod corespunzător logica necesară tratării lor devine mult mai complicată. Există diferite moduri în care rețelele pot cuprinde cicluri. Am observat că în virtutea rezultatelor lui Kleene, un aspect important al istoricului de la intrare care poate fi detectat este periodicitatea (care face parte integrantă din regularitate). Conform cu rezultatele noastre din subparagraful precedent, structura internă a unui automat poate fi descompusă prin analiză în cicluri; iar conform unor rezultate anterioare (a se vedea § 2.2), orice ieșire care este independentă de intrări este periodică și deci are un caracter ciclic. Relațiile dintre aceste diferite aspecte ciclice ale automatelor mai rămîn să fie cercetate. Ar prezenta interes o teorie care să arate legăturile dintre ele.

BIBLIOGRAFIE

[1] Arthur W. Burks și Jesse B. Wright, *Theory of Logical Nets*, în „Proc. IRE", **41**, 1953, pp. 1357—1365.

[2] Arthur W. Burks și Irving M. Copi, The Logical Design of an Idealized General-Purpose Computer, în „Jour. Franklin Inst", **261**, 1956, pp. 299—313 și pp. 421—436.

[3] Claude Shannon, *Computers and Automata*, în „Proc. IRE", **41**, 1953, pp. 1234—1241.

[4] N. Rochester, J. H. Holland, L. H. Haibt și W. L. Duda, *Tests on a Cell Assembly Theory of the Action of the Brain, Using a Large Digital Computer*, în „IRE Trans. on Information Theory", 1956, pp. 80—93.

[5] A. M. Turing, *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* în „Proc. London Math. Soc.", Seria 2, **42**, 1936—1937, pp. 230—265 cu erată, în **43**, 1937, pp. 544—546.

6] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, New York, D. Van Nostrand Company, Inc., 1952.

[7] Hao Wang, *A Variant to Turing's Theory of Computing Machines*, în „Jour. Assoc. Computing Machinery", **4**, 1957, pp. 63—92.

[8] Idem, *Universal Turing Machines, an Exercise in Coding* (inclusă aci în carte în calitate de capitol al VII-lea).

[9] John von Neumann, *The General and Logical Theory of Automata*, pp. 1—41 în cartea *Cerebral Mechanisms in Behavior*, John Wiley and Sons, 1951.

[10] John G. Kemeny, Man Viewed as a Machine, în „Scientific American", **192**, 1955, 58—67.

[11] S. C. Kleene, *Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata*, în culegerea „Automata Studies", pp. 3—41, publicată sub îngrijirea lui C. E. Shannon și a lui J. McCarthy, Princeton Univ. Press., 1956.

[12] Claude Shannon, *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*, „Trans, AIEE", **57**, 1938, pp. 713—723.

[13] Arthur W. Burks, Robert McNaughton, Carl H. Pollmar. Don W. Warren și Jesse B. Wright, *Complete Decoding Nets: General Theory and Minimality*, în „Jour. Soc. Ind. Appl Math.", **2**, 1954, pp. 201—243.

[14] J. E. De Turk, A. L. Garner, J. Kautman, A. W. Bethel și R. E. Hock, *Basic Circuitry* of the MIDAC and MIDSAC, Ann Arbor, Univ. of Mich., Press, 1954.

[15] D. A. Buck, *The Cryotron — a Superconductive Computer Component*, în „Proc. IRE' **44**, 1956, pp. 482—493.

[16] Edward F. Moore, *Gedanken-experiments on sequential machines*, în culegerea „Automata Studies", pp. 129—153.

[17] D. Hilbert și P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I, Berlin, Springer, 1934.

CAPITOLUL IX
CĂTRE O MATEMATICĂ MECANICĂ[1]

CROITORAŞUL CEL VITEAZ:
ŞAPTE (MUŞTE) DINTR-O LOVITURĂ
IBM. 704: 220 TEOREME
(DIN CALCULUL PROPOZIŢIONAL) ÎN 3 MIN.

Se descriu rezultatele unei încercări destul de reuşite de a demonstra toate teoremele, în număr de aproape 400, din *Principia Mathematica* care ţin strict de domeniul logicii, adică al calculului (restrîns) al predicatelor cu egalitate. Se examinează cîteva alte probleme de acelaşi tip. Se sugerează că s-a copt timpul pentru o nouă ramură a logicii aplicate care s-ar putea chema analiză „inferenţială" şi care se ocupă de demonstraţii aşa cum analiza numerică se ocupă de calcule. Credem că într-un viitor nu prea îndepărtat această disciplină ne va ajuta să demonstrăm, cu ajutorul maşinii, teoreme noi şi dificile. O sarcină preliminară, mai uşoară, este utilizarea maşinilor pentru formalizarea demonstraţiilor teoremelor cunoscute. Credem că această direcţie poate, de asemenea, că conducă la o verificare mecanică a rezultatelor matematice noi care să fie comparabilă cu punerea în funcţiune a unui program.

§ 1. INTRODUCERE

Dacă comparăm calculul cu demonstraţia, ne sar în ochi patru deosebiri. (1) Calculele au de-a face cu numerele, pe cînd demonstraţiile au de-a face cu propoziţii. (2) În general, regulile de calcul sînt mai exacte decît regulile de demonstrare. (3) Procedurile de calcul sînt de obicei terminabile (decidabile, recursive) sau pot fi făcute astfel cu ajutorul unor metode de aproximare bine elaborate; în schimb, procedurile de demonstraţie sînt adesea neterminabile (nedecidabile sau nerecursive, deşi recursiv numerabile), în adevăr incomplete în cazul teoriei numerelor sau al teoriei mulţimilor, şi nu avem vreo concepţie clară asupra unor metode de aproximare în procesul de demonstrare a teoremelor. (4) Procedurile de calcul sînt destul de eficiente, pe cînd în ce priveşte demonstraţiile se întîmplă adesea că, chiar dacă teoria este decidabilă, metoda de decizie nu se poate realiza în practică; dacă în calcule sărirea detaliilor constituie o excepţie, ea pare, în schimb, să fie o regulă în demonstraţii, în măsura în care aci se folosesc intuiţia, „viziunea", experienţa, precum şi alte principii vagi, greu reproductibile. Deoarece procedurile de demonstraţie sînt atît de complexe sau lungi, pur şi simplu nu le putem face faţă dacă în fiecare caz particular nu percepem (descoperim) anumite legături specifice.

[1] Acest capitol a apărut în „IBM Journal for Research and Development" vol. 4, 1960.

Fără îndoială că aceste deosebiri i-au descurajat pe mulți oameni de știință, silindu-i să renunțe la încercarea de a mecaniza porțiuni semnificative din activitatea de cercetare matematică. Autorul însă consideră că natura și amploarea dificultăților au fost prezentate eronat din cauza unor speculații necontrolate și au fost exagerate din cauza subaprecierii posibilităților de a îmbina logica matematică cu mașinile de calcul.

Dintre cele patru deosebiri, prima se lămurește fie citind reprezentările Gödel ale expresiilor, fie amintind faptul familiar că informația dată cu ajutorul literelor poate fi minuită de către mașinile numerice (digitale). A doua deosebire a fost înlăturată în mare măsură în urma rezultatelor care s-au obținut de către logica matematică în domeniul formalizării în ultimii 80 de ani. Deosebirea a treia nu este esențială atunci cînd se pune problema demonstrării teoremelor cu ajutorul mașinii. Aici prezintă importanță nu posibilitatea teoretică, ci realizabilitatea practică. Adesea unele probleme particulare dintr-un domeniu nedecidabil se rezolvă mai ușor decît anumite probleme dintr-un domeniu decidabil, chiar cu ajutorul mașinii. Nu putem aborda rezolvarea problemelor dintr-un domeniu, indiferent dacă el este decidabil sau nu, dacă, așa cum este cazul de obicei, domeniul cuprinde o infinitate de cazuri particulare. În afară de aceasta, deocamdată încă nu ne este suficient de clar cît de mari sînt subdomeniile decidabile din cutare sau cutare domeniu nedecidabil (de exemplu, calculul predicatelor). Mai mult, chiar într-un cadru nedecidabil, problema de a găsi o demonstrație pentru o propoziție cunoscută ca o teoremă sau de a formaliza o schemă într-o demonstrație detaliată este teoretic decidabilă. Dificultățile care provin din incompletitudinea descoperită de Gödel sînt chiar mai puțin relevante pentru asemenea probleme. Aici scopul este cel mult de a demonstra teoremele matematice de felul obișnuit, de exemplu, ca cele ce se pot găsi în tratatele de teoria numerelor, deși încă nu s-a găsit o singură teoremă „elementară" din teoria numerelor care să nu fie demonstrabilă în cadrul axiomatizării curente a teoriei numerelor. Conceptul de demonstrație aproximativă, care fără îndoială este de altă natură decît aproximațiile din calculele numerice, nu este inapt de o formulare mai exactă în termenii căreia s-ar putea, să zicem, să se treacă treptat de la o schiță la o demonstrație corectă.

Poate că cea mai profundă este a patra deosebire. Totuși gradul complexității problemei poate să fie ușor exagerat, în parte pentru că aprecierile abstracte sînt destul de depărtate de realitate și în parte pentru că problema alegerii celor mai efective proceduri dintre toate cele posibile nu s-a bucurat pînă acum de suficientă atenție. În cele ce urmează vom ilustra cele două cauze ale exagerării. Problema de a introduce în mașină intuiția și experiența este destul de delicată. Deocamdată este suficient să spunem totuși că multe din strategiile noastre de bază pe care le utilizăm atunci cînd căutăm demonstrația sînt mecanizabile, deși nu ne-am dat seama de aceasta, deoarece era greu să ne lămurim în asemenea chestiuni cît timp n-am avut la dispoziție mașini de mare viteză. De fapt, abia acum a apărut necesitatea de a elabora metode care să permită răscumpărarea originalității cu prețul unei munci dificile, deoarece abia acum dispunem de sclavi care sînt atît de stăruitori și harnici. În domeniile mai avansate ale matematicii, încercările de a crea mașini în stare să imite în întregime omul nu par a avea șanse de succes. Însă acest lucru nu trebuie să ne descurajeze, ci, dimpotrivă, trebuie să fie pentru noi

un impuls pentru experimentare în ce privește mașinizarea matematicii. Incapacitatea omului de a acționa atunci cînd are de-a face cu o masă de amănunte impune restricții principiale atît în ce privește ceea ce s-a făcut în matematică, cît și în ce privește felul în care s-a făcut. Superioritatea mașinii asupra omului în această privință ne dă speranța posibilității ca mașinile, deși urmînd în mare drumurile trasate de om, să poată totuși obține rezultate noi și surprinzătoare, alegînd asemenea variante pe care omul nu obișnuiește să le aleagă.

De aceea credem că domeniul analizei algoritmice în ansamblu poate fi îmbogățit prin includerea în el a analizei inferențiale, ca asociat mai tînăr al analizei numerice atît de trainic stabilizate, dar aflată încă în dezvoltare rapidă.

Autorul a început să studieze aceste posibilități în anul 1953, cînd a venit pentru prima oară în contact cu mașinile de calcul. Aceste considerente vagi au fost apoi utilizate în memoriul cu privire la mașinile Turing [1]. Fără îndoială că mulți s-au gîndit la asemenea chestiuni. După cîte știe autorul, în acest domeniu intră în măsură mai mare sau mai mică lucrările următorilor autori: Burks-Warren-Wright [2], Collins [3], Davis [4], Newell-Shaw-Simon, Gelernter [5]. Dintre acestea cele mai amănunțite și cele mai binecunoscute sînt probabil lucrările lui Newell-Shaw-Simon, pe care ei le-au expus într-un șir de comunicări și articole [6], începînd din anul 1956. Lucrările lor sînt de asemenea în cea mai strînsă legătură cu rezultatelc pe care le comunică memoriul de față. De aceea, este cazul să indicăm deosebirile principale în ce privește modul de abordare a problemei, precum și rezultatele prin care i-am depășit pe acești autori.

Ei comunică [7] că programul lor LT pentru mașina JOHNNIAC avea sarcina de a demonstra primele 52 de teoreme din *Principia Mathematica* a lui Whitehead și Russell: „dintre cele 52 de teoreme, am găsit demonstrații pentru un total de 38... În 14 cazuri LT n-a reușit să găsească o demonstrație. O mare parte dintre aceste încercări nereușite au fost întrerupte din cauza restricțiilor de timp sau loc. Una dintre aceste 14 teoreme știm că LT n-o poate demonstra, iar alta considerăm că n-o poate". Ei dau de asemenea ca exemple faptul că o demonstrație pentru *2.45 s-a găsit în 12 min, iar comunicarea despre nepriceperea de a demonstra *2.31 a sosit după 23 minute.

Vara trecută (1958), autorul a alcătuit trei programe pentru IBM 704. Primul program furnizează o procedură de decizie și demonstrație pentru calculul propozițional, care tipărește demonstrația sau respingerea, după cum propoziția respectivă este sau nu este teoremă. Am stabilit că întreaga listă a teoremelor din primele cinci capitole din *Principia Mathematica* (peste 200 de teoreme) a fost demonstrată în aproximativ 37 min, în cursul cărora 12/13 din timp s-a utilizat pentru citirea și tipărirea rezultatelor, astfel încît timpul utilizat pentru demonstrația propriu-zisă a peste 200 de teoreme a fost de fapt mai mic de 3 min. Cele 52 de teoreme alese de către Newell-Shaw-Simon sînt printre cele mai ușoare și au fost demonstrate în mai puțin de 5 min (adică mai puțin de o jumătate minut dacă nu ținem seama de timpul de intrare și ieșire). În particular, *2.45 s-a demonstrat în vreo 3 s, iar *2.31 în aproximativ 6 s. Demonstrațiile pentru aceste două teoreme, precum și unele demonstrații mai complicate se reproduc în apendicele I exact așa cum au fost imprimate de mașini.

Două alte programe se ocupă cu probleme pe care Newell-Shaw-Simon nu le-au examinat în lucrările lor publicate. Programul al doilea instruieşte maşina să formeze ea singură propoziţii din calculul propoziţional pe baza simbolurilor fundamentale şi să selecteze teoreme nebanale. Viteza a fost astfel, încît peste 14 000 de propoziţii au fost formulate şi testate într-o oră, iar pe bandă au apărut aproximativ o mie de teoreme. Rezultatul a fost descurajator în măsura în care prea puţine teoreme au fost excluse ca banale, deoarece principiile de banalitate pe care le-am inclus în program erau prea slabe.

Al treilea program a fost conceput ca o parte a unui program mai larg pentru întregul calcul al predicatelor cu egalitate, program pe care autorul nu l-a putut desăvîrşi în cursul verii din cauza lipsei de timp. Calculul predicatelor cu egalitate ocupă următoarele cinci capitole din *Principia Mathematica*, avînd un total de peste 150 de teoreme. Al treilea program, aşa cum se prezintă el acum, poate să găsească şi să tipărească demonstraţiile pentru aproximativ 85% dintre aceste teoreme în curs de aproximativ un ceas. Autorul consideră că, cu unele modificări uşoare, programul ar putea permite maşinii să demonstreze toate aceste teoreme cam în 80 min. Programul complet, aşa cum este considerat, va fi necesar numai atunci cînd vom aborda propoziţiile calculului predicatelor mai greu de demonstrat sau de respins decît acelea pe care le examinează această parte din *Principia Mathematica.*

Desigur că s-ar putea obiecta că comparaţia cu programul Newell-Shaw-Simon nu este justă, deoarece abordările sînt radical diferite. Autorul îşi dă seama de aceasta, dar continuă totuşi să considere că această comparaţie indică caracterul fundamental nesatisfăcător al abordării lor. Nu e nevoie să tragi cu tunul într-o vrabie. Or, impresia finală este că Newell-Shaw-Simon n-au reuşit să lovească cu tunul nici măcar o vrabie. Ei [8] nu vor să utilizeze algoritmii standard, cum ar fi metoda tabelelor de adevăr, deoarece „aceste proceduri nu dau o demonstraţie în sensul lui Whitehead şi Russell. Se pot inventa proceduri „automatice" pentru a obţine demonstraţii şi noi vom examina pe scurt una dintre ele, dar se constată că pentru a demonstra teorema *2.45 timpul necesar ar fi de ordinul miilor de ani". Este însă greu de văzut de ce demonstraţia *2.45, obţinută prin metode pe care le voi descrie în acest memoriu, este mai puţin acceptabilă ca demonstraţie, deşi timpul necesar pentru producerea ei cu acest algoritm este mai mic decît un sfert de secundă. Nu pare rezonabil să se justifice superioritatea metodelor „euristice" asupra celor algoritmice, prin alegerea unui algoritm deosebit de neeficient.

Cuvîntul „euristică" poate fi considerat ca sinonim cu „arta descoperirii", dar adesea el desemnează numai o metodă particulară care nu oferă garanţii pentru rezolvarea generală a problemei date. Această ambiguitate acordă cuvîntului o anumită semnificaţie emotivă, care poate să inducă în eroare în ce priveşte cercetările ştiinţifice ulterioare. Cuvîntul familiar şi mai puţin inspirat de „strategie" pare mai convenabil.

Deşi multe considerente ale lui Newell-Shaw-Simon sînt foarte sugestive, autorul este înclinat să prefere evitarea considerentelor ipotetice atunci cînd acest lucru este posibil. Deşi s-ar putea ilustra în ce măsură sînt mai eficiente anumite strategii particulare atunci cînd algoritmul general este foarte complicat, deocamdată pare convenabil să amînăm asemenea examinări, pînă ce vom da de un caz mai natural, cînd nu avem un algoritm general sau nu

avem un algoritm general eficient, aşa, de exemplu, ca în calculul predicatelor sau în teoria numerelor. Întrucît problema principală constă în a verifica în ce măsură o procedură particulară dă posibilitatea de a demonstra o teoremă cu ajutorul maşinii, pare preferabil să acordăm un efort mai mare alegerii metodelor mai eficiente decît să proclamăm locuri comune mai mult sau mai puţin familiare. Se pare că necesitatea de a ne sprijini pe logica matematică este inevitabilă, deoarece logica matematică este tot atît de esenţială în acest domeniu cum este analiza numerică pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii numerice cu multe ecuaţii.

Metodele logice utilizate în acest memoriu urmează, în mare, direcţia de construire a formalismelor eliberate de „tăieturi" pentru calculul predicatelor, direcţie iniţiată de Herbrand [9] şi Gentzen [10]. Am folosit de asemenea diferite idei din Hilbert-Bernays [11], Dreben [12], Beth [13], Hintikka [14], Schütte [15] şi mulţi alţii, precum şi unele metode standard de decizie pentru subdomenii ale calculului predicatelor prezentate de Church [16] şi Quine [17]. Formulările particulare pe care le-am utilizat de fapt par să conţină numai un număr mic de trăsături noi neesenţiale care uşurează utilizarea maşinilor. În linii mari, se poate spune că dăm o procedură de demonstraţie completă pentru calculul predicatelor cu egalitate care devine o procedură de decizie şi demonstraţie atunci cînd propoziţia care urmează să fie confirmată sau infirmată intră în domeniul calculului propoziţional sau în domeniul „calculului predicatelor AE" (adică mulţimea propoziţiilor care pot fi aduse într-o formă cînd nici un cuantor existenţial nu stă în faţa vreunui cuantor universal) care include ca subdomeniu calculul predicatelor cu un loc (monadice).

Varianta calculului predicatelor prezentată de Herbrand şi Gentzen ne permite să renunţăm la orice „Umweg" (tăietură sau *modus ponens*), astfel încît obţinem un calcul liber de tăietură în care, ca să zicem aşa, în toate demonstraţiile nici un pas nu este mai complicat decît conluzia. Aceasta sugerează în mod natural că, fiind dată o formulă în calculul predicatelor, putem examina toate formulele mai puţin complexe şi să decidem care dintre ele este demonstrabilă. Motivul pentru care aceasta nu ne furnizează o procedură de decizie pentru întregul calcul al predicatelor este regula de contracţie care ne permite să ne eliberăm de repetarea uneia şi aceleiaşi formule. Rezultatul este că, în unele cazuri, căutarea demonstraţiei sau respingerii suferă un eşec, deoarece nu putem să obţinem demonstraţii independent de repetările pe care le-am introdus. În asemenea cazuri, procedura nu poate să se încheie niciodată, deşi în nici o etapă finită nu ştim acest lucru. Deşi această situaţie nu exclude completitudinea, ea exclude însă posibilitatea unei proceduri de decizie.

Or, dacă ne interesează subdomeniile decidabile în calculul predicatelor, ele pot fi de obicei reformulate în mod convenabil, astfel încît regula de contracţie să nu mai intervină. Un caz deosebit de simplu este calculul propoziţional. Aici putem da un sistem simplu, care este atît o procedură completă de demonstraţie, cît şi o procedură completă de decizie. Completitudinea acestui sistem se demonstrează foarte uşor, iar ca procedură de decizie, el este superior procedurilor obişnuite, prezentînd avantajul că dacă propoziţia testată este demonstrată, atunci testarea ei furnizează de îndată demonstraţia. Această procedură este codată prin programul I. Mai departe, putem extinde sistemul pentru calculul propoziţional, astfel încît să obţinem o procedură

de decizie și demonstrație pentru porțiunea *AE* a calculului predicatelor, procedură care are o însușire remarcabilă: căutînd o demonstrație pentru o propoziție dată în forma „miniscopică", nu avem niciodată nevoie să introducem vreo premisă care să fie mai lungă decît concluzia respectivă. Această procedură este codată prin programul III.

O descoperire destul de surprinzătoare care are aerul de a indica ignoranța noastră generală în ce privește volumul fragmentelor decidabile este absența vreunei teoreme din calculul predicatelor din *Principia* care să nu intre în cadrul subdomeniului decidabil *AE*. Mai exact, există o procedură sistematică de separare a variabilelor, care permite să aducem propozițiile în formă „miniscopică" (termenul va fi explicat mai jos). Odată realizată aceasta (ceea ce pentru aceste teoreme particulare se face ușor, fie manual, fie cu ajutorul mașinii), orice teoremă din calculul predicatelor din cele date în *Principia* poate fi demonstrată prin programul III, care este atît de simplu.

Inițial, preocuparea autorului era de a formaliza demonstrația în domenii mai dezvoltate, cum ar fi teoria numerelor sau calculul diferențial. Dar în curînd deveni clar că pentru asemenea țeluri este necesară, în prealabil, o mecanizare foarte bine pusă la punct a logicii subiacente. În prezent, aceasta aproape că s-a făcut și autorul va examina, în partea de încheiere a acestui memoriu, posibilitățile pe care le consideră nu prea depărtate de realizare.

§ 2. CALCULUL PROPOZIȚIONAL (SISTEMUL P)

Deoarece ne interesează realizabilitatea în practică este preferabil să folosim de la început mai multe conective logice, dacă dorim, în adevăr, să aplicăm procedura la cazuri concrete. În acest scop, utilizăm cele cinci constante logice uzuale: $\sim$ (nu), & (conjuncție), $\vee$ (disjuncție), $\supset$ (implicație), $\equiv$ (echivalența), cu interpretările lor uzuale.

O literă propozițională P, Q, R, M, N etc. este o formulă (și anume, „o formulă atomică"). Dacă φ, ψ sînt formule, atunci $\sim \varphi$, $\varphi \& \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \supset \psi$, $\varphi \equiv \psi$ sînt formule. Dacă π, ρ sînt lanțuri de formule (în particular, fiecare dintre ele poate fi un lanț vid sau constînd dintr-o singură formulă) și dacă φ este o formulă, atunci π, φ, ρ este un lanț iar $\pi \to \rho$ este o secvență care, intuitiv vorbind, este adevărată, dacă și numai dacă cel puțin una dintre formulele lanțului π („antecedentele" secvenței) este falsă sau cel puțin o formulă a lanțului ρ („consecventul" secvenței) este adevărată, adică conjuncția tuturor formulelor din antecedent implică disjuncția tuturor formulelor din consecvent.

Regulile de derivare sînt în număr de unsprezece. O primă regulă stabilește că o secvență care cuprinde numai formule atomice (litere propoziționale) este teoremă, dacă și numai dacă cel puțin o formulă apare de ambele părți ale săgeții. Pentru fiecare dintre cele cinci funcții de adevăr avem două reguli: una de introducere a funcției respective în antecedent și una de introducere a ei în consecvent. Pentru a ne convinge că aceste reguli sînt corecte, este suficient să recurgem la semnificația intuitivă a funcțiilor de adevăr și a semnului săgeată. Mai tîrziu vom da o demonstrație a completitudinii acestei reguli, adică vom demonstra că toate secvențele care sînt intuitiv valide pot

fi astfel demonstrate, precum şi o demonstraţie de consistenţă, adică a faptului că toate secvenţele demonstrabile sînt intuitiv valide.

P 1. Regula iniţială: dacă λ, ζ sînt lanţuri de formule atomice, atunci $\lambda \rightarrow \zeta$ este teoremă, dacă o anumită formulă atomică apare de ambele părţi ale săgeţii.

În următoarele zece reguli λ şi ζ sînt totdeauna lanţuri (eventual vide) de formule atomice.

*P*2a. Regula $\rightarrow \sim$: Dacă $\Phi, \zeta \rightarrow \lambda, \rho$, atunci $\zeta \rightarrow \lambda, \sim \Phi, \rho$.

*P*2b. Regula $\sim \rightarrow$: Dacă $\lambda, \rho \rightarrow \pi, \Phi$, atunci $\lambda, \sim \varphi, \rho \rightarrow \pi$.

*P*3a. Regula $\sim \&$: Dacă $\zeta \rightarrow \lambda, \varphi, \rho$ şi $\zeta \rightarrow \lambda, \psi, \rho$ atunci $\zeta \rightarrow \lambda, \varphi \,\&\, \psi, \rho$.

*P*3b. Regula $\& \rightarrow$: Dacă $\lambda, \varphi, \psi, \rho \rightarrow \pi$, atunci $\lambda, \varphi \,\&\, \psi, \rho \rightarrow \pi$.

*P*4a. Regula $\rightarrow \vee$: Dacă $\zeta \rightarrow \lambda, \varphi, \psi, \rho$, atunci $\zeta \rightarrow \lambda, \varphi \vee \psi, \rho$.

*P*4b. Regula $\vee \rightarrow$: Dacă $\lambda, \varphi, \rho \rightarrow \pi$ şi dacă $\lambda, \psi, \rho \rightarrow \pi$ atunci $\lambda, \varphi \vee \psi, \rho \rightarrow \pi$.

*P*5a. Regula $\rightarrow \supset$: Dacă $\zeta, \varphi \rightarrow \lambda, \psi, \rho$, atunci $\zeta \rightarrow \lambda, \varphi \supset \psi, \rho$.

*P*5b. Regula $\supset \rightarrow$: Dacă $\lambda, \psi, \rho \rightarrow \pi$ şi dacă $\lambda, \rho \rightarrow \pi, \varphi$, atunci $\lambda, \varphi \supset \psi, \rho \rightarrow \pi$.

*P*6a. Regula $\equiv \rightarrow$: Dacă $\varphi, \zeta \rightarrow \lambda, \psi, \rho$ şi dacă $\psi, \zeta \rightarrow \lambda, \Phi, \rho$ atunci $\zeta \rightarrow \lambda, \Phi \equiv \psi, \rho$.

*P*6b. Regula $\equiv \rightarrow$: Dacă $\varphi, \psi, \lambda, \rho \rightarrow \pi$ şi dacă $\lambda, \varphi \rightarrow \pi, \varphi, \psi$, atunci $\lambda, \varphi \equiv \psi, \rho \rightarrow \pi$.

Ca şi în procedurile demonstrative uzuale, fiecare demonstraţie începe cu un număr finit de cazuri din *P*1 şi continuă cu consecinţe succesive, obţinute cu ajutorul celorlalte reguli. După cum se va explica mai jos, o demonstraţie seamănă cu structura unui copac care creşte într-o direcţie greşită. Pe noi însă ne interesează mai ales să urmărim paşii înapoi, deoarece ei realizează procesul de căutare a demonstraţiei.

Regulile sînt indicate astfel încît, fiind dată o secvenţă, putem găsi prima conectivă logică, adică simbolul cel mai stîng din întreaga secvenţă care este o conectivă şi să aplicăm regula convenabilă pentru eliminarea sa, rezultatul fiind o premisă sau două care, luate împreună, sînt echivalente cu concluzia. Procesul poate fi repetat pînă obţinem un şir finit de secvenţe, în care intră numai formule atomice. Fiecare secvenţă eliberată de conective poate apoi să fie testată dacă este sau nu o teoremă cu ajutorul regulii iniţiale. Dacă toate aceste secvenţe sînt teoreme, atunci secvenţa iniţială este o teoremă şi obţinem demonstraţia ei; în caz contrar, am dat de un contraexemplu şi deci avem o respingere. Cîteva exemple simple vor lămuri toate acestea.

De exemplu, fiind dată o teoremă din *Principia*, putem în mod automat s-o prefixăm cu o săgeată şi să aplicăm regulile pentru a căuta demonstraţia. Dacă conectiva principală este $\supset$ atunci este mai uşor, deşi nu este

necesar, să înlocuim conectiva principală cu o săgeată şi să continuăm. De exemplu:

*2.45. $\vdash : \sim (P \vee Q) \cdot \supset \sim P$,

*5.21. $\vdash : \sim P \,\&\, \sim Q \cdot \supset \cdot P \equiv Q$

se poate rescrie după cum urmează:

*2.45. $\sim (P \vee Q) \rightarrow \sim P$ (1)

(1) $\rightarrow \sim P,\ P \vee Q$ (2)

(2) $P \rightarrow P \vee Q$ (3)

(3) $P \rightarrow P,\ Q$

VALID

Q.E.D.

*5.21. $\rightarrow \sim P \,\&\, \sim Q \cdot \supset \cdot P \equiv Q$ (1)

(1) $\sim P \,\&\, \sim Q \rightarrow P \equiv Q$ (2)

(2) $\sim P,\ \sim Q \rightarrow P \equiv Q$ (3)

(3) $\sim Q \rightarrow P \equiv Q,\ P$ (4)

(4) $\rightarrow P \equiv Q,\ P,\ Q$ (5)

(5) $P \rightarrow Q,\ P,\ Q$

VALID

(5) $Q \rightarrow P,\ P,\ Q$

VALID

Q.E.D.

Aceste demonstraţii sînt autoexplicative. În fond, ele sînt aceleaşi ca şi cele tipărite de către maşină, cu excepţia unor schimbări de notaţii în vederea unei codări mai uşoare şi pentru evitarea simbolurilor de care nu dispune tiparul maşinii. Se recomandă cititorului să citească paragraful următor care explică aceste schimbări şi să compare apoi cu exemplele tipărite, reproduse în număr mai mare, în apendicele I. Sper că aceste exemple concrete vor fi de mare ajutor pentru înţelegerea producerii în caz că cititorul nu este familiarizat cu logica matematică.

§ 3. PROGRAMUL I: CALCULUL PROPOZIŢIONAL P

În acest program sînt necesare foarte puţine lămuriri. Pentru a rezerva punctul în vederea altor întrebuinţări şi pentru a separa numărul de ordine de rest, vom scrie, de exemplu,

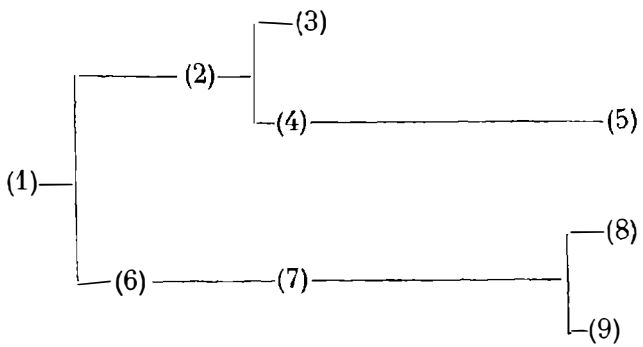
2*45/ în loc de *2.45.

În ce privește celelalte simboluri, folosim următorul dicționar:

—	$\rightarrow$
B	$\equiv$
C	&
D	$\vee$
F	$\sim$
I	$\supset$

În plus, utilizăm notația poloneză modificată scriind, de exemplu, $CFP \cdot FQ$ în loc de $\sim P \,\&\, \sim Q$. Așezînd conectiva în fruntea formulei, putem s-o căutăm mai ușor. Utilizarea punctelor pentru grupări ușurează operația de determinare a celor două porțiuni guvernate de o conectivă binară. Cititorul nu va întîmpina dificultăți în memorizarea acestor schimbări de notații dacă va compara exemplele $*2 \cdot 45$ și $*5 \cdot 21$ cu demonstrațiile corespunzătoare în noua notație, așa cum sînt date în apendicele I.

În exemplele mai lungi din apendicele I, cititorul va observa că numerele sin dreapta servesc pentru identificarea rîndurilor, în timp ce numerele din dtînga servesc pentru identificarea concluziilor ale căror premise sînt rîndurile numerotate. În fond, fiecare asemenea demonstrație este o structură de tipul arbore. Deoarece trebuie să aranjăm rîndurile într-o ordine unidimensională, putem să alegem între diferite aranjări posibile. Care anume am ales-o se poate vedea din exemplul 4 *45 din apendicele I. Structura de arbore corespunzătoare ar fi:



Iar aranjamentul liniar pe care-l utilizăm este următorul:

(1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (1, 6), (6, 7), (7, 8), (7, 9).

Întregul program are aproape 1000 rînduri. Lungimea secvențelor testabile este limitată în mod arbitrar la 72 simboluri, astfel încît fiecare secvență poate fi reprezentată printr-o singură cartelă perforată. Deși această restricție poate fi înlăturată, totuși ea ușurează considerabil codarea și mărește mult posibilitățile de mînuire ale problemelor care ni se pun. De altfel, de exemplu, cea mai lungă dintre teoremele calculului propozițional dintre cele date în *Prin-*

cipia, 5*24, are numai 36 simboluri. Cînd se introduce cartela perforată, programul constrînge maşina să procedeze după cum urmează.

Copiază cartela în porţiunea rezervată a memoriei, de la COL1 la COL72, cu totul 72 de adrese, în notaţia standard *BCD*, adică în modul convenţional de reprezentare a simbolurilor cu numere, cîte un simbol în fiecare adresă. Înscrie numărul 1 din ultima adresă, adică COL72. Caută semnul săgeată. Dacă acest semn nu intervine, atunci rîndul respectiv îl consideră ca proză obişnuită, tipărită fără comentarii, iar maşina trece la cercetarea cartelei următoare. În cazul particular, cînd cartela este goală, maşina se opreşte. Dacă semnul săgeată intervine, atunci maşina marchează toate simbolurile dinainte de semnul săgeată ca negative şi începe să caute prima conectivă logică. După cum această conectivă este *F*, *C*, *D*, *I* sau *B*, maşina se adresează către regulile *RTNF*, *RTNC*, *RTND*, *RTNI* sau *RTNB*. În fiecare caz în parte se aplică regula convenabilă, după cum conectiva este în faţa săgeţii sau în urma ei.

După COL1 pînă la COL72, 144 de adrese se rezervă pentru a obţine o premisă sau două. Îndată ce se găsesc premisele, rîndul iniţial este tipărit, iar prima premisă este deplasată în celulele COL1—COL72 şi furnizează numărul următor pentru identificarea ei. Dacă există şi o a doua premisă, ea trebuie să fie deplasată în porţiunea de rezervă a memoriei şi să-şi aştepte rîndul. Cînd rîndul care ocupă celulele COL1—COL72 nu mai conţine conective logice, maşina trece la operaţia de comparare, pentru a determina dacă există o formulă care apare de ambele părţi ale săgeţii şi tipăreşte rîndul împreună cu rezultatul: VALID sau NOT VALID. Apoi, ea trece la considerarea porţiunii de rezervă, pentru a vedea dacă mai sînt acolo premise. Dacă da, atunci ea mişcă prima linie în celulele COL1—COL72 şi deplasează rîndurile rămase din porţiunea de rezervă în locul eliberat. Dacă nu, atunci ea conchide, după cum toate secvenţele finale sînt valide sau nu, că secvenţa iniţială este o teoremă (Q.E.D.) sau nu (NOT VALID). Dacă secvenţa iniţială nu este o teoremă, atunci conjuncţia tuturor secvenţelor nevalide lipsite de conective conduce la forma normală conjunctivă a secvenţei iniţiale.

Diferite alternative devin posibile cu ajutorul unor comutatoare convenabile. Dacă problema constă în a determina doar dacă secvenţa dată este teoremă, atunci este firesc să ne oprim îndată ce s-a găsit o secvenţă fără conective nevalidă. Aceasta şi este procedura normală a programului. O altă alegere permisă ar fi de a omite demonstraţiile sau respingerile, tipărind doar răspunsul final. O a treia alegere posibilă este de a da rezultatul numai pe cartele perforate, fără a mai tipări. Posibilitatea de a omite demonstraţia sau respingerea ne permite să separăm timpul de calcul de timpul necesar pentru intrare şi ieşire.

Deşi programul este suficient de rapid pentru testarea propoziţiilor pe care le întîlnim de obicei, el nu reprezintă procedura cea mai eficientă pentru testarea propoziţiilor mai complicate. Dacă urmărim să găsim o procedură de verificare rapidă exact pentru calculul propoziţional fără a obţine simultan o procedură de demonstraţie care să poată fi combinată în mod natural cu demonstraţiile din domeniile mai elaborate, apoi e posibil să găsim metode mult mai eficiente. De exemplu, B. Dunham, R. Fridshal şi G. Sward au dat o metodă pe care o codează acum.

Pe de altă parte, volumul necesar de memorie nu este mare. Nu numai că fiecare teoremă se demonstrează pe un loc gol, astfel încît teoremele anterioare nu trebuie să fie păstrate în memorie, dar şi în fiecare demonstraţie în parte nu trebuie să reţinem toate rîndurile intermediare. De fapt, în fiecare moment de timp dat maşina trebuie să păstreze în memorie cel mult un rînd din fiecare nivel al demonstraţiei — arbore.

Acesta se poate lămuri prin următorul exemplu:

$$6*6/-BBBBBQR.P..BQR...BBPQ..BP.BQR...BP..BQ.BQR.$$

În această teoremă avem 13 intrări ale lui B („dacă şi numai dacă"). Deoarece fiecare eliminare a lui B dă două ramuri noi, demonstraţia completă are $2^{14}-1$ rînduri (aproximativ 16000). Însă maşina n-are nevoie să păstreze în porţiunea de rezervă a memoriei mai mult decît 13 rînduri dintr-o dată. Dacă folosim o singură adresă pentru fiecare simbol, avem nevoie de 72×13 adrese; dacă completăm toate celulele libere, avem nevoie doar de 12×13 adrese, adică un număr foarte mic pentru o demonstraţie atît de lungă. Întîmplător, lungimea demonstraţiei ilustrează cît de neeficientă poate fi procedura pentru anumite propoziţii lungi. În timp ce complicaţia testului uzual cu ajutorul tabelelor de adevăr este determinată de numărul m al literelor propoziţionale distincte (tabelul conţine 2^m linii) şi de numărul n de subformule distincte (tabelul are n coloane), lungimea demonstraţiei în abordarea noastră este determinată prin numărul k al apariţiilor conectivelor propoziţionale, adică $2^{k+1}-1$ rînduri sau mai puţine, deoarece în multe cazuri o concluzie are doar o singură premisă în loc de două.

După calculul nostru, timpul necesar pentru demonstrarea teoremei de mai sus, dacă se tipăresc toate rîndurile demonstraţiei ar fi de aproximativ 5 ore (din cele 16 000 rînduri s-au tipărit 2500 în aproximativ 48 min.). Pe de altă parte, dacă demonstraţia nu se tipăreşte, maşina are nevoie de mai puţin de 30 min pentru a furniza răspunsul. Aşadar, aproape 12/13 din timp se consumă pentru citire şi tipărire. Deoarece în abordarea noastră nu se utilizează axiomele şi definiţiile, ele sînt considerate ca teoreme care trebuie să fie demonstrate, aşa încît din primele cinci capitole din *Principia* ajungem la aproape 220 de teoreme. Ele au fost demonstrate toate în aproximativ 37 min. Dacă se tipăresc doar teoremele şi răspunsurile (adică Q.E.D.), atunci sînt necesare 8 min. Timpul necesar pentru calculul propriu-zis, adică fără a lua în considerare timpul de intrare şi ieşire, este mai puţin de 3 min.

§ 4. PROGRAMUL II: SELECŢIONAREA TEOREMELOR ÎN CALCULUL PROPOZIŢIONAL

Se pune în mod firesc întrebarea următoare: dacă maşina poate demonstra teoreme, poate oare ea selecţiona teoremele care urmează să fie demonstrate? În această direcţie s-a efectuat un experiment cu totul preliminar şi s-au obţinut anumite rezultate preliminare. Le vom expune aici nu pentru interesul lor intrinsec, ci pentru a stimula încercări ulterioare în această direcţie. Calea este foarte simplă: incluzînd principii convenabile de banalitate, maşina trebuie doar să selecţioneze şi să tipărească teoremele mai puţin banale; acestea, la rîndul lor, sugerează noi principii de banalitate; într-o anumită

etapă, ori vom ajunge exact la teoremele care au fost deja descoperite și considerate ca interesante, ori vom găsi un număr mare de noi teoreme interesante.

Ceea ce am realizat este că mașina formează o clasă destul de mare de propoziții (secvențe) și selecționează dintre ele teoreme „interesante". În primul rînd, sînt formate toate formulele care conțin exact 6 simboluri și cel mult literele propoziționale P, Q, R. Ajungem astfel la un total de 651 de formule, dintre care 289 sînt de bază iar 362 sînt variante banale, care se obțin din formule de bază doar prin schimbarea numelui literelor propoziționale. Din cele 651 de formule, 107 sînt teoreme. Programul constrînge mașina să formeze aceste formule, să le așeze în cîte o adresă și să selecționeze teoremele, prefixînd fiecare cu semnul minus.

Apoi, mașina formează toate perechile (neordonate) (π, ρ) astfel încît sau π sau ρ (sau amîndouă) sînt printre cele 289 formule de bază și pentru fiecare pereche (π, ρ) secvențele $\pi \to \rho$, $\rho \to \pi$, $\pi, \rho \to$, $\to \pi, \rho$, atunci cînd nici π, nici ρ nu sînt teoreme. Dacă π, ρ sînt identice, atunci nu se formează $\pi \to \rho$, $\rho \to \pi$, $\to \pi, \rho$. Acestea sînt singurele principii de banalitate care sînt incluse în program. Astfel, distincția dintre formulele de bază și variantele lor evită necesitatea de a testa secvențele care sînt variante ale unor secvențe testate. Mai mult, dacă sau π sau ρ este teoremă, atunci $\to \pi$, ρ este o consecință banală, $\pi, \rho \to$ este o variantă banală a lui ρ, $\rho \to$ sau π, $\pi \to$; în plus, atunci $\pi \to \rho$ (respectiv $\rho \to \pi$) este teoremă, și anume o teoremă banală, dacă și numai dacă ρ (respectiv π) este teoremă. În sfîrșit, $\pi \to \pi$ este întotdeauna o teoremă (banală).

La prima vedere se părea că asemenea criterii preliminare de banalitate vor reduce numărul teoremelor în așa măsură, încît să rămînă un număr de teoreme rezonabil de mic. Am constatat însă că au mai rămas multe teoreme. Numărul teoremelor tipărite după ce mașina a funcționat cîteva ceasuri este atît de imens, încît autorul nici n-a încercat măcar să analizeze masa de date obținute. Numărul secvențelor care trebuie să fie formate este de aproape o jumătate milion, și cam 1/14 dintre ele sînt teoreme. Pentru a executa întregul experiment, ar fi necesare aproape 40 ore de mașină.

Cauza faptului că o parte atît de însemnată a propozițiilor reprezintă teoreme provine din felul în care am ales formarea secvențelor. Dacă examinăm un tabel de adevăr arbitrar cu n litere propoziționale, atunci, deoarece tabelul furnizează o teoremă, dacă și numai dacă fiecare linie dă valoarea adevăr, iar liniile sînt în număr 2^n, probabilitatea de a obține o teoremă este $1/2^{(2^n)}$. În particular, dacă $n = 3$, obținem probabilitatea 1/256. Însă secvențele $\pi \to \rho$, $\rho \to \pi$, $\to \pi$, ρ, π, $\rho \to$, sînt aceleași ca și $\sim \pi \vee \rho$ $\sim \rho \vee \pi$, $\rho \vee \pi \sim \rho \vee \sim \pi$, care toate sînt disjuncții. Deci probabilitatea este mai mare, deoarece probabilitatea ca $\varphi \vee \psi$ să fie adevărată este (3/4). Dacă avem trei litere propoziționale, atunci avem probabilitatea $(3/4)^8$ adică aproximativ 1/10. Cele cîteva criterii de banalitate, reducînd numărul secvențelor testabile de peste două ori, reduc și această probabilitate la 1/14. Evident că trebuie să elaborăm alte criterii de banalitate pe care să le includem, cum ar fi de exemplu: dacă $\pi \equiv \rho$ și $\theta(\pi)$ sînt teoreme, atunci $\theta(\rho)$ este o consecință banală, care nu trebuie înregistrată.

În programul de fapt se folosesc cartele perforate de intrare pentru a determina domeniul secvențelor care urmează să fie formate și testate, deoarece, în caz contrar, mașina va lucra în continuu în curs de 40 de ore pînă se vor

forma și testa toate secvențele. Fiecare dintre secvențele formate sau este păstrată în domeniul rezervat al dispozitivului de memorizare, sau este pur și simplu aruncată afară, după cum e teoremă sau nu. Cînd toate secvențele date în cartela de la intrare sînt verificate, iar porțiunea de rezervă este umplută în întregime, teoremele obținute pînă la momentul respectiv se transmit pe bandă și apoi se tipăresc. În apendicele II se dă, doar ca o curiozitate, o porțiune întîmplător foarte mică din rezultatul tipărit.

§ 5. COMPLETITUDINEA ȘI CONSISTENȚA SISTEMELOR P ȘI P_S

Se poate da o demonstrație simplă atît pentru consistența, cît și pentru completitudinea sistemului P. Deoarece însă toate considerentele se simplifică și mai mult, dacă utilizăm un număr mai redus de conective funcții de adevăr, vom da un sistem P_S bazat pe unica conectivă bară $\mid$ și vom demonstra că acest sistem este consistent și complet. Atunci va fi clar că o demonstrație similară se poate aplica sistemului P.

Formulele și secvențele se definesc la fel ca în sistemul P, cu excepția că clauza de formare a formulelor noi este acum doar următoarea: dacă φ și ψ sînt formule atunci $\varphi \mid \psi$ este formulă. Avem numai trei reguli:

P_S1. la fel ca $P1$.

Dacă λ și ζ sînt lanțuri (eventual vide) de formule atomice, atunci:

P_S2. Dacă φ, ψ, $\xi \rightarrow \lambda$, ρ, atunci $\zeta \rightarrow \lambda$, $\varphi \mid \psi$, ρ.

P_S3. Dacă λ, $\rho \rightarrow \pi$, φ și λ, $\rho \rightarrow \pi$, ψ, atunci λ, $\varphi \mid \psi$, $\rho \rightarrow \pi$.

Consistența calculului P_S. Cu ajutorul interpretării vizate pentru săgeată și virgulă se poate verifica ușor ca P_S1 este validă, adică adevărată, oricare ar fi interpretarea formulelor atomice că în P_S2 concluzia este validă, dacă (și numai dacă) premisa este validă, și că în P_S3 concluzia este validă, dacă (și numai dacă) premisele sînt valide. Rezultă că orice secvență demonstrabilă este validă.

Completitudinea calculului P_S. Vrem să dovedim că fiecare secvență care este validă este demonstrabilă. Fiind dată o secvență, găsim prima formulă neatomică din antecedent (dacă există vreuna) și aplicăm P_S3 în direcție inversă, obținînd astfel două premise, fiecare dintre ele avînd un număr mai mic de intrări ale semnului bară. Dacă în antecedent nu figurează semnul bară, stabilim prima intrare a semnului bară în consecvent (dacă există asemenea intrări) și aplicăm P_S2 în direcție inversă. Apoi aplicăm aceeași procedură rezultatelor pe care le-am obținut. Acest proces va fi continuat cu fiecare secvență pînă cînd în formulă nu mai apare semnul bară. Deoarece în fiecare secvență numărul aparițiilor semnului bară este finit, procesul ajunge întotdeauna la capăt și atunci avem o clasă finită de secvențe, în care apar numai formule atomice. Secvența inițială este validă, dacă și numai dacă este validă fiecare secvență din această clasă finală. Dar o secvență în care intră numai formule atomice este validă, dacă și numai dacă ea reprezintă un caz al lui P_S1 și putem decide efectiv, în fiecare caz în parte, dacă aceasta are loc sau

nu. Deci calculul este complet și avem o procedură de decizie pentru demonstrabilitate, care pentru fiecare secvență demonstrabilă furnizează, în mod automat, demonstrația.

§ 6. SISTEMUL P_e: CALCULUL PROPOZIȚIONAL CU EGALITATE

Deși nu este necesar, totuși este comod să adăugăm semnul de egalitate, $=$, înainte de a introduce cuantori. Acest fel de a proceda servește pentru a sublinia faptul că egalitatea este mai elementară decît cuantorii, chiar dacă de obicei cuantorii se introduc înainte de egalitate. Modificările necesare pentru a ajunge la acest sistem pornind de la sistemul P sînt cu totul neînsemnate. Variabilele X, Y, Z, S, T, U, V, W etc. sînt luate acum ca termeni, iar domeniul formulelor atomice se extinde, astfel încît să cuprindă toate expresiile de formă $\alpha = \beta$, atunci cînd α și β sînt termeni.

Singurele reguli adiționale necesare pentru egalitate sînt o extindere a regulii inițiale $P1$, astfel încît pe lîngă regulile $P1$—$P6b$ din sistemul P, să avem acum: dacă λ, ζ sînt lanțuri (eventual vide) de formule atomice, atunci:

$P7$. $\lambda \to \zeta$ este teoremă, dacă există un termen astfel încît $\alpha = \alpha$ figurează în ζ.

$P8$. $\lambda \to \zeta$ este teoremă dacă $\alpha = \beta$ figurează în λ și $\lambda \to \zeta'$ este o teoremă, unde ζ' se obține din ζ prin substituirea lui α (sau β) pentru unele intrări, eventual toate, ale lui $\beta(\alpha)$.

Este foarte ușor să extindem programul I pentru a obține un program pentru sistemul P_e. Autorul însă nu a alcătuit un program separat pentru P_e, ci l-a inclus ca parte integrantă în programul III. Această parte constrînge mașina să funcționeze exact ca în cazul programului, cu deosebirea că atunci cînd cercetează dacă o secvență de formule atomice este teoremă, mașina nu se oprește în caz că secvența nu este o teoremă în virtutea regulii inițiale $P1$, ci continuă să determine dacă nu cumva ea este teoremă conform cu regulile adiționale $P7$ și $P8$. Pentru a deosebi secvențele de formule atomice, care sînt valide conform cu regulile funcțiilor de adevăr, de cele care devin valide numai după aplicarea lui $P7$ sau $P8$, cazul dintîi este marcat doar cu VA, pe cînd al doilea este marcat în plus cu semnul $=$. Exemple de rezultate tipărite se dau în apendicele III.

Exemplul *13.3, destul de lung, este inclus pentru a sublinia un anumit amănunt. Se preconizează că ar fi interesant dacă mașina ar descoperi erori în *Principia*. Or, acest exemplu se poate spune că descoperă o eroare în *Principia*, în sensul următor. Autorii lucrării *Principia* au demonstrat această teoremă utilizînd $*10 \cdot 13$ și $*10 \cdot 221$ din calculul predicatelor. Din comentariul atașat demonstrației acestei teoreme, pare clar că autorii au considerat-o ca o teoremă care presupune calculul predicatelor. Or, în demonstrația tipărită de mașină nu se face apel la nimic exterior sistemului P, adică nici măcar la regulile adiționale $P7$ și $P8$. Aceasta se manifestă în faptul că toate secvențele de formule atomice, și anume rîndurile 6, 10, 14, 18, 24, 28, 32, 36 din demonstrație sînt marcate doar cu VA fără semnul adițional $=$. La început, autorul a crezut că aceasta indică o eroare în program. Însă exa-

minarea teoremei arată că *13.3 este cu adevărat o teoremă a calculului propoziţional. De fapt, programul I ar fi furnizat singur în fond aceeaşi demonstraţie.

§ 7. PRELIMINARII LA CALCULUL PREDICATELOR

Pînă acum am încercat să evităm tehnica greoaie din logica matematică. Dar, atunci cînd trecem la calculul predicatelor, cîteva definiţii mai exacte par necesare.

Formulele, termenii şi secvenţele calculului predicatelor se determină precum urmează. Simbolurile de bază sînt: $=$; cele cinci conective funcţii de adevăr; cele două simboluri de cuantori pentru "toţi" şi "unii"; literele propoziţionale P, Q, R etc. literele predicale G, H, J, K etc.; variabilele X, Y, Z etc.; simbolurile funcţiilor f, g, h etc.; numerele Ø 1, 2, ... 9 etc.; punctele speciale necesare pentru grupări. Termenii sînt: (i) o variabilă este un termen (ii) un număr este un termen; (iii) dacă α, β etc. sînt termeni şi dacă σ este simbol de funcţie, atunci $\sigma\alpha$, $\sigma\alpha\beta$ etc. sînt termeni. O variabilă sau un număr este un termen simplu; ceilalţi termeni sînt compuşi. Cele cinci conective funcţii de adevăr şi cei doi cuantori se numesc constante logice. Formulele atomice sînt: (i) literele propoziţionale; (ii) $\alpha = \beta$, atunci cînd α, β sînt termeni; (iii) $G\alpha$, $H\alpha\beta$, etc., atunci cînd α, β etc., sînt termeni. Formule sînt: (i) formulele atomice sînt formule; (ii) dacă φ, ψ sînt formule, atunci $\sim \varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \supset \psi$, $\varphi \equiv \psi$, $\varphi \& \psi$, $(E\alpha)$ φ, (α) φ sînt formule, unde α este variabilă. Un lanţ poate fi vid sau format dintr-o singură formulă, iar dacă π şi ρ sînt lanţuri nevide, atunci π, ρ este un lanţ. Fiind date două lanţuri π şi ρ', $\pi \rightarrow \rho$ este o secvenţă.

Intuitiv, este clar care este domeniul de acţiune al unei constante logice. În limbaj mecanic, metoda de a găsi domeniul de acţiune al unei constante logice într-o formulă dată depinde de notaţie. Conform cu notaţia care se alege de fapt pentru maşină, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \& \psi$, $\varphi \supset \psi$, $\varphi \equiv \psi$, se scriu respectiv ca $D\varphi{-}\psi$, $C\varphi{-}\psi$, $I\varphi{-}\psi$, $B\varphi{-}\psi$, unde locul liber se completează printr-un şir de puncte în număr mai mare decît lungimea lanţului celui mai lung din tre φ şi ψ, cu excepţia că nu se utilizează punctul, atunci cînd atît φ, cît şi ψ sînt litere propoziţionale. Aceste amănunte şi altele legate de ele în ce priveşte notaţia se înţeleg cu uşurinţă din apendice. Fiind dată o secvenţă, domeniul de acţiune al unei constante logice Γ, care se află la începutul întregii formule este întreaga formulă mai puţin această constantă. Dacă Γ este o constantă monară, adică $\sim$ sau unul dintre cele două simboluri de cuantori, atunci domeniul de acţiune în formulă, al constantei logice următoare Γ', dacă ea există, este întreaga parte rămasă mai puţin această a doua constantă Γ'. Dacă Γ este binară, atunci domeniul ei de acţiune se împarte în două părţi acolo unde lanţul de puncte este cel mai lung; fiecare parte, dacă conţine constante logice, trebuie să înceapă cu o constantă, să zicem Γ', al cărei domeniu de acţiune este întreaga această parte fără Γ'. Aceasta ne dă o definiţie inductivă mecanizabilă a domeniului de acţiune al fiecărei constante logice din secvenţă. Se spune că o constantă logică Γ „guvernează" constanta logică Γ', dacă Γ' intră în domeniul de acţiune al lui Γ.

Pentru a evita utilizarea explicită a formei normale *prenex*, adică a formei în care toţi cuantorii unei formule se află la începutul ei, este de dorit să intro-

ducem, după Herbrand [18], semnul fiecărui cuantor dintr-o secvență. Înainte de a calcula semnele pentru cuantorii secvenței, se impun două operații prealabile simple. În primul rînd cuantori diferiți pretind variabile diferite, chiar dacă nici unul dintre ei nu guvernează pe celălalt; apoi variabilele libere din secvență nu sînt folosite ca variabile scrise pe lîngă cuantori, pentru a-i explicita. Aceasta simplifică eliminarea cuantorilor. În al doilea rînd, toate intrările echivalenței care guvernează vreun cuantor se elimină prin una dintre cele două echivalențe simple: $\varphi \equiv \psi$, dacă și numai dacă $(\varphi \,\&\, \psi) \vee (\sim \varphi \,\&\, \sim \psi)$ sau, alternativ, $(\sim \varphi \vee \psi) \,\&\, (\sim \psi \vee \varphi)$.

Fiind dată o formulă din secvență, părțile ei pozitive și negative se definesc astfel: (i) (o intrare a lui) φ este parte pozitivă a lui (aceeași intrare a lui) φ; (ii) dacă φ este parte pozitivă (respectiv negativă) a lui ψ, atunci φ este parte negativă (respectiv pozitivă) a lui $\sim \psi$; (iii) dacă φ este parte pozitivă (respectiv negativă) a lui ψ sau a lui χ atunci φ este parte pozitivă (respectiv negativă) a lui $\psi \vee \chi$; (iv) similar cu φ și $\psi \,\&\, \chi$; (v) dacă φ este parte pozitivă (respectiv negativă) a lui ψ, atunci φ este parte pozitivă (respectiv negativă) a lui $(\alpha)\,\psi$; (vi) similar în ce privește φ și $(E\alpha)\psi$; (vii) dacă φ este parte pozitivă (respectiv negativă) a lui ψ, atunci φ este parte pozitivă (respectiv negativă) a lui $\chi \supset \psi$, și parte negativă (respectiv pozitivă) a lui $\psi \supset \chi$. Orice formulă φ din secvență este parte pozitivă sau parte negativă a secvenței după cum (i), ea este parte pozitivă (respectiv negativă) în consecvent (respectiv antecedent), sau (ii) este parte negativă (respectiv pozitivă) în consecvent (respectiv antecedent). Fiecare cuantor (α) cu domeniul de acțiune φ într-o secvență dată este pozitiv (respectiv negativ), dacă și numai dacă formula $(\alpha)\,\varphi$ este parte pozitivă (respectiv negativă) a secvenței; $(E\alpha)$ este pozitiv (respectiv negativ), dacă și numai dacă $(E\alpha)\varphi$ este parte negativă (respectiv pozitivă) a secvenței; diferitele intrări ale aceleiași variabile libere α în secvență compensează, de asemenea, un cuantor pozitiv (ca și cum în capul secvenței ar figura (α)).

Această definiție cuprinzătoare se poate ilustra cu un exemplu:

Ex. 0. $(X)\,(GXY \supset (\sim GXX \,\&\, (EZ)HXZ))$,
$(W)\;((\sim GWW \,\&\, (EU)HWU) \supset GWY) \rightarrow \sim (EV)HYV.$

În acest exemplu, (X) este un cuantor negativ, (EZ) este un cuantor pozitiv, (W) este cuantor negativ, (EU) este cuantor negativ, (EV) este cuantor pozitiv. De exemplu, $(EU)HWU$ este pozitiv în $\sim GWW \,\&\, (EU)HWU$, dar negativ în $(\sim GWW \,\&\, (EU)HWU) \supset GWY$ și $(W)\,((\sim GWW \,\&\, (EU)HWU) \supset \supset GWY)$, care este întreaga formulă din antecedent. Deci $(EU)HWU$ este pozitivă în secvență. Deci (EU) este negativă. Atribuirea semnelor la cuantori coincide cu rezultatul formei normale *prenex:* cuantorul pozitiv corespunde cu cel universal, iar cel negativ cu cel existențial. Astfel, o formă normală *prenex* pentru Ex. 0 este:

$(Y)\;\; (EX)\,(EW)\,(EU)\,(Z)\,(V)\{[(GXY \supset (\sim GXX \,\&\, HXZ)) \,\&\, ((\sim GWW \,\&\, \&\, HWU) \supset GWY)] \supset \sim HYV\}.$

Un alt concept util, dar complicat, este forma „miniscopică" a unei formule din calculul predicatelor. Într-un anumit sens, aceasta este opusa formei *prenex*, care în general acordă fiecărui cuantor un domeniu de acțiune maxim.

Deoarece întrepătrunderea cuantorilor şi variabilelor este factorul principal care determină complexitatea unei formule din calculul predicatelor, este uşor de văzut că separarea variabilelor şi reducerea domeniilor de acţiune ale cuantorilor poate să fie de ajutor în ce priveşte simplificarea problemei de a stabili dacă o formulă este o teoremă. Din păcate, uneori procesul de aducere a unei formule la forma miniscopică poate fi foarte complicat.

Cel mai uşor este să explicăm această noţiune pentru o formulă în care nu mai figurează $\equiv$ şi $\supset$ (de exemplu, pentru că au fost eliminate cu ajutorul definiţiilor uzuale), astfel încît unicele conective funcţii de adevăr sînt $\sim$, $\&$, $\vee$. O asemenea formulă se spune că este într-o formă miniscopică, dacă şi numai dacă: (i) o formulă atomică φ este în formă miniscopică; (ii) dacă φ din $(\alpha)\varphi$ (respectiv $(E\alpha)\varphi$) este disjuncţie (respectiv conjuncţie) de formule fiecare în formă miniscopică şi dacă sau conţine pe α sau nu conţine de loc variabile libere, atunci $(\alpha)\varphi$ (respectiv $(E\alpha)\varphi$) este în formă miniscopică; (iii) dacă φ şi ψ sînt în formă miniscopică, atunci $\sim \varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \& \psi$ sînt şi ele în formă miniscopică; (iv) dacă φ din $(\alpha)\varphi$ (sau $(E\alpha)\varphi$) începe cu $(E\beta)$ (sau cu (β)) şi este în formă miniscopică, atunci şi $(\alpha)\varphi$ (respectiv $(E\alpha)\varphi$) este în forma miniscopică; (v) o formulă care începe cu un şir de cuantori de aceeaşi speţă este în formă miniscopică, dacă fiecare formulă obţinută prin permutarea acestor cuantori şi apoi înlăturarea primului este în formă miniscopică.

O procedură pentru aducerea unei formule în formă miniscopică este dată detaliat de către Quine [19]. În cele ce urmează vom utiliza şi explica numai unele porţiuni din procedura lui Quine; dacă aducerea formulelor unei secvenţe la forma miniscopică este prea complicată, atunci maşina va urma o cale cu totul diferită.

§ 8. SISTEMUL Q_p ŞI CALCULUL PREDICATELOR AE

Avem la dispoziţie o procedură de decizie deosebit de simplă pentru multe dintre secvenţele care nu conţin simboluri de funcţie, în care fiecare formulă este în formă miniscopică şi în forma AE, adică nici un cuantor pozitiv nu este guvernat de un cuantor negativ. Această procedură se poate obţine după doi paşi preliminari şi poate fi descrisă după cum urmează.

Pasul 1. Adu fiecare formulă în formă miniscopică şi în acelaşi timp aplică regulile $P2$—$P6b$ ori de cîte ori este posibil.

În general se obţine un şir finit de secvenţe, astfel încît toate sînt teoreme, dacă şi numai dacă secvenţa iniţială este teoremă.

Pasul 2. Testează fiecare şir şi vezi dacă este în formă AE. Dacă toate secvenţele sînt astfel, atunci atît ele, cît şi secvenţa iniţială intră în calculul predicatelor AE, şi putem trece la pasul 3. Dacă lucrurile nu stau astfel pentru anumite secvenţe, atunci secvenţa iniţială nu aparţine calculului predicatelor AE, ci trebuie să folosim sistemul mai bogat Q care va fi descris mai jos.

Pasul 3. Fiind dată o secvenţă în calculul predicatelor AE, înlătură toţi cuantorii şi înlocuieşte toate variabilele ataşate la cuantori negativi prin numere, cîte un număr pentru fiecare cuantor.

Secvența rezultată nu mai conține cuantori.

Pasul 4. Aplică regulile funcțiilor de adevăr pentru a obține o mulțime finită de secvențe, în care nu mai figurează constante logice. Testează fiecare secvență cu regulile inițiale și reține numai pe cele nevalide.

Pasul 5. Fă lista tuturor variabilelor și numerelor care apar în această ultimă mulțime de secvențe alcătuite din formule atomice; fă toate substituțiile posibile de variabile în locul numerelor în secvențe (dacă nu intervin variabile, pune X în locul numerelor), și verifică de fiecare dată dacă secvențele rezultate sînt toate valide.

Secvența inițială din pasul 3 este teoremă, dacă există o substituție care transformă toate secvențele din această mulțime finită în teoreme.

Pasul 6. Secvența inițială este teoremă, dacă toate secvențele obținute în pasul 1 se constată că sînt teoreme după pașii 3—5.

Prin aceasta descrierea lui Qp este completă. Acest sistem poate fi formulat mai formalizat, ca fiind format din sistemul nostru de bază P_e prin adăugarea de reguli explicite adiționale; dar rezultatul ar fi destul de lung și întrucîtva artificial. Deoarece formularea mai puțin explicită de mai sus satisface cererile generale ale sistemelor formale, nu vom da o descriere care ar fi mai satisfăcătoare din punct de vedere formal. Această observație se referă și la sistemele pe care le vom da ulterior.

Iată cîteva exemple simple, care ilustrează această procedură și unele modificări neînsemnate ale ei.

$$*10.25 \quad (X)GX \dashrightarrow (EY)GY \qquad (1)$$

$$(1) \quad G_1 \rightarrow G2 \qquad \text{NOT} \quad (2)$$

$$(1) \quad GX \rightarrow GX \qquad \text{VA} \quad (2)$$

Q.E.D.

$$*11.21 \rightarrow (X)(Y)(Z)\,GXYZ \equiv (V)(U)(W)\,GUVW \qquad (1)$$

$$(1) \quad (X)(Y)(Z)\,GXYZ \rightarrow (V)(U)(W)\,GUVW \qquad (2)$$

$$(1) \quad (V)(U)(W)\,GUVW \rightarrow (X)(Y)(Z)\,GXYZ \qquad (3)$$

$$(2) \quad G123 \rightarrow GUVW \qquad \text{NOT} \quad (4)$$

$$(2) \quad GUVW \rightarrow GUVW \qquad \text{VA} \quad (4)$$

P.Q.E.D.

$$(3) \quad G213 \rightarrow GXYZ \qquad \text{NOT} \quad (5)$$

$$(3) \quad GXYZ \rightarrow GXYZ \qquad \text{VA} \quad (5)$$

Q.E.D.

$$*11.57 \rightarrow (X)\,GX \equiv (Y)(Z)(GY \,\&\, GZ) \qquad (1)$$

$$(1) \quad (X)\,GX \rightarrow (Y)(Z)(GY \,\&\, GZ) \qquad (2)$$

$$(1) \quad (Y)(Z)(GY \,\&\, GZ) \rightarrow (X)\,GX \qquad (3)$$

(3) $G1 \,\&\, G2 \rightarrow GX$ (4)

(4) $G1,\ G2 \rightarrow GX$ NOT (5)

(4) $GX,\ GX \rightarrow GX$ VA (5)

P.Q.E.D.

(2) $(X)\,GX \rightarrow (Y)GY \,\&\, (Z)\,GZ$ (6)

(6) $(X)\,GX \rightarrow (Y)\,GY$ (7)

(6) $(X)\,GX \rightarrow (Z)\,GZ$ (8)

(7) $G1 \rightarrow GY$ NOT (9)

(7) $GY \rightarrow GY$ VA (9)

P.Q.E.D.

(8) $G1 \rightarrow GZ$ NOT (10)

(8) $GZ \rightarrow GZ$ VA (10)

Q.E.D.

* 9.22 $(X)\,(GX \supset HX) \rightarrow (EY)\,GY \supset (EZ)\,HZ$ (1)

(1) $(X)\,(GX \supset HX),\ (EY)\,GY \rightarrow (EZ)\,HZ$ (2)

(2) $G1 \supset H1,\ GY \rightarrow H2$ (3)

(3) $H1,\ GY \rightarrow H2$ NOT (4)

(3) $GY \rightarrow H2,\ G1$ NOT (5)

(3) $GY \rightarrow HY,\ GY$ VA (5)

(3) $HY,\ GY \rightarrow HY$ VA (4)

Q.E.D.

Aceste exemple urmăresc să arate mai multe lucruri. În primul rînd, de exemplu, în linia (5) din *11.21, substituţiile posibile pentru (1, 2, 3) sînt (X, X, X), (X, X, Y), (X, X, Z), (X, Y, X), (X, Y, Y), (X, Y, Z), (Y, X, X), (Y, X, Y), (Y, X, Z), (Y, Y, X), (Y, Y, Y), (Y, Y, Z) etc., cu totul 27. Dacă încercăm substituţiile una cîte una, aşa cum se stabileşte în programul III, va fi necesar oarecare timp înainte de a ajunge la substituţia corectă (Y, X, Z). Totuşi este clar că la fel de bine se poate mecaniza procedura care constă în aceea de a marca intrările uneia şi aceleiaşi litere predicale de ambele părţi ale săgeţii, alegînd substituţiile care transformă toate secvenţele în teoreme. Aceasta nu este decît o schimbare minoră în programul III. De altfel, aceasta este şi un exemplu de o strategie simplă care îmbunătăţeşte programul.

În al doilea rînd, *9.22 arată că nu este necesar să eliminăm implicaţia, deoarece definiţia formulei în formă miniscopică se poate modifica uşor, astfel încît ea să cuprindă pe lîngă semnele $\sim$, $\vee$, &, şi semnul implicaţiei $\supset$. Trebuie numai să ţinem minte că $\varphi \supset \psi$ este acelaşi lucru ca şi $\sim \varphi \vee \psi$.

În al treilea rînd, după cum se va demonstra mai departe, pașii 3—5 de mai sus sînt aplicabili la o secvență în formă *AE* conținînd cel mult un cuantor pozitiv, chiar dacă ea nu este în formă miniscopică. De aceea, de exemplu, în demonstrația lui *11.57, (3) nu trebuie să fie transformată în formă miniscopică, pe cînd (2) trebuie să fie transformată. Astfel, dacă cuantorii din (2) nu sînt separați, așa cum s-a procedat în linia (6), obținem:

(2) $G1 \to GY \,\&\, GZ$ (6)

(6) $G1 \to GY$ NOT (7)

(6) $G1 \to GZ$ NOT (8)

Nu este posibilă vreo substituție care să transforme în teoremă atît (7), cît și (8). De aceea, deși *11.57 este teoremă, nu putem obține pe această cale vreo demonstrație, dacă nu procedăm mai întîi la reducerea la forma miniscopică. Pe de altă parte, într-o variantă a acestei proceduri care va fi descrisă în cele ce urmează, pasul 5 din procedura de mai sus se înlocuiește cu o altă substituție, care se execută înainte de pasul 4, astfel încît $G1$ se înlocuiește în exemplul de mai sus cu GY, GZ și nu mai este necesar să începem prin a aduce secvența la forma miniscopică. Meritele relative ale celor două proceduri vor fi comparate mai jos.

§ 9. PROGRAMUL III

Inițial, acest program viza să realizeze procedura *Qp*. Dar partea preliminară de aducere a unei formule în formă miniscopică nu era bine pusă la punct. Acum este clar că pentru scopul de a demonstra toate teoremele din calculul predicatelor expuse în *Principia* nu este necesar să introducem toate regulile de aducere a unei formule într-o formă miniscopică. De fapt, numai pentru vreo 5% din teoreme sînt necesare asemenea reguli, și încă dintre cele mai simple.

Există însă cîteva alte deosebiri dintre programul III și procedura descrisă mai sus. În loc de a elimina toți cuantorii dintr-o dată, în conformitate cu semnul respectiv, cuantorii se tratează la fel ca și conectivele funcții de adevăr: pentru fiecare dintre ei se introduc două reguli. Dacă λ și ζ sînt lanțuri (eventual vide) de formule atomice, iar i este un număr nou și φ este o variabilă nouă, atunci:

Regula $\to \forall$. Dacă $\zeta \to \lambda, \varphi v, \pi$, atunci $\zeta \to \lambda, (\alpha)\varphi\alpha, \pi$.
Regula $\to \exists$. Dacă $\zeta \to \lambda, \varphi i, \pi$, atunci $\zeta \to \lambda(E\alpha)\varphi\alpha, \pi$.
Regula $\forall \to$. Dacă $\lambda, \varphi i, \rho \to \pi$, atunci $\lambda, (\alpha)\varphi\alpha, \varphi \to \pi$.
Regula $\exists \to$. Dacă $\lambda, \varphi v, \rho \to \pi$, atunci $\lambda(E\alpha)\varphi\alpha, \rho \to \pi$.

Aceste reguli se utilizează pentru uniformitate în întreaga procedură, numai că trebuie să fim precauți pentru ca același cuantor, atunci cînd figurează în locuri diferite, în cazul reducerilor constantelor logice, să fie înlocuit prin aceleași variabile, sau aceleași numere, deși atunci cînd înlocuirea se face cu numere, această deosebire nu joacă un rol esențial. Dacă nu sîntem precauți, se poate întîmpla ca anumite teoreme din calculul *AE* să nu fie demonstrate. Tocmai așa s-a întîmplat cu programul III, care n-a reușit să furnizeze demon-

straţii pentru *10.3, *10.51, *10.55. *10.56, *11.37, *11.52, *11.521, *11.61 tocmai pentru acest motiv.

O lipsă mai puţin serioasă a programului III constă în aceea că înainte de eliminarea cuantorilor reducerea funcţiilor de adevăr nu se realizează atît de des cît este posibil. Din această cauză, anumite probleme separate sînt considerate ca un întreg şi timpul necesar pentru obţinerea demonstraţiei devine nejustificat de lung. În patru cazuri particulare, şi anume * 10.22, *10.29, *10.42, *10.43, acest defect a condus, în fapt, la eşuarea demonstraţiei, deşi pentru fiecare dintre acestea demonstraţia se putea găsi cu ajutorul programului III, dacă înainte de eliminarea cuantorilor s-ar fi făcut toate reducerile posibile ale conectivelor. Dar atît acest defect, cît şi cel precedent se pot înlătura uşor. Motivul pentru care am insistat atît de mult asupra lor a fost intenţia de a ilustra cum pot maşinile să ajute la cercetarea matematică, descoperind lipsurile teoretice în formulările preliminare ale procedurilor generale.

Deoarece metodele de faţă nu utilizează nici axiome nici definiţii, axiomele şi definiţiile din *Principia* se rescriu ca teoreme. Lista rezultată, mărită în acest mod, a teoremelor din *Principia* (*9 — *13) care ţin de calculul predicatelor cu egalitate cuprinde un total de 158 de teoreme. Din acestea, 139 se pot demonstra cu ajutorul programului III, în forma sa actuală, deşi unele dintre ele pretind un timp de demonstrare nejustificat de lung, aşa cum este cazul, de exemplu, la *11.21 şi *11.24. Dacă efectuăm cele cîteva modificări minore menţionate mai sus, timpul de demonstrare devine pentru toate rezonabil de scurt, iar cele 12 teoreme a căror listă am dat-o în ultimele două alineate devin demonstrabile. Cu totul numai 7 din cele 158 de teoreme trebuie să fie supuse unor operaţii preliminare, pentru a fi puse în formă miniscopică: *11.31, *11.391, *11.41, *11.57, *11.59, *11.7, *11.71. Regulile necesare pentru aceste cazuri sînt trei:

(i) înlocuieşte $(\alpha)(\varphi\alpha \,\&\, \psi\alpha)$ cu $(\alpha)\varphi\alpha \,\&\, (\alpha)\psi\alpha$.
(ii) înlocuieşte $(E\alpha)(\varphi\alpha \vee \psi\alpha)$ cu $(E\alpha)\varphi\alpha \vee (E\alpha)\psi\alpha$.
(iii) înlocuieeşte $(\alpha)(\chi\alpha \supset (\varphi\alpha \,\&\, \psi\alpha))$ cu $(\alpha)(\psi\alpha \supset \varphi\alpha) \,\&\, (\alpha)(\chi\alpha \supset \varphi\alpha)$

Deci, pe scurt, programul III cu anumite modificări simple poate demonstra toate cele 158 de teoreme din *Principia* ; programul modificat trebuie să facă următoarele operaţii. Fiind dată o secvenţă, vezi dacă regulile (i), (ii), (iii) sînt aplicabile şi dacă da, atunci aplică-le. Apoi fă toate simplificările de conective în conformitate cu regulile $P2a$—$P6b$. În general, aceasta furnizează o mulţime finită de secvenţe. Dacă fiecare dintre ele se află în forma AE şi, ori conţine cel mult un cuantor pozitiv, ori este în formă miniscopică, atunci secvenţa iniţială este adesea decidabilă cu ajutorul metodei noastre; în caz contrar, ea depăşeşte posibilităţile metodei. Dacă sîntem în primul caz, continuă să decizi asupra fiecărei secvenţe, fie eliminînd toţi cuantorii dintr-o dată, ca în pasul 3 din paragraful precedent, fie aplicînd alternativ regulile $P2a$—$P6b$ cu cele patru reguli pentru cuantori: $\rightarrow \forall$, $\rightarrow \exists$, $\forall \rightarrow$, $\exists \rightarrow$. În sfîrşit, efectuează paşii 4 şi 5 din paragraful precedent.

În apendicele IV se dă un eşantion de tipărituri după programul III, fără modificări. În legătură cu aceasta, poate că este interesant să amintim o întîmplare amuzantă din perioada funcţionării programului III. Maşina tipăreşte, de obicei, rîndurile demonstraţiei, unul după altul, fără pauze, iar după

aceea apare o pauză mai lungă, ca și cum mașina ar gîndi în mod intens, înainte de a tipări substituția care poate transforma toate secvențele nevalide de formule atomice în secvențe valide. De exemplu, primele 15 rînduri din *11.501 (Apendicele IV) au fost tipărite în succesiune neîntreruptă, după care a urmat o pauză lungă de peste 2 min și abia apoi au fost tipărite celelalte cîteva rînduri.

§ 10. SISTEME *Qq* ȘI *Qr*: ALTE FORMULĂRI ALE CALCULULUI PREDICATELOR *AE*

După cum am spus, în legătură cu demonstrația lui *11.57, pasul 5 poate fi înlocuit cu alt procedeu de substituție, după care se poate aplica noua metodă *Qq*, chiar dacă formulele din secvență nu sînt în formă miniscopică, cu condiția ca secvența să fie în forma *AE*.

Mai precis: noua metodă de substituție este următoarea. Să considerăm secvența care se obține imediat după eliminarea cuantorilor și să determinăm toate variabilele și numerele care intervin în ea. Dacă $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt variabilele, atunci o formulă φ_i, unde i este un număr, se înlocuiește cu $\varphi\alpha_1, \ldots, \varphi\alpha_n$. De exemplu, să considerăm (2) din *11.57:

$(X)GX \rightarrow (Y)(Z)(GY \,\&\, GZ)$ (1)

(1) $G1 \rightarrow GY \,\&\, GZ$ (2)

(2) $GY,\ GZ \rightarrow GY \,\&\, GZ$ (3)

(3) $GY,\ GZ \rightarrow GY$ VA (4)

(3) $GY,\ GZ \rightarrow GZ$ VA (5)

Q.E.D.

Care sînt meritele comparative ale lui *Qp* și *Qq*? În conformitate cu *Qq* se efectuează o singură substituție, și anume la început și nu la sfîrșit, dar spre deosebire de *Qp*, rezultatele obținute pot fi secvențe mai lungi decît oricare dintre secvențele precedente din demonstrație. Pentru a aplica *Qq* nu este necesar ca formulele să fie aduse în prealabil la forma miniscopică — procedura este aplicabilă îndată ce secvența se află în forma *AE*; dar metoda *Qp* prezintă avantajul compensator că uneori o secvență, care este în forma *AE*, poate fi redusă la secvențe în această formă, dacă o aducem la forma miniscopică. De exemplu, toate secvențele din calculul predicatelor cu un loc (monadic) sînt decidabile cu sistemul *Qp*, dar nu cu sistemul *Qq*. Un asemenea caz îl prezintă exemplul lui Church [20] reprodus în apendicele VI. Pe de altă parte, același exemplu mai arată că procedura de aducere a unei secvențe în formă miniscopică poate fi foarte greoaie, astfel încît sînt dezirabile alte metode. Deși atît *Qp* cît și *Qq* pot fi integrate în calculul complet al predicatelor *Q*, care va fi descris în viitor, mai apropiată ca spirit de *Q* este o a treia metodă *Qr*. De aceea, *Q* va fi prezentat mai curînd ca extindere a lui *Qr*, decît ca o extindere a lui *Qp* sau a lui *Qq*.

Metoda *Qr* procedează în acelaşi fel ca şi *Qp*, numai că în pasul substituţiei se testează validitatea disjuncţiei tuturor substituţiilor posibile. De exemplu, să luăm din nou (2) din *11.57:

$$(X)GX \rightarrow (Y)(Z)(GY \,\&\, GZ) \tag{1}$$

$$(1)\ G1 \rightarrow GY \,\&\, GZ \tag{2}$$

$$(2)\ G1 \rightarrow GY \tag{3}$$

$$(2)\ G1 \rightarrow GZ \tag{4}$$

Acum, să testăm dacă disjuncţia conjuncţiilor $GY \rightarrow GY$ şi $GY \rightarrow GZ$, $GZ \rightarrow GY$ şi $GZ \rightarrow GZ$ este validă în cadrul funcţiilor de adevăr. Aceasta este în adevăr astfel, deoarece dacă primul termen al disjuncţiei este fals atunci $GY \rightarrow GZ$ este fals şi deci $GZ \rightarrow GY$ este adevărat, adică al doilea termen al disjuncţiei este adevărat.

Ca o alternativă, această disjuncţie se poate exprima ca fiind conjuncţia a patru propoziţii:

(i) $GY, GZ \rightarrow GY, GY$

(ii) $GY, GZ \rightarrow GY, GZ$

(iii) $GY, GZ \rightarrow GZ, GY$

(iv) $GY, GZ \rightarrow GZ, GZ$

Avem, aşadar, trei metode alternative *Qp*, *Qq*, *Qr*, pentru calculul predicatelor *AE*. În apendicele V dăm un exemplu de respingere după aceste trei metode.

Cum putem justifica metodele *Qp*, *Qq* şi *Qr*? În primul rînd, dacă nu avem demonstraţii, secvenţa iniţială nu este validă. Cel mai uşor se probează aceasta pentru *Qq*. În exemplul din apendicele V, linia (3), obţinută în cadrul metodei *Qq*, nu este validă, dacă şi numai dacă secvenţa iniţială (1) nu este validă în domeniul $\{X, Z\}$. Faptul că (4), (5), (6), (7) nu sînt toate valide, arată că (3) nu este validă. De fapt, dacă GXX şi GXZ sînt adevărate, dar GZX şi GZZ sînt false, atunci (3) nu este validă. Prin urmare, (1) este falsă în această interpretare şi deci nu este validă. Mai precis: dorim să găsim o interpretare pentru care $(EX)(Y)(GXY \vee GYX) \,\&\, \sim (Z)(EW)\ GZW$ sau, mai simplu, $(Y)(GXY \vee GYX) \,\&\, (W) \sim GZW$ este realizabilă în $\{X, Z\}$. Aceasta înseamnă că urmărim să găsim o interpretare pentru care conjuncţia expresiilor $GXX \vee GXX$, $GXZ \vee GZX, \sim GZX, \sim GZZ$ este adevărată, adică negaţia ei (3) este falsă. Interpretarea lui G dată mai sus serveşte acest scop. Nu este greu de generalizat raţionamentul pentru toate secvenţele în forma *AE*. De fapt, asemenea considerente sînt familiare din procedurile de decizie standard [21].

Justificarea lui *Qp* constă în faptul că dacă o secvenţă în forma *AE* este în formă miniscopică atunci toţi cuantorii negativi guvernează o disjuncţie în consecvent şi o conjuncţie în antecedent. Drept urmare, substituţia finală

este adesea echivalentă cu cea obținută prin metoda *Qq*. De exemplu, în apendicele V, disjuncțiile după metoda *Qp* sînt următoarele:

(i) $GXX \rightarrow GZX$; $GXX \rightarrow GZX$ sau, pur și simplu, $GXX \vee GXX \rightarrow GZX$

(ii) $GXX \rightarrow GZZ$; $GXX \rightarrow GZZ$ sau, pur și simplu, $GXX \vee GXX \rightarrow GZZ$

(iii) $GXZ \rightarrow GZX$; $GZX \rightarrow GZX$ sau, pur și simplu, $GXZ \vee GZX \rightarrow GZX$

(iv) $GXZ \rightarrow GZX$; $GZX \rightarrow GZZ$ sau, pur și simplu, $GXZ \vee GZX \rightarrow GZZ$

Deci disjuncția este echivalentă cu

$$\sim (GXX \vee GXX) \vee \sim (GXZ \vee GZX) \vee GZX \vee GZZ,$$

care, la rîndul ei, este echivalentă cu (3) obținută prin metoda *Qq*.

Dacă o secvență nu are mai mult de un cuantor pozitiv, indiferent dacă e în formă miniscopică sau nu, este cu totul evident că o demonstrație cu ajutorul sistemului *Qq* se poate obține dacă și numai dacă se poate obține una cu ajutorul sistemului *Qp*, deoarece în fiecare metodă este posibilă o singură substituție. În cazul general însă, după cum a subliniat domnul Richard Goldberg într-o scrisoare pe care mi-a adresat-o, există secvențe *AE* în formă miniscopică care sînt demonstrabile cu ajutorul sistemului *Qq*, dar nu cu cel al sistemului *Qp*. El dă ca exemplu următoarea secvență validă:

$$(X)GXU \rightarrow (EW)(GYW \,\&\, GZW).$$

Urmează că *Qp* se aplică doar subclasei secvențelor *AE*, care sînt în formă miniscopică. De aceea, pare să fie corect să modificăm programul III, astfel încît el să cuprindă procedura *Qq* sau procedura *Qr*. Din fericire, modificările necesare nu sînt prea mari.

Luînd unele măsuri de precauție, putem să arătăm, cu ajutorul inducției, că o demonstrație cu sistemul *Qq* se obține atunci și numai atunci cînd se obține o demonstrație cu ajutorul sistemului *Qr*, aceasta, pentru că substituțiile la începutul lui *Qq* dau același rezultat ca și disjuncția finală, care se execută în cadrul sistemului *Qr*. Prin urmare este adevărat că toate secvențele valide din calculul predicatelor *AE* sînt demonstrabile în *Qq* și în *Qr*.

Este mai ușor să arătăm că dacă există o demonstrație în cadrul vreuneia dintre aceste metode, atunci secvența este validă. Pentru *Qp* putem, pur și simplu, înlocui toate numerele din toate formulele prin variabilele necesare găsite la sfîrșit și în rezultat vom obține o demonstrație cu totul uzuală care, după cum se vede ușor, va furniza numai rezultate valide. În cazul lui *Qq*, putem iarăși să facem peste tot înlocuiri, astfel încît rezultatul va fi o demonstrație care în loc de regulile $\rightarrow \forall$, $\rightarrow \exists$, $\forall \rightarrow$, $\exists \rightarrow$, utilizează $\rightarrow \forall$, $\exists \rightarrow$, și:

Regula $\rightarrow \exists^*$: dacă $\xi \rightarrow \lambda$, $\varphi\alpha_1$, ..., $\varphi\alpha_n$, π, atunci $\xi \rightarrow \lambda\,(E\alpha)\,\varphi\alpha$, π.

Regula $\forall \rightarrow^*$: dacă λ, $\varphi\alpha_1$, ..., $\varphi\alpha_n$, $\rho \rightarrow \pi$, atunci λ, $(\alpha)\varphi\alpha$, $\rho \rightarrow \pi$.

În sfîrșit, deoarece o demonstrație cu ajutorul metodei *Qr* are loc, dacă și numai dacă există o demonstrație cu ajutorul metodei *Qq*, rezultă că orice teoremă obținută prin *Qr* este de asemenea validă.

§ 11. SISTEMUL *Q*: CALCULUL COMPLET AL PREDICATELOR CU EGALITATE

Pînă acum am considerat numai secvenţele *AE* şi nu am folosit simboluri pentru funcţii. Acum vom considera secvenţe arbitrare din calculul predicatelor şi din cînd în cînd vom utiliza simbolul pentru funcţii.

Metoda *Q*, care este o extindere a lui *Qr*, se poate explica după cum urmează. Este dezirabil (deoarece reduce timpul uzual de funcţionare), dar nu este necesar, să se facă în prealabil reducerea conectivelor funcţii logice, astfel încît o problemă să fie desfăcută în mai multe probleme simple. Pentru fiecare problemă se utilizează următorii paşi.

Pasul I. Elimină toate intrările echivalenţei ($\equiv$) în domeniul de acţiune în care figurează cuantori. Determină cuantorii pozitivi, cuantorii negativi, şi pentru fiecare cuantor pozitiv guvernat de cuantori negativi, dacă există asemenea cazuri, determină cuantorii negativi care îl guvernează. Pentru toate variabilele libere şi toţi cuantorii pozitivi fă uz de variabile distincte.

Pasul II. Înlătură toţi cuantorii şi înlocuieşte fiecare variabilă ataşată unui cuantor negativ cu un număr distinct, iar fiecare variabilă ataşată unui cuantor pozitiv guvernat de cuantori negativi înlocuieşte-o printr-un simbol de funcţie, urmat de numerele corespunzătoare cuantorilor negativi respectivi.

Pasul III. Efectuează simplificările conectivelor pînă cînd toate constantele logice sînt eliminate şi se obţine o mulţime finită de secvenţe de formule atomice.

Pasul IV. Efectuează toate substituţiile posibile în aceste secvenţe, obţinînd rezultatele S_1, S_2, S_3 etc. Secvenţa iniţială este teoremă, dacă şi numai dacă una dintre S_1, $S_1 \vee S_2$, $S_1 \vee S_2 \vee S_3$ etc. este o tautologie în cadrul funcţiilor de adevăr.

Substituţiile de efectuat sînt întrucîtva mai complicate decît cele din fragmentul *AE* al calculului predicatelor. Termenii de bază constau nu numai din variabilele, să zicem X sau Y, care intră în formule, dar şi din apariţiile unor termeni compuşi, cum ar fi, să zicem, fX, ffX sau f^2X, fY, f^2Y, f^3X, f^3Y, f^4X etc. Numerele trebuie să fie înlocuite prin toate selecţiile posibile din aceşti termeni de bază. Dacă în secvenţă nu apar variabile, atunci se adaugă o singură variabilă X.

Dăm cîteva exemple simple. Exemple mai complicate se găsesc în apendicele VI şi apendicele VII [22].

Exemplul 1.

$$\rightarrow (EY)(Z)(GXZ \supset GXY) \tag{1}$$

$$(1) \rightarrow GXf1 \supset GX1 \tag{2}$$

$$(2) \quad GXf1 \rightarrow GX1 \tag{3}$$

$$(2) \quad GXfX \rightarrow GXX \tag{4}$$

$$(2) \quad GXf^2X \rightarrow GXfX \tag{5}$$

$$(2) \quad GXf^3X \rightarrow GXf^2X \tag{6}$$

şi aşa mai departe.

Deoarece disjuncția lui (4) și (5) este deja validă, aceasta este o teoremă. În acest caz simplu, (4), (5), (6) sînt S_1, S_2, S_3, iar S_1, $S_1 \vee S_2$, $S_1 \vee S_2 \vee S_3$ se pot rescrie, pur și simplu, ca S_1 și:

$$GXfX,\ GXf^2X \to GXX,\ GXfX$$

$$GXfX,\ GXf^2X,\ GXf^3X \to GXX,\ GXfX,\ GXf^2X.$$

Exemplul 2. $(X)(EY)GXY \to (EZ)(W)GZW$ (1)

(1) $G1f1 \to G2g2$ (2)

$GXfX \to GXgX$ (S_1)

$GfXf^2X \to GXgX$ (S_2)

$GXfX \to GfXgfX$ (S_3)

$GfXf^2X \to GfXgfX$ (S_4)

și așa mai departe.

În acest exemplu, termenii de bază sînt X, fX, gX, fgX, gfX, f^2X, g^2X, fg^2X, gf^2X, f^2gX, g^2fX, f^3X, g^3X etc. Intuitiv, se poate vedea că n-are importanță ce termeni de bază substituim pentru 1 și 2: oricum, nu putem obține o disjuncție care să fie tautologie. Așadar, indiferent de cum procedăm nu putem obține vreodată un antecedent de forma $G\alpha f\beta$ sau un consecvent de forma $G\alpha f\beta$. Deci secvența considerată nu este o teoremă din Q.

O altă procedură Q', care este mai direct legată de metoda standard elaborată de Herbrand, constă în a efectua substituțiile îndată după eliminarea cuantorilor. În apendicele VI se dă o demonstrație a exemplului 3 după această metodă. Este evident că Q' este o extindere a lui Qq, după cum Q este o extindere a lui Qr. Deși atunci cînd problemele se rezolvă manual nu este clar care dintre Q și Q' este mai avantajos, se presupune că pentru mașină Q este mai puțin greoi, mai ales dacă testul final se programează după schema sugerată în apendicele VII.

Pentru a justifica procedurile Q și Q', adică pentru a demonstra că ele sînt corecte și complete, avem nevoie să introducem unele modificări minore în raționamentele standard ale lui Skolem și Herbrand. Echivalența celor două proceduri se stabilește printr-un raționament de același tip ca cel utilizat pentru echivalența sistemelor Qq și Qr. Prin urmare, este suficient să demonstrăm corectitudinea și completitudinea lui Q'.

Corectitudinea, adică faptul că fiecare secvență demonstrabilă este validă, rezultă de îndată. Fiind dată o demonstrație după metoda Q', adică o disjuncție de substituții care este a tautologie, putem deriva o secvență echivalentă cu secvența inițială, afară de cazul cînd fiecare formulă din secvență este în formă *prenex*. Să luăm exemplul 1. Demonstrația lui Q' constă doar în înlocuirea liniilor (3) — (6) din demonstrația de mai sus prin linia

(i) $\to GXfX \supset GXX,\ GXf^2X \supset GXfX.$

care este o tautologie. Cu regulile uzuale pentru cuantori obţinem de aici:

$\rightarrow GXfX \supset GXX,\ (Z)(GXZ \supset GXfX)$

$\rightarrow GXfX \supset GXX,\ (EY)(Z)(GXZ \supset GXY)$

$\rightarrow (Z)(GXZ \supset GXX),\ (EY)(Z)(GXZ \supset GXY)$

$\rightarrow (EY)(Z)(GXZ \supset GXX),\ (EY)(Z)(GXZ \supset GXY)$

$\rightarrow (EY)(Z)(GXZ \supset GXX).$

Se poate observa că, deoarece pentru cuantorul universal se introduce de fiecare dată un termen nou, şi anume fX, f^2X etc. putem reintroduce întotdeauna acest cuantor succesiv, fără a încălca restricţia că termenul care se înlocuieşte cu Z nu trebuie să fie liber nicăieri. Strict vorbind, termenii fX, f^2X etc. trebuie, la început, să fie înlocuiţi prin variabile noi, să zicem U, V etc. Atunci linia (i) rămîne validă în cadrul funcţiilor de adevăr, iar demonstraţia care rezultă pentru secvenţa iniţială din exemplul 1 va fi în întregime conformă cu regulile uzuale pentru cuantori [23].

Completitudinea lui Q' se poate demonstra utilizînd idei cu care sîntem familiarizaţi din logica matematică [24]. Vrem să demonstrăm că dacă nu există o demonstraţie, atunci negaţia secvenţei respective este realizabilă într-un domeniu numărabil 1, şi deci secvenţa iniţială nu este validă. Să considerăm exemplul 2 unde nici unul din rezultatele S_1, $S_1 \vee S_2$, $S_1 \vee S_2 \vee S_3$ etc. nu este valid, cu alte cuvinte, pentru fiecare disjuncţie există atribuiri de valori de adevăr care o determină să ia valoarea fals. Deoarece fiecare disjuncţie ulterioară conţine ca parte toate disjuncţiile anterioare, o atribuire care dă valoarea fals lui $S_1 \vee \ldots \vee S_n$ (s-o numim D_n) dă valoarea fals tuturor D_i cu $i < n$. Cu alte cuvinte, există o atribuire de valori de adevăr care falsifică D_1 şi pentru fiecare n există o atribuire care falsifică D_n şi are o extindere care falsifică D_{n+1}. În cazul simplu al exemplului 2 avem:

D_1 este falsificat, dacă $GXfX$ este adevărat, dar $GXgX$ este fals,

D_2 este falsificat, dacă în plus $GfXf^2X$ este adevărat,

D_3 este falsificat, dacă în plus $GfXgX$ este fals,

D_4 este falsificat, dacă în plus $GfXf^2X$ este adevărat şi aşa mai departe.

În general, avem o structură de arbore infinit, astfel încît apare o mulţime finită de noduri care falsifică D_1 şi dintre care cel puţin unul are extinderi sau noduri la nivelul al doilea, care falsifică D_2; printre nodurile din nivelul al doilea (adică atribuirile de valori de adevăr care falsifică D_2), cel puţin unul are extinderi care falsifică D_3 şi aşa mai departe. Atunci, conform cu lema infinitului (*Unendlichkeitslemma*, [25]) există un drum infinit, adică o atribuire infinită de valori de adevăr care falsifică simultan D_1, D_2, ...,. Astfel, deoarece din fiecare nod porneşte o mulţime finită (eventual vidă) de ramuri imediate şi deoarece există o infinitate de drumuri, trebuie să apară un nod a_1 la nivelul întîi, care intervine într-o infinitate de drumuri şi dintre nodurile de la nivelul al doilea, care sînt în număr finit, trebuie să existe cel puţin un nod a_2, care intervine într-o infinitate de drumuri.

Aceasta este adevărat pentru fiecare nivel în parte și deci a_1, a_2, a_3, ... determină un drum infinit. Dar aceasta nu mai este adevărat, în general, atunci cînd dintr-un nod dat pornesc o infinitate de ramuri. De exemplu, nu există un drum infinit în „graful propagării", unde există un nod la nivelul întîi (originea) de la care pornesc drumuri de lungime n, pentru fiecare n dat, toate aceste drumuri neavînd alte puncte comune decît originea.

O atribuire care falsifică D_1, D_2 ... simultan este un model pentru negarea, să zicem, a exemplului 2:

$$(X)(EY)GXY \,\&\, \sim (EZ)(W)GZW,$$

sau

$$(X)[(EY)GXY \,\&\, (EW) \sim GXW]. \qquad (N)$$

Așadar, aici indivizii sînt X, fX, gX, f^2X, g^2X, fgX etc. și am stabilit o interpretare a lui G, astfel încît pentru orice individ a există un individ b, și anume fa, și un individ c, și anume ga, astfel încît $Gafa \,\&\, \sim Gaga$. Deci, în acest domeniu, cu acest G, negația N a exemplului 2 este valabilă și exemplul 2 nu este valid.

Nu am scris încă un program pentru metoda Q sau pentru metoda Q'. Pe cît se pare anumite proceduri auxiliare vor fi utile pentru reducerea timpului de funcționare și extinderea domeniului de aplicație. De exemplu, pare dezirabil să separăm domeniile de acțiune ale diferiților cuantori, atunci cînd acest lucru este posibil, deși nu este nemijlocit evident că aducerea prealabilă a secvenței la forma miniscopică poate fi întotdeauna realizabilă. În program se pot introduce cu ușurință și cu folos și alte simplificări, cum ar fi înlăturarea din conjuncții a termenilor tautologici sau care se repetă. În general, limitările practice ale mașinii impun, cu necesitate, o anumită reducere a numărului de probleme rezolvabile. Mașina va trebui să-și recunoască înfrîngerea ori de cîte ori timpul de lucru este prea lung sau volumul dispozitivului de memorizare este prea mic. Cînd intervin asemenea situații, înainte de a renunța la toată problema, este de dorit să încercăm alte proceduri de analiză.

O limitare intrinsecă a metodelor Q și Q' este următoarea. Diferite secvențe conduc la o axiomă de infinitate, adică o propoziție care este realizabilă într-un domeniu infinit, dar nu este realizabilă în nici un domeniu finit. Dacă dăm mașinii negația unei asemenea secvențe, metoda Q sau metoda Q' nu va furniza niciodată răspunsul negativ dorit, deoarece ca negație a axiomei infinității, această secvență este validă în orice domeniu finit, deși nu este teoremă a calculului predicatelor. Exemple de acest fel sînt următoarele:

Exemplul 6. $\rightarrow (EX)GXX,\ (EX)(Y) \sim GXY,$
$(EX)(EY)(EZ)(GXY \,\&\, GYZ \,\&\, \sim GXZ)$

Exemplul 7. $\rightarrow (EX)GXX,\ (EX)(Y) \sim GXY,$
$(EX)(Y)(EZ)(GYZ \,\&\, \sim GXZ).$

Această clasă de propoziții prezintă un interes deosebit atunci cînd urmărim să testăm consistența unui sistem formal. Majoritatea sistemelor formale

interesante vizează să fie realizabile numai în domenii infinite. Deci, dacă sistemul este consistent, atunci negația sa, deși nu este o teoremă a calculului predicatelor, este validă în fiecare domeniu finit. Așadar, chiar teoretic, metodele Q și Q' pot cel mult să descopere contradicții într-un sistem formal inconsistent, dar nu ne pot asigura că un sistem formal interesant este cu adevărat consistent.

Astfel apare dorința de a adăuga proceduri de decizie speciale, care să cuprindă unele propoziții din această clasă. În această privință, rezultatele sînt foarte neînsemnate. Se pare că unicul rezultat esențial este acel al lui Ackermann, care este aplicabil numai la o subclasă foarte restrînsă [26].

Problema eficacității metodelor Q și Q' apare în legătură cu faptul evident că dacă vreuna dintre D_1, D_2, ... este cu adevărat o tautologie, atunci omul află adesea o asemenea disjuncție în șir fără a examina în realitate disjuncțiile precedente. Se pare că e posibil să includem în program strategii comode pentru alegerea unor asemenea disjuncții. Aici dificultatea constă în găsirea unor strategii convenabile suficient de generale. În parte, aceasta este o problemă legată de chestiunea mai amplă de utilizare a teoremelor care au fost demonstrate anterior. Pînă acum, metodele pe care le-am luat în considerare în acest memoriu pornesc toate de la zero. Dacă însă trecem la discipline mai avansate, nu pare posibil ca mașina să evite recurgerea la teoreme demonstrate anterior. Să observăm că o situație analogă apare în calculul obișnuit, unde adesea este mai convenabil pentru mașină să calculeze rezultatele cunoscute decît să le caute într-un tabel situat într-o porțiune depărtată a memoriei. În rezolvarea problemelor de volum a memoriei și a timpului de acces trebuie să ne ținem de calea de mijloc, cale de aur, fără a transforma mașina într-un pedant erudit sau într-un copil prodigios și ignorant.

§ 12. CONCLUZII

Țelul inițial al autorului consta în a lua asemenea manuale matematice, cum sînt fundamentele de analiză ale lui Landau [27], elementele de teorie a numerelor ale lui Hardy și Wright [28], elementele de analiză ale lui Hardy [29], bazele geometriei proiective ale lui Veblen — Young [30] sau volumele lui Bourbaki și să determine mașina să formalizeze toate demonstrațiile (să acopere toate lacunele din demonstrații). Scopul acestui memoriu este de a relata lucrările recente asupra logicii de bază, ca activitate preliminară pentru acest proiect.

Obiectivul restrîns era limitat la un program de funcționare pentru calculul propozițional și pentru o porțiune considerabilă din calculul predicatelor. S-au descris destul de exact metodele cu ajutorul cărora mașina abordează calculul predicatelor în întregimea sa. Un rezumat al rezultatelor și o comparație cu lucrările precedente din acest domeniu le-am dat în introducere și nu le vom mai repeta aici.

Autorul consideră că interesul principal al lucrărilor despre care relatăm aici nu constă atît de mult în obținerea cîtorva rezultate particulare, care într-o anumită privință sînt mai tari decît cele așteptate (de exemplu, în ce privește viteza care poate fi atinsă și volumul relativ mic de memorizare care este necesar), cît în ilustrarea marilor posibilități ale mașinii într-un

domeniu destul de amplu de cercetare și învățare. Diferite probleme de același tip ne vin în minte.

Se cunosc proceduri de decizie pentru calculul propozițional intuiționist și pentru calculul propozițional modal; dar adesea ele sînt prea lungi pentru a fi manipulate manual [31]. Se pare că este posibil și dezirabil să codăm aceste proceduri într-o manieră asemănătoare cu aceea a sistemelor clasice ale logicii. Calculul intuiționist al predicatelor cu subdomeniile sale decidabile, cum ar fi subdomeniul propozițiilor în formă *prenex*, poate de asemenea să fie susceptibil de o asemenea abordare. Deoarece eficiența procedurii de decizie prin demonstrație din programul I depinde de eliminarea lui *modus ponens* (regula detașării), o chestiune conexă din logică este de a stabili sistemele libere de tăietură pentru diferite sisteme parțiale ale calculului propozițional, precum și pentru diferitele sale alternative.

Pentru construirea diferitelor sisteme de calcul propozițional și de logică modală s-a consumat un volum de muncă destul de însemnat. Problemele de completitudine și independență sînt rezolvate adesea prin metode care sînt în mare măsură mecanizabile și chiar fără o mare complexitate. Aceasta sugerează că multe rezultate din acest domeniu, relatate, de exemplu, în cartea lui Prior [32], se pot obține prin mijloace mecanice. Fiind dat un sistem, pentru a-i determina independența și completitudinea (adică neindependența tuturor axiomelor unui sistem complet dat), putem simultan să studiem demonstrațiile și matricele folosite pentru demonstrațiile de independență și să ne oprim atunci cînd am obținut o derivare sau o matrice care stabilește independența formulei considerate. Este adevărat că Linial și Post [33] au demonstrat că această clasă de probleme este indecidabilă, astfel încît nu putem avea siguranța că putem întotdeauna să rezolvăm problema particulară din cazul respectiv. Totuși ne putem aștepta ca această procedură să funcționeze într-un mare număr de cazuri. Singura dificultate practică o prezintă regulile de *modus ponens*. Cînd avem la dispoziție formulări echivalente libere de tăieturi, este mai lesne să facem apel pentru o asemenea cercetare matematică simplă la ajutorul mașinilor. În caz contrar, strategiile propuse de Newell-Shaw și Simon și-ar găsi aici un domeniu de aplicație mai puțin vast.

Un proiect care prezintă mai mult interes din punct de vedere matematic este de a avea mașini care să lucreze în teoria numerelor. Aici avem două alternative posibile: utilizarea sau evitarea cuantorilor. Se știe din logica matematică că teoria obișnuită a numerelor se poate dezvolta în mare măsură fără a face apel la cuantori. Din discuția care s-a efectuat în cursul memoriului de față rezultă, în mod clar, că cuantorii servesc în fond pentru a înlocui o clasă nedeterminată de simboluri funcționale. În teoria numerelor, aceste simboluri funcționale se pot înlocui de obicei prin simboluri funcționale specifice, care se introduc cu ajutorul definițiilor recursive. Deoarece acestea sînt mai particulare și adesea intuitiv mai familiare, se pare că este plauzibil ca evitarea cuantorilor să fie avantajoasă. Pe de altă parte, s-ar putea întîmpla să fie mai convenabilă utilizarea cuantorilor existențiali cu evitarea utilizării cuantorilor de ambele specii („toți" și „unii"), deoarece tocmai aceasta este sursa principală a complexității calculului predicatelor.

Dacă vrem să demonstrăm că rădăcina pătrată a lui 2 nu este număr rațional, aceasta se poate enunța în forma cu variabile libere

$$2Y^2 \neq X^2$$

și se poate scrie o demonstrație fără utilizarea cuantorilor. Pe de altă parte, dacă vrem să demonstrăm că există o infinitate de numere prime, pare firese să formulăm teorema astfel:

$$(EX)(Y < X \,\&\, X \text{ este un număr prim}).$$

În fond, demonstrația uzuală ne furnizează o funcție recursivă simplă f, astfel încît este adevărat că:

$$Y < fY \,\&\, fY \text{ este un număr prim.}$$

Dar înainte de a obține demonstrația și funcția necesară, este convenabil să utilizăm cuantorul (EX) care servește pentru a exprima problema că se caută o funcție încă necunoscută.

În legătură cu aceasta este interesant să facem cîteva observații generale cu privire la natura proprietăților desfășurate în diferite proceduri de demonstrație. O însușire de mare atracție a sistemului P ca procedură de demonstrație constă în aceea că fiind dată o secvență, toate rîndurile demonstrației respective, sînt, în esență, părți ale secvenței. Drept urmare, sarcina de a căuta o demonstrație este restrînsă din capul locului, astfel încît, cel puțin teoretic vorbind, putem decide întotdeauna dacă există ori nu o demonstrație. Aceasta contrastează în mod vădit cu procedurile de demonstrație pentru calculul propozițional care utilizează *modus ponens*. Acolo, fiind dat q urmărim să căutăm un p astfel încît acest p cît și $p \supset q$ să fie teoreme. Aici nu intervine vreo restricție cu privire la lungimea sau complexitatea lui p. Ceea ce realizează formularea liberă de tăietură este o metodă astfel încît pentru orice demonstrație printr-o metodă desfășurată va exista o demonstrație corespunzătoare fără desfășurare și viceversa.

Deoarece pentru calculul predicatelor sau pentru teoria uzuală a numerelor nu există proceduri de decizie, rezultă că proprietățile desfășurate nu pot fi eliminate în întregime din aceste discipline. Pentru calculul predicatelor, formularea liberă de tăietură concentrează proprietatea desfășurată într-un singur tip de situație, și anume: o concluzie $(EX)FX$ poate proveni din $F1$ sau $F2$ sau etc. Metoda Q dată mai sus dă întotdeauna asemenea desfășurări pentru o secvență dată, care urmează să fie demonstrată sau respinsă la capătul procesului. Aceste procedee au avantajul că ele pot direcționa cercetarea în vederea unor metode parțiale sau strategii mai eficiente, mai ales în ce privește regiunea specifică care conține sursa principală a desfășurării.

Dacă dezvoltăm teoria numerelor, fără a face apel la cuantori, acest tip de desfășurare este evitat. Dar în general nu este posibil să evităm un alt tip de desfășurare. Astfel din $fX = fY$ putem conchide $X = Y$, dar X și Y fiind dați, avem în general o infinitate de candidați pentru funcția f, astfel încît încercarea de a găsi un f care să conducă la $X = Y$ prin $fX = fY$ este o procedură de desfășurare. Atîta, despre aceste proceduri.

Teoria mulțimilor și teoria funcțiilor prezintă alte posibilități. În aceste cazuri este dezirabilă utilizarea calculului predicatelor multisortat [34] ca

logică subiacentă. Deși teoretic acest lucru nu este necesar, totuși se pare că dă o mare eficiență.

După cum se știe, toate sistemele formale standard se pot formula în cadrul calculului predicatelor. În general, dacă teorema p este derivată din axiomele $A_1, ..., A_n$, atunci secvența

$$A_1, ..., A_n \rightarrow p$$

este o teoremă din calculul predicatelor. În particular, dacă un sistem cu un număr finit de axiome este inconsistent, negația conjuncției tuturor axiomelor sale este o teoremă în calculul predicatelor. (De altfel, restricția cu privire la numărul finit al axiomelor nu este esențială, deoarece, în majoritatea cazurilor, putem reformula sistemul formal astfel, încît să apară doar un număr finit de axiome, mulțimea teoremelor fiind substanțial aceeași.) Specker a demonstrat [35] că *New Foundations* a lui Quine împreună cu axioma alegerii este inconsistent. Deci negația conjuncției acestor axiome (care sînt în număr finit) este o teoremă din calculul predicatelor. Dacă un program suficient de eficient pentru calculul predicatelor furnizează de la sine, pe o mașină suficient de mare, o demonstrație pentru aceasta, atunci vom fi încurajați să încercăm dacă nu cumva și sistemul fără axioma alegerii este inconsistent. Dacă sistemul este cu adevărat inconsistent, este probabil că demonstrația acestui fapt va fi realizată mai întîi cu ajutorul mașinii.

Pînă acum s-a spus puțin cu privire la strategiile particulare. În teoria numerelor ne lovim adesea de problema stabilirii unei formule, după care să facem inducția. Aici, strategia evidentă ar fi de a încerca mai întîi să utilizăm ca formulă de inducție întreaga concluzie, iar apoi diferitele subformule ale concluziei care urmează să fie stabilită. Fiind dată o concluzie $(EX)FX$, pare de obicei avantajos să încercăm termenii care intervin în partea cunoscută a demonstrației sau variantele lor pentru a găsi α astfel, încît $F\alpha$. Cartea lui Polya [36] conține numeroase sugestii de strategii pentru teoria numerelor, care probabil că vor fi utile atunci cînd ne vom adînci în proiectul de mecanizare a teoriei numerelor. Proceduri auxiliare eficiente, cum ar fi aceea deja menționată de către Dunham, Fridshal și Sward, pentru calculul propozițional, vor fi neîndoielnic de utilitate în ce privește scurtarea timpului de funcționare, atunci cînd vom încerca să formalizăm demonstrațiile sau să demonstrăm teoreme în domenii mai elaborate.

Deși formalizarea demonstrațiilor (cunoscute sau conjecturate) și demonstrarea unor teoreme sînt noi operații strîns legate, totuși este rezonabil să presupunem că, pentru mașină, primul tip de probleme este mai ușor. De aceea, autorul consideră că mașinile vor deveni mult mai repede de utilitate în cercetarea matematică, dar nu pentru a demonstra teoreme noi, ci pentru a formaliza și a detalia pașii demonstrațiilor, să zicem din manuale, la un nivel mai riguros decît în *Principia*, sau pe cele din memorii tehnice, la nivelul celor din manuale, sau pe cele din rezumate la nivelul celor din memorii tehnice.

Selecționarea conjecturilor sau teoremelor interesante și a definițiilor utile este mult mai greu mecanizabilă. De exemplu, programul II descris mai sus dă numai rezultate foarte slabe. Ar fi interesant de obținut rezultate mai bune în această direcție. Însă în domenii mai elaborate, problema pare să prezinte o complexitate de alt ordin.

Dacă utilizăm o mașină pentru a stabili o mare masă de demonstrații, atunci apar anumite teste mecanice în ce privește importanța și rolul central al conceptelor și teoremelor. Dacă o anumită teoremă sau o anumită expresie intervine frecvent, atunci este dezirabil să considerăm că teorema este interesantă sau să introducem o definiție pentru expresie. Dar pe asemenea criterii nu se poate conta. Numărul finit al demonstrațiilor tipărite la un moment dat poate forma o clasă determinată pe baza unei caracteristici formale de natură accidentală. Dacă nu avem din capul locului o normă acceptabilă pentru ordonarea demonstrațiilor care trebuie să fie obținute, este greu să justificăm pe această cale afirmația că anumite teoreme sînt interesante.

Un criteriu mai stabil ar fi următorul. O formulă care este scurtă, dar nu poate fi demonstrată decît prin demonstrații lungi, este o teoremă „adîncă". O expresie scurtă, care este echivalentă numai cu expresii foarte lungi este un concept „bogat".

Desigur că în situațiile normale ne ghidăm după obiective cu mai puține restricții. Avem un corp fix de concepte și teoreme care pentru motive bine întemeiate este considerat ca prezentînd interes („arhiva cunoașterii matematice alcătuită prin efortul cumulat al gîndirii umane"). Pentru asemenea corp, teoretic este posibil să selecționăm în mod mecanic teoremele și conceptele importante, precum și să găsim demonstrații alternative elegante. Dar, chiar și în acest caz, privim înapoi. Nu este ușor să găsim un criteriu mecanizabil pentru detectarea a ceea ce ocupă în matematică un rol central. De exemplu, este greu de a găsi criteriul potrivit pentru domeniile de aplicație articulată.

O altă porțiune a matematicii constă în dezvoltarea unei discipline din alta. De exemplu, teoria numerelor naturale, teoria numerelor reale se pot dezvolta din teoria mulțimilor. Dacă teoremele sînt generate mecanic din teoria mulțimilor, atunci orice mulțime de teoreme izomorfe cu axiomele pentru numerele reale (respectiv pentru numerele naturale) determină expresii care pot fi luate ca definiții pentru conceptele de bază ale teoriei numerelor reale respectiv ale teoriei numerelor naturale. În asemenea cazuri putem spune că mașinile pot descoperi și definiții.

Adesea s-a observat că mașina nu poate să facă decît ceea ce i se spune. Deși acest lucru este adevărat, trebuie însă să evităm ambiguitatea. Putem spune mașinii să facă un calcul, să găsească o demonstrație, să aleagă o teoremă „adîncă" etc. Problema principală mai curînd a utilizării decît a construirii mașinilor este neîndoielnic a spune mai multe lucruri în termeni mecanici.

S-a spus că limitările mașinii reies din nepriceperea ei de a scrie scrisori de dragoste. Aceasta depinde de calitatea scrisorilor de dragoste care urmează să fie compuse. Dacă se consideră scrisorile obișnuite date în manuale, mașina poate, desigur, să scrie anumite scrisori mai repede decît să demonstreze o teoremă interesantă. Dacă avem în vedere imaginea lui Don Juan din anumite filme, apoi mașina poate firește să repete fiecărei femei cele cîteva propoziții flatante.

Dacă comparăm experimentele care urmăresc să arate ce poate mașina cu cercetările științifice uzuale, experimentarea cu mașina pare mult mai aproape de inginerie decît de fizică, întrucît nu avem de a face cu obiecte din natură, ci cu construcții artificiale și întrucît mai degrabă aplicăm teorii

decît le descoperim. Dar, pe de altă parte, mașinile de calcul constituie un unicat printre obiectele făcute de om, în ce privește potențialitățile lor care sînt mult mai puțin clare pentru cel care le produce. Încercînd să determinăm ce este în stare o mașină, sîntem puși în fața unei probleme cam de același tip ca în psihologia animală sau umană. Sau, pentru a-l cita pe Dunham, sîntem aproape întotdeauna puși în fața problemei de a stabili ce este o mașină.

Termenul suspicios de agresiv de „matematică mecanică" nu este lipsit de atracție pentru specialistul în logică matematică. Printre matematicieni se consideră, în mod curent, că logicienii o dată angajați în formalizare se ocupă cu tot felul de fleacuri. Este suficient să știi, spun matematicienii, că demonstrațiile pot fi formalizate. La ce să ne mai ostenim pentru a face exacte formalizările sau chiar pentru a studia formalizările date? Logicienilor le vine adesea greu să dea o justificare convingătoare pentru ocupația și preocupările lor. Se poate oferi scuza unui temperament care vrea să tabuleze toate scorurile unui joc de base ball numai pentru a avea în arhivă o dare de seamă completă. Mașinile însă par să ofere, mai mult sau mai puțin după eveniment, o motivare bună pentru formalizare. Deși mulți matematicieni n-au învățat niciodată calculul predicatelor, pentru mașină pare foarte dificil să facă matematică serioasă, fără a se ocupa în prealabil cu logica subiacentă într-un mod explicit. În timp ce ființele umane sînt obosite și plictisite de prea multă rigoare și rigiditate, mașina pretinde instrucțiuni în întregime explicitate.

S-ar părea ca și cum logicienii ar fi lucrat cu ficțiunea unui om de mare hărnicie și cu totul lipsit de imaginație, care nu poate decît să urmeze orbește regulile, iar după aceea ficțiunea și-a găsit încarnarea în mașină. Acum, tendința spre o exactitate neomenească nu mai apare ca un non sens, ci capătă direcție și justificare. Se poate spune chiar că a căpătat o nouă viață programul cu privire la *Entscheidungsproblem* al lui Hilbert, program pe care Neumann îl considera cu totul aruncat peste bord, datorită descoperirilor lui Gödel. Deși nu este posibilă o procedură de decizie universală pentru toate problemele matematice, se pare că formalizarea promite că mașinile vor prelua o mare parte a lucrărilor care mănîncă, în prezent, timpul de cercetare al matematicienilor.

Folosind metode îmbunătățite, autorul a reușit de curînd să demonstreze, în aproximativ 4 min, toate teoremele din *9 — *13 din *Principia*, incluzînd aici timpul de tipărire. Rezultatele conțin 47 pagini de cîte 60 de rînduri. Aceste rezultate și altele conexe vor fi înfățișate în viitorul apropiat.

Note adiționale. Printre lucrările recente în legătură cu aceste probleme semnalăm un memoriu al lui Gilmore în „IBM Journal (1960), un memoriu al lui Prawitz și alții și un memoriu al lui Davis și Putnam, amîndouă în „ACM Journal" (1960), precum și un memoriu al autorului (Partea I, *ACM communication*, 1960, pp. 220—234; Partea II *Bell Systems Journal*, 1961, pp. 2—41).

În ce privește posibilitatea unei demonstrații, fără utilizarea cuantorilor, a iraționalității lui 2 (p. 248) ea este adevărată, numai dacă se admite, în principiu, inducția extinsă la variabile libere. Un studiu concludent al acestei

chestiuni se găsește în lucrarea încă nepublicată a lui Shepherdson *Principiul inducției în sistemele cu variabile libere de teoria numerelor.*

Cred că prezintă interes să semnalăm că putem obține o formulare simplă a calculului propozițional clasic, folosind numai implicația. De exemplu, dacă utilizăm $p \rightharpoonup (q \rightharpoonup r)$ ca p, $q \rightharpoonup r$ și $\rightharpoonup ((p \rightharpoonup q) \rightharpoonup q)$ ca p, q, și iterăm; putem apoi identifica $\supset$ cu $\rightharpoonup$ și utiliza $P1$, $P4$a, $P4$b (pag. 224) ca sistem complet. Avantajul unei asemenea formulări constă în aceea că ea furnizează direct atît o demonstrație de completitudine, cît și o procedură de decizie.

APENDICE

APENDICE 1

Exemple de teoreme tipărite după programul I

```
2*45/FDPQ-FP                                                    1
1/-FP, DPQ                                                      2
2/P-DPQ                                                         3
3/P-P, Q                                                        4
        VALID                                                   4
                        Q.E.D.
5*21/-ICEP. FQ..BPQ                                             1
1/CFP · FQ-BPQ                                                  2
2/FP, FQ-BPQ                                                    3
3/FQ-BPQ, P                                                     4
4/-BPQ, P, Q                                                    5
5/P-Q, P, Q                                                     6
        VALID                                                   6
5/Q-P, P, Q                                                     7
        VALID                                                   7
                        Q.E.D.
2*31/DP. DQR-DPQ, R                                             1
1/P-DPQ, R                                                      2
2/P-P, Q, R                                                     3
          VALID                                                 3
1/DQR-DPQ, R                                                    4
4/Q-DPQ, R                                                      5
5/Q-P, Q, R                                                     6
        VALID                                                   6
4/ R-DPQ, R                                                     7
7/R-P, Q, R                                                     8
        VALID                                                   8
                        Q.E.D.
4*45/-BP..CP.DPQ                                                1
1/P-CP. DPQ                                                     2
2/P-P                                                           3
        VALID                                                   3
```

2/*P*—*DPQ* 4
4/*P*—*P*, *Q* 5
VALID 5
1/*CP* · *DPQ*—*P* 6
6/*P*, *DPQ*—*P* 7
7/*P*, *P*—*P* 8
VALID 8
7/*P*, *Q*—*P* 9
VALID 9
Q.E.D.
5*22/—*BFBPQ...DCP.FQ..CQ.FP* 1
Q.E.D.
5*23/—*BBPQ...DCPQ..CFP.FQ* 1
Q.E.D.
5*24/—*BFDCPQ..CFP.FQ...DCP.FQ..CQ.EP* 1
Q.E.D.
*7. Preliminarii la calculul predicatelor 1
7*1/*IG2.H2*, *GX*, *KX*—*CH3.K3* 1
1/*H2*, *GX*, *KX*—*CH3*, *K3* 2
2/*H2*, *GX*, *KX*—*H3* 3
NEVALID 3
2/*H2*, *GX*, *KX*—*K3* 4
NEVALID 4
1/*GX*, *KX*—*CH3.K3*, *G2* 5
5/*GX*, *KX*—*H3*, *G2* 6
NEVALID 6
5/*GX*, *KX*—*K3*, *G2* 7
NEVALID 7
NEVALID

APENDICE II

Exemple de teoreme tipărite după programul II

/—*BDPR. R, CDPQ.P*
/*CCPQ. R*—*BIPR. P*
/*CCPQ. P*—*BIPR. R*
/*CBPQ. Q*—*CBPP. Q*
/*CCPP. Q*—*CIPP. Q*
/*CCPP. R*—*CIPP. P*
/*CDPP. R*—*CDPP. P*
/*BBPP. P*—*DCPQ. P*
/*DCPQ. P*—*BBPP. P*
/*BIPP. P*—*DDPP. P*
/*DDPP. P*—*BIPP. P*
/*CIPR. P*—*BDPQ. P*
/*BIPQ. P*—*CDPR. P*
/*CCPP. R*—*BIPQ. Q*
/*CCPR. Q*—*BIPQ. R*
/*CCPR. P*—*BBPR. P*
/*CBPQ. P*—*CCPP. P*
/*CDPP. P*—*CIPP. P*
/*CIPP. P*—*CDPP. P*
/*BBPP. R*—*DBPQ. R*
/*BCPP. Q*—*DBPQ. P*
/—*BDPP. R, DDPP. R*
/*BIPP. P*—*DDPP. Q*
/*BIPP. R*—*DCPP. R*
/*BBPQ. P*—*DCPP. Q*
/*BBPQ. Q*—*DCPP. P*
/*DCPP. P*—*BBPQ. Q*
/—*BDPQ. P, CIPR. Q*
/*BIPQ. P*—*CDPR. Q*
/*CDPR. P*—*BIPQ. Q*
/*CCPR. Q*—*BBPR. P*
/*CBPR. R*—*BBPR. R*
/*CCPQ.P*—*CBPP.Q*
/*CBPQ. R*—*CBPP. R*
/*CBPQ. Q*—*CCPP. P*
/*CCPP. Q*—*CBPQ. P*
/*CBPQ. P*—*CCPP. Q*
/*CCPP. R*—*CIPP. R*
/*CDPP. Q*—*CIPP. P*
/*BBPP. Q*—*DCPQ. Q*
/*DCPQ. Q*—*BBPP. Q*
/*BCPP. Q*—*DBPQ. Q*
/*BIPP. P*—*DDPP. R*
/*BIPP. Q*—*DDPP. Q*
/*BBPQ. Q*—*DCPP. Q*
/*CIPR. Q*—*BDPQ. Q*
/*CIPR. P*—*BDPQ. R*
/*CDPR. Q*—*BIPQ. Q*

/CBPR. P−BCPR. P
/CIPQ. P−BDPR. P
/BIPR. P−CDPQ. P
/CCPQ. R−BIPR. Q
/CCPQ, Q−BIPR. R
/CCPQ. P−CBPP. P
/BIPR. P−CDPQ. R
/CDPQ. P−BIPR. R
/CCPQ. R−CBPP. P
/CCPQ. Q−CBPP. Q
/CCPP. Q−CBPQ. Q
/CBPQ. Q−CCPP. Q
/CDPP. Q−CIPP. Q
/CDPP. R−CIPP. P
/BBPP. P−DDPQ. P
/BCPP. Q−DBPQ. R
/BBPQ. Q−DCPP. R
/−BCPQ. P, DCPP. P
CCPR. Q−BBPR. R
/CCPR. P−BCPR. P
/CBPR. Q−BCPR. R
/CBPR. P−BDPR. P
/CBPP. P−CDPQ. P
/CDPQ. P−CBPP. P
/CCPQ. R−CBPP. Q

/CBPR. Q−BCPR. P
/−BCPR. R, CIPQ. R
/CIPQ. P−BDPR. Q
/CDPQ. R−BDPR. R
/CCPQ. R−BIPR. R
/CCPQ. Q−CBPP. P
/CCPQ. P−CCPP. P
/CBPQ. P−CDPP. P
/BBPP. P−DDPQ. Q
/BBPP. Q−DDPQ. Q
/BBPP. R−DCPQ. R
/BDPP. Q−DBPQ. P
/BIPP. R−DDPP. R
/BBPQ. P−DDPP.Q
/BBPQ. Q−DDPP. P
/DDPP. P−BBPQ. Q
/−BCPQ. P, DCPP. Q
/DCPP. P−BCPQ. Q
/CIPR. P−BIPQ. Q
/CCPR. R−BBPR. R
/CCPR. Q−BCPR. P
/CBPR. R−BCPR. R
/CBPR. Q−BDPR. P
/CIPQ. R−BDPR. R
/CDPQ. R−BIPR. R

/CCPR. R−BBPR. P
/CCPR. Q−BBPR. Q
/CCPR. P−BBPR. R
/CBPR. R−BCPR. P
/CBPR. P−BCPR. R
/−BDPR. P, CIPQ. R
/CCPQ. R−CBPP. R
/CCPQ. Q−CCPP. P
/CCPP. Q−CCPQ. P
/CCPQ. P−CCPP. Q
/CBPQ. Q−CDPP. P
/CDPP. Q−CBPQ. P
/CBPQ. P−CDPP. Q
/CDPP. R−CIPP. R
/BBPP. P−DDPQ. R
/BBPP. Q−DDPQ. Q
/BDPP. Q−DBPQ. Q
/BBPQ. Q−DDPP. Q
/−BCPQ. P, DCPP. R
/−BBCPQ. Q, DCPP. Q
/CIPR. Q−BIPQ. Q
/BBPR. P−CDPR. R
/CDPR. R−BBPR. P

APENDICE

Exemple de teoreme tipărite în programul III (fără cuantori)

*13. IDENTITATE		1
13*1 /=XY−IGX. GY		1
1/GX,=XY−GY	=VA	2
Q.E.D.		
13*12/=XY−BGX. GY		1
1/GX,=XY−GY	=VA	2
1/GY,=XY−GX	=VA	3
Q.E.D.		
13*13/GX,=XY−GY	=VA	1
Q.E.D.		
13*14/GX, FGY−F=XY		1
1/GX−F=XY, GY		2
2/=XY, GX−GY	=VA	3
Q.E.D.		
13*15/−=XX	=VA	
Q.E.D.		
13*16/−B=XY.=YX		1
1/=XY−=YX	=VA	2

$1/=YX-=XY$	=VA	3
Q.E.D.		
$13*17/=XY,\ =YZ-=XZ$	=VA	1
Q.E.D.		
$13*171/=XY,\ =XZ-=YZ$	=VA	1
Q.E.D.		
$13*172/=YX,\ =ZX-=YZ$	=VA	1
Q.E.D.		
$13*18/=XY,\ F=XZ-F=YZ$		1
$1/=XY-F=YZ,\ =XZ$		2
$2/=YZ,\ =XY-=XZ$	=VA	3
Q.E.D.		
$13*194/-BCGX.=XY...CGX...CGY.=XY$		1
$1/CGX.=XY-CGX..CGY.=XY$		2
$2/GX,=XY-CGX..CGY.=XY$		3
$3/GX,=XY-GX$	VA	4
$3/GX,=XY-CGY.=XY$		5
$5/GX,=XY-GY$	=VA	6
$5/GX,=XY-=XY$	VA	7
$1/CGX..CGY.=XY-CGX.=XY$		8
$8/GX.\ CGY.\ =XY-CGX.\ =XY$		9
$9/GX,\ GY,=XY-CGX.\ =XY$		10
$10/GX,\ GY,\ =XY-GX$	VA	11
$10/GX,\ GY,\ =XY-=XY$	VA	12
Q.E.D.		
$13*3/DGY.\ FGY-BDGX.\ FGX..D=XY.\ F=XY$		1
$1/GY-BDGX.\ FGX..D=XY,\ F=XY$		2
$2/DGX.\ FGX,\ GY-D=XY.\ F=XY$		3
$3/GX,\ GY-D=XY.\ F=XY$		4
$4/GX,\ GY-=XY,\ F=XY$		5
$5/=XY,\ GX,\ GY-=XY$	VA	6
$3/FGX,\ GY-D=XY.\ F=XY$		7
$7/GY-D=XY.\ F=XY,\ GX$		8
$8/GY-=XY,\ F=XY,\ GX$		9
$9/=XY,\ GY-=XY,\ GX$	VA	10
$2/D=XY.\ F=XY,\ GY-DGX.\ FGX$		11
$11/=XY,\ GY-DGX.\ FGX$		12
$12/=XY,\ GY-GX,\ FGX$		13
$13/GX,\ =XY,\ GY-GX$	VA	14
$11/F=XY,\ GY-DGX.\ FGX$		15
$15/GY-DGX.\ FGX,\ =XY$		16
$16/GY-GX,\ FGX,\ =XY$		17
$17/GX,\ GY-GX,\ =XY$	VA	18
$1/FGY-BDGX.\ FGX..D=XY.\ F=XY$		19
$19/-BDGX.\ FGX..D=XY.\ F=XY,\ GY$		20
$20/DGX.\ FGX-D=XY.\ F=XY,\ GY$		21
$21/GX-D=XY,\ F=XY,\ GY$		22
$22/GX-=XY,\ F=XY,\ GY$		23
$23/=XY,\ GX-=XY,\ GY$	VA	24

21 /*FGX−D=XY. F=XY, GY*		25
25 /*−D=XY. F=XY, GY, GX*		26
26 /*−=XY, F=XY, GY, GX*		27
27 /*=XY−=XY, GY, GX*	VA	28
20 /*D=XY. F=XY−DGX. FGX, GY*		29
29 /*=XY−DGX. FGX, GY*		30
30 /*=XY−GX, FGX, GY*		31
31 /*GX, =XY−GX, GY*	VA	32
29 /*F=XY−DGX. FGX, GY*		33
33 /*−DGX. FGX, GY, =XY*		34
34 /*−GX, FGX, GY, =XY*		35
35 /*GX−GX, GY, =XY*	VA	36

Q.E.D

APENDICE IV

Exemple de teoreme tipărite după programul III (porţiunea *AE* din calculul predicatelor)

10*25 /*AXGX−EXGX*		1
1 /*G1−EXGX*		2
2 /*G1−G2*	NU	2
2 /*GS−GS*	VA	3

Q.E.D.

11*26 /*EXAYGXY−AYEXGXY*		1
1 /*AYGSY−AYEXGXY*		2
2 /*GS1−AYEXGXY*		3
3 /*GS1−EXGXT*		4
4 /*GS1−G2T*	NU	5
4 /*GST−GST*	VA	5

Q.E.D.

11*501 /*BEXFAYGXY. EXEYFGXY*		1
1 /*EXFAYGXY−EXEYFGXY*		2
2 /*FAYGSY−EXEYFGXY*		3
3 /*−EXEYFGXY, AYGSY*		4
4 /*−EYFG1Y, AYGSY*		5
5 /*−FG12, AYGSY*		6
6 /*G12−AYGSY*		7
7 /*G12−GST*	NU	8
1 /*EXEYFGXY−EXFAYGXY*		9
9 /*EYFGUY−EXFAYGXY*		10
10 /*FGUW−EXFAYGXY*		11
11 /*−EXFAYGXY, GUW*		12
12 /*−FAYG3Y, GUW*		13
13 /*AYG3Y−GUW*		14
14 /*G34−GUW*	NU	15
14 /*GUW−GUW*	VA	15
7 /*GST−GST*	VA	8

Q.E.D.

$13^*22/-BEZEWC=ZX..C=WY.\ GZW...GXY$		1
$1/EZEWC=ZX..C=WY.\ GZW-GXY$		2
$2/EWC=SX..C=WY.\ GSW-GXY$		3
$3/C=SX..C=TY.\ GST-GXY$		4
$4/=SX,\ C=TY.\ GST-GXY$		5
$5/=SX,\ =TY,\ GST-GXY$	=VA	6
$1/GXY-EZEWC=ZX..C=WY.\ GZW$		7
$7/GXY-EWC=1X..C=WY.\ G1W$		8
$8/GXY-C=1X..C=2Y.\ G12$		9
$9/GXY-=1X$	NU	10
$9/GXY-C=2Y.\ G12$		11
$11/GXY-=2Y$	NU	12
$11/GXY-G12$	NU	13
$11/GXY-GXY$	VA	13
$11/GXY-=YY$	=VA	12
$9/GXY-=XX$	=VA	10

Q.E.D.

APENDICE V

diferite metode pentru calculul predicatelor AE

$(EX)(Y)(GXY \vee GYX) \rightarrow (Z)(EW)GZW$ (1)

Metoda *Qp*

(1) $GX1 \vee G1X \rightarrow GZ2$		(2)
(2) $GX1 \rightarrow GZ2$	NU	(3)
(2) $G1X \rightarrow GZ2$	NU	(4)

Aceasta nu este validă, deoarece (3) şi (4) nu sînt amîndouă valide, atunci cînd pentru (1, 2) substituim (X, X), (X, Z), (Z, X) sau (Z, Z).

Metoda *Qq*.

(1) $GX1 \vee G1X \rightarrow GZ2$		(2)
(2) $GXX \vee GXX,\ GXZ \vee GZX \rightarrow GZX,\ GZZ$		(3)
(3) $GXX,\ GXZ \rightarrow GZX,\ GZZ$	NU	(4)
(3) $GXX,\ GZX \rightarrow GZX,\ GZZ$	VA	(5)
(3) $GXX,\ GXZ \rightarrow GZX,\ GZZ$	NU	(6)
(3) $GXX,\ GZX \rightarrow GZX,\ GZZ$	VA	(7)

Aceasta sugerează imediat o simplificare, deoarece (4) şi (6), (5) şi (7) sînt identice. Secvenţa (1) nu este teoremă, deoarece (4) şi (6) nu sînt valide.

Metoda *Qr*. Funcţionează ca şi *Qp*, însă apoi testează disjuncţia celor două conjuncţii care este echivalentă cu conjuncţia lui (4), (5), (6), (7). Aşadar, iarăşi, (1) nu este validă.

APENDICE VI

Un exemplu al lui Church

Exemplul 3. $(X)(EY)\ \{[JX \equiv (JY \supset GY)] \& [GX \equiv (JY \supset HY)] \& [HX \equiv ((JY \supset GY) \supset \supset HY)]\} \rightarrow (Z)(JZ \& GZ \& HZ)$ (1)

Aceasta este o secvenţă în calculul predicatelor cu un singur loc. Ea nu este de forma AE, dar forma sa miniscopică trebuie să fie în forma AE. În consecinţă, secvenţa poate fi demon-

strată fie prin Qp, fie prin Q, dar nu prin Qq sau Qr. Se pare că este mai dificil să folosim Qp decît Q.

Pentru a aduce (1) în forma miniscopică, trebuie să eliminăm intrările echivalenţei ($\equiv$). Atunci trebuie să aducem partea fără cuantori din antecedent în forma normală disjunctivă, să distribuim (EY) şi să separăm părţile domeniului său de acţiune de orice intrare a lui (EY) care conţine variabila X. Apoi trebuie să aducem noul antecedent, mai puţin (X) în forma normală conjunctivă şi să distribuim (X) în acelaşi fel. Cititorul poate să se convingă singur cît de complicată este întreaga procedură. În consecvent, separarea cuantorilor este desigur uşoară. După ce s-a realizat separarea cuantorilor, secvenţa rezultată în forma miniscopică este foarte lungă. Paşii următori, deşi simpli, sînt de asemenea greoi.

Pe de altă parte, dacă folosim, în loc de aceasta, metoda Q, demonstraţia nu mai este atît de lungă. Manual ea este şi mai uşoară cu Q'.

$$(1)\quad J1 \equiv (Jf1 \supset Gf1),\ G1 \equiv (Jf1 \supset Hf1),$$

$$H1 \equiv ((Hf1 \supset Gf1) \supset Hf1) \to JX \,\&\, GX \,\&\, HX. \qquad (2)$$

Putem substitui pentru 1, X, fX, f^2X, f^3X etc. pentru a obţine S_1, S_2, S_3, S_4 etc. şi să testăm validitatea pentru S_1, $S_1 \vee S_2$, $S_1 \vee S_2 \vee S_3$, $S_1 \vee S_2 \vee S_3 \vee S_4$ etc.

În acest scop, este suficient să găsim o disjuncţie, astfel încît orice interpretare (atribuire de valori de adevăr) care verifică antecedenţii tuturor termenilor disjuncţiei să verifice consecvenţii tuturor termenilor disjuncţiei. Se constată că disjuncţia de la S_1 la S_7 realizează aceasta. Dacă operăm cu mîna, este mai uşor să argumentăm, de exemplu, din $JX \equiv (JfX \supset GfX)$ că dacă JX este fals atunci JfX trebuie să fie adevărată şi GfX trebuie să fie falsă. În acest chip vedem că nu este posibil ca toţi antecedenţii din S_1 pînă la S_7 să fie adevăraţi, fără ca şi consecvenţii să fie adevăraţi.

O simplă consecinţă a exemplului 1 poate arăta că uneori Qq este de preferat faţă de Qp:

Exemplul 4. $(EY)(X)\ \{[JX \equiv (JY \supset GY)]\ \&\ [GX \equiv (JY \supset HY)]\ \&\ [HX \equiv ((JY \supset GY) \supset HY)]\} \to (Z)\,(JZ \,\&\, GZ \,\&\, HZ)$.

Aceasta este în formă AE, deşi nu este în formă miniscopică. Demonstraţia este mai uşoară decît pentru exemplul 3, indiferent de metoda utilizată. Totuşi demonstraţia cu Qq pare considerabil mai scurtă decît demonstraţia cu Qp, care mai include paşi asemănători (deşi întru cîtva mai simpli) cu cei din exemplul 3. Demonstraţia cu Qq este foarte uşoară deoarece nu trebuie decît să înlăturăm cuantorii, să substituim 1 pentru Z şi să verificăm că:

$$JY \equiv (JY \supset GY),\ GY \equiv (JY \supset HY),\ HY \equiv ((JY \supset GY) \supset HY),$$

$$JZ \equiv (JY \supset GY),\ GZ \equiv (JY \supset HY),\ HZ \equiv ((JY \supset GY) \supset HY) \to JZ \,\&\, GZ \,\&\, HZ.$$

Pentru această secvenţă, verificarea este foarte uşoară. În adevăr: vrem să arătăm că dacă toţi termenii antecedentului sînt adevăraţi, atunci JZ, GZ, HZ sînt adevăraţi. Conform cu primul termen, JY şi GY sînt adevăraţi. Deci conform cu al patrulea, JZ este adevărat; conform cu al doilea HY este adevărat.

Deci, conform cu al cincilea şi al şaselea, GZ şi HZ sînt adevăraţi.

APENDICE VII

Un exemplu al lui Quine

Exemplul 5. $\to (EY)(Z)(EW)\ \{[GYX \,\&\, (GYW \,\&\, GWY)] \vee [\sim GYX \,\&\, \sim (GYZ \,\&\, GZY)]\}$ (1)

(1) $\to G1X \,\&\, (G12 \,\&\, G21),\ \sim G1X \,\&\, \sim (G1f1 \,\&\, Gf11)$ (2)

(2) $G1X \to G1X$ (3)

(2) $G1f1,\ Gf11 \rightarrow G1X$ (4)
(2) $G1X \rightarrow G12$ (5)
(2) $G1X \rightarrow G21$ (6)
(2) $G1f1,\ Gf11 \rightarrow G12$ (7)
(2) $G1f1,\ Gf11 \rightarrow G21$ (8)

Acum vrem să efectuăm substituţii pentru (3)—(8). Deoarece (3) este validă pentru toate substituţiile, o putem omite. Obţinem S_1, S_2, S_3, S_4 etc., substituind pentru (1, 2), (X, X), (X, fX), (fX, X), (fX, fX) etc. Cînd formăm fiecare rezultat al substituţiei, putem omite secvenţele valide şi repetările uneia şi aceleiaşi secvenţe, astfel încît termenii conjunctivi din S_1, S_2, S_3 sînt după cum urmează.

S_1: $GXfX,\ GfXX \rightarrow GXX$.
S_2: $GXfX,\ GfXX \rightarrow GXX;\ GXX \rightarrow GXfX;\ GXX \rightarrow GfXX$.
S_3: $GfXf^2X, Gf^2XfX \rightarrow GfXX;\ GfXX \rightarrow GfXX;\ GfXX \rightarrow GXfX;\ GfXf^2X, Gf^2XfX \rightarrow GXfX$

Se poate verifica uşor că $S_1 \vee S_2 \vee S_3$ este o tautologie. Dacă GXX este adevărată, atunci S_1 este adevărată. Dacă GXX este falsă, dar $GXfX$ sau $GfXX$ este falsă, atunci S_2 este adevărat. Dacă atît $GXfX$, cît şi $GfXX$ sînt adevărate, atunci S_3 este adevărat.

Deşi verificarea este aici uşoară, se constată că pe măsură ce numărul conjuncţiilor creşte, testul pentru disjuncţia tuturor conjuncţiilor poate să devină complicat. O metodă de testare mai uşor realizabilă se impune de la sine.

Fă două liste pentru S_1: o listă pentru antecedenţi şi una pentru consecvenţi.

(A_1) $GXfX,\ GfXX$.
(C_1) GXX.

Testează dacă fiecare şir din (C_1) e conţinut în vreun şir din (A_1). Dacă da, demonstraţia este obţinută. În caz contrar, fă două liste pentru S_2:

(A_2) $GXfX,\ GfXX;\ GXX$.
(C_2) $GXX;\ GXfX;\ GfXX$.

Testează dacă fiecare şir obţinut prin combinarea unui şir din (C_1) cu un şir din (C_2) este conţinut în fiecare şir obţinut similar din (A_1) şi (A_2). Dacă da, demonstraţia este obţinută. În caz contrar, fă două liste pentru S_3 şi continuă.

Nu e greu să ne convingem că această procedură este echivalentă cu procedura uzuală pentru testarea validităţii lui S_1, $S_1 \vee S_2$, $S_1 \vee S_2 \vee S_3$ etc.

BIBLIOGRAFIE

[1] H. Wang, *A Variant to Turing's Theory of Computing Machines*, în „Jour. Assoc. Comp. Mach.", **4**, ianuarie 1957, pp. 88—92.
[2] A. W. Burks, D. W. Warren şi J. B. Wright, *An Analysis of a Logical Machine Using Parenthesis-free Notation*, în „Math Tables and Other Aids to Computation", **8**, aprilie, 1954.
[3] G. E. Collins, *Tarski's Decision Method for Elementary Algebra*, în *„Proc. Summer Institute of Symbolic Logic at Cornell University*, 1957", p. 64.
[4] M. Davis, *A Program for Presburger's Algorithm*, în *loc. cit.*, p. 215.
[5] H. Gelernter, *Theorem Proving by Machine*, în *loc. cit.*, p. 305.
[6] De exemplu, A. Newell, J. C. Shaw şi H. A. Simon, *Empirical Explorations of the Logic Theory Machine: a Case Study in Heuristics*, *Report P*-951, Rand Corporation (March, 1957), 48 p.

[7] *Ibidem* pp. 26 şi 28.
[8] *Ibidem* pp. 8 şi 10
[9] J. Herbrand, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, în „*Travaux de la Société des Sciences de Varsovie*", nr. 33, 1930, 123 p.
[10] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, în „Math. Zeitschrift", **39**, 1934—35, pp. 176—210, 405—431.
[11] D. Hilbert şi P. Bernays, *Grundlagen der mathematik*, vol. 2, 1939.
[12] B. Dreben, *On the Completeness of Quantification Theory*, în „Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.", 38, 1952, pp. 1047—1052.
[13] E. W. Beth, *La crise de la raison et la logique*, Paris et Louvain, 1957.
[14] K. J. J. Hintikka, *Two Papers on Symbolic Logic*, în „Acta Philos. Fennica", **8**, 1955.
[15] K. Schütte, *Ein System des verknupfenden Schlissens*, în „Archiv. f. Math. Logik u. Grundlagenforschung", 2, 1956, pp. 375—387.
[16] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I., Princeton, 1956.
[17] W. V. Quine, *Methods of Logic*, New York, 1950.
[18] Herbrand, *op. cit.*, p. 21.
[19] Quine, *op. cit.*, pp. 101—107.
[20] Church, *op. cit.*, pp. 262, 46. 12 (3).
[21] Compară, de exemplu, Church, *op. cit.*, p. 249.
[22] Exemplul din apendicele VII este din Quine, *Mathematical Logic*, *180 şi *181, pp. 129—130.
[23] Compară Herbrand, *op. cit.*, cap. V.
[24] Compară, de exemplu, referatele la Schütte şi Beth.
[25] D. König, *Theorie der Graphen*, Leipzig, 1936, p. 81.
[26] Church, *op. cit.*, Case X, p. 257.
[27] E. Landau, *Grundlagen der Analysis*, Leipzig, 1930.
[28] G. H. Hardy şi E. M. Wright, *Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, 1954.
[29] G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, diferite ediţii.
[30] O. Veblen şi J. W. Young, *Projective Geometry*, 1910.
[31] Vezi, de exemplu, G. Kreisel şi H. Putnam, *Ein Unableitharkeitsbeweismethode*, în „Arkiv f. Math. Logik u. Grundlagenforschung", 3, 1957 pp. 74—78.
[32] A. N. Prior, *Formal Logic*, Oxford, 1954.
[33] S. Linial şi E. L. Post, *Recursive Unsolvability of Axioms Problems of the Propositional Calculus*, în „Bull. Am. Math. Soc.," **55**, 1949, p. 50.
[34] Vezi, de exemplu, Church, *op. cit.*, p. 339.
[35] „*Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **39**, 1953, pp. 972—975
[36] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Oxford, 1954.

CAPITOLUL X
SINTEZA CIRCUITELOR CU AJUTORUL ECUAŢIILOR BOOLEENE SECVENŢIALE

§ 1. PREZENTAREA PROBLEMELOR ŞI REZULTATELOR

În problemele standard de analiză (fiind dat un circuit, să se găsească formula lui) şi de sinteză (fiind dată o formulă să se găsească circuitul corespunzător) apare în mod intrinsec o ambiguitate, deoarece atît circuitul, cît şi formula (adică condiţiile pe care trebuie să le satisfacă) urmează să fie prezentate într-un simbolism convenabil, dar pentru aceste treburi nu există un simbolism acceptat în mod unanim. Lucrul acesta este deosebit de adevărat pentru limbajele iniţiale care exprimă condiţiile ce urmează să fie sintetizate. Desigur, cu cît limbajul este mai bogat, cu atît mai uşor este să se exprime cerinţele intuitive, dar în acelaşi timp cu atît mai greu este să obţinem o procedură sistematică de lucru cu toate condiţiile exprimate în acest limbaj. Un bun limbaj de pornire pare a fi limbajul ecuaţiilor Booleene secvenţiale, care rezultă din adăugarea la operaţiile Booleene obişnuite a unui operator secvenţial prin care se introduce elementul timp.

În acest articol vom studia problema generală a rezolvării unor atare ecuaţii pentru a obţine reprezentări explicite ale ieşirilor ca funcţii — mai precis: funcţionale — de timp şi de funcţiile de la intrare. Este uşor de văzut că, în general, asemenea ecuaţii pot avea trei feluri diferite de soluţii: soluţii deterministe, soluţii predictive (efective) şi soluţii neefective. Primele două feluri de soluţii sînt efective şi deci, într-un fel sau altul, pot fi realizate prin circuite. Noi vom da algoritmi pentru decizia rezolubilităţii şi prezentarea soluţiilor pentru diferitele sensuri ale soluţiei. Pe cît se pare, în literatură nu s-au prea studiat soluţiile de tipurile doi şi trei de mai sus. Pentru obţinerea tuturor soluţiilor deterministe există proceduri sistematice (a se vedea Friedmann [6], Burks-Wang [1], Church [4]). Dar procedura pe care o vom da mai jos pare întrucîtva mai eficientă decît metodele cunoscute. Abordarea de faţă este, în ansamblu, apropiată de cea din Burks-Wright [2] şi Burks-Wang [1].

În plus, vom discuta problema extinderii limbajului ecuaţiilor booleene secvenţiale în vederea includerii cuantorilor cu domeniul de variaţie restrîns, precum şi a unor modulo-operatori astfel, încît fiecare condiţie exprimată în limbajul îmbogăţit să poată fi transformată în mod efectiv într-o condiţie din limbajul mai restrîns. Vom examina şi o chestiune legată de aceasta: maşinile în dezvoltare, adică potenţial infinite. O definiţie exactă pentru o clasă restrînsă de asemenea maşini care să cuprindă toate maşinile Turing

în formă normală simplă, va fi enunțată, și, alternativ o nouă demonstrație a teoremei lui Kleene cu privire la forma normală a funcțiilor recursive va fi dată.

După cum veți vedea, există numeroase probleme conexe care nu sînt abordate în acest articol.

§ 2. FUNCȚIONALE ȘI ECUAȚII BOOLEENE SECVENȚIALE

Extindem algebra booleană obișnuită, introducînd o distincție între variabilele de la intrare și cele de la ieșire și adăugînd un operator de timp d, astfel încît intuitiv de exemplu, x înseamnă x_t, iar dx înseamnă x_{t+1}. Mai exact: fiecare ecuație se obține prin unirea a doi termeni cu ajutorul semnului egalității $=$, iar un termen este fie constanta 1 (deschis, adevărat) fie constanta 0 (închis, fals), sau una dintre variabilele de la intrare i, j etc. sau una dintre variabilele de la ieșire x, y etc, sau se obține din doi termeni dați A, B cu ajutorul operatorilor booleeni $'$, $\cdot$, $+$, sau cu ajutorul operatorului temporal d (de exemplu, A', $A.B$ sau AB, $A + B$, dA etc).

În ce privește operatorul temporal d, vom face uz de convenția naturală:

$d^0A = A$, $d^1A = dA$, $d^2A = ddA$ și așa mai departe.

Unele proprietăți simple ale operatorului temporal d sînt:

(2.1) $d(A') = (dA)'$, $d(AB) = (dA)(dB)$, $d(A + B) = (dA) + (dB)$.

(2.2) $d^kG(A, ..., B) = G(d^kA, ..., d^kB)$.

Sînt utile unele teoreme cunoscute din algebra booleană obișnuită (a se vedea, de exemplu, Couturat [5]).

(2.3) $A = 0, ..., B = 0$, dacă și numai dacă $A + ... + B = 0$.

(2.4) $A = 1, ..., B = 1$, dacă și numai dacă $A \cdot ... \cdot B = 1$.

(2.5) Sînt echivalente:

(1) $A = B$; (2) $AB' + A'B = 0$; (3) $AB + A'B' = 1$.

De aici rezultă imediat că orice mulțime finită de ecuații booleene este echivalentă cu o anumită ecuație unică. Așadar, nu avem nevoie să deosebim cazurile cu o singură ecuație de cele în care apar mulțimi finite de ecuații.

Pentru a ne simplifica expunerea, vom discuta, la început, ecuațiile de formă particulară

$$(S) \quad H(i, ..., j, x, ..., y, di, ..., dj, dx, ..., dy) = 0.$$

În ecuație avem m intrări și n ieșiri, iar H este o funcție booleană obișnuită cu argumentele $i, ..., dy$. Vom indica mai tîrziu cum pot fi aduse la forma (S) ecuațiile în care figurează asemenea componente ca d^2i, d^3x etc. Adesea va fi suficient să ilustrăm situația prin schema mai simplă:

$$H(i, x, y, di, dx, dy) = 0.$$

Problema generală este de a găsi funcționale, adică funcții de funcții, $x_s(i, t)$ și $y_s(i, t)$, astfel încît pentru toți i și pentru toți t să avem:

$$H(i_t, x_s(i, t), y_s(i, t)\ i_{t+1}, x_s(i, t+1), y_s(i, t+1)) = 0.$$

Enunțarea generală a problemei nu cuprinde restricții explicite cu privire la simplitatea acestor funcționale, deși unele soluții pot fi neinteresante pentru scopurile de desemnare a circuitelor. De exemplu, orice funcțională, chiar neconstructivă în cel mai înalt grad, de i și t, va satisface o ecuație identică ca

$$ixydidxdy(i' + x' + y' + di' + dx' + dy') = 0,$$

de îndată ce se substituie x și y.

Pentru a pune în evidență funcționalele care prezintă pentru noi un interes deosebit, introducem următoarele definiții. (A se compara cu [2], [3], [1], [4]).

(2.6) Dacă $A(i_0, ..., j_0), ..., B(i_0, ..., j_0)$ sînt funcții booleene obișnuite de $i_0, ..., j_0$ iar $C(x, ..., y, i, di, ..., j, dj), ..., D(x, ..., y, i, di, ..., j, dj)$ sînt funcții booleene în $x, ..., dj$, atunci funcționalele $x, ..., y$ definite prin schema (D) cu $m \times n$ elemente de mai jos, sînt funcționale secvențiale deterministe.

$$(D)\begin{cases} x_0 = A(i_0, ..., j_0), ..., y_0 = B(i_0, ..., j_0). \\ dx = C(x, ..., y, i, di, ..., j, dj), ..., \\ dy = D(x, ..., y, i, di, ..., j, dj). \end{cases}$$

(2.7) Dacă p și q sînt doi întregi nenegativi dați, atunci funcționalele $x, ..., y$ definite prin schema (P) cu $m \times n$ elemente de mai jos sînt funcționale secvențiale predictive:

$$(P)\begin{cases} x_0 = A(i_0, ..., d^p i_0, ..., j_0, ..., d^p j_0), ..., \\ y_0 = B(i_0, ..., d^p i_0, ..., j_0, ..., d^p j_0). \\ dx = C(x, ..., y, i, ..., d^q i, ..., j, ..., d^q j), ..., \\ dy = D(x, ..., y, i, ..., d^q i, ..., j, ..., d^q j). \end{cases}$$

Funcționalele deterministe formează o subclasă proprie a clasei funcționalelor predictive. Schemele (D) și (P) permit introducerea simultană a oricărui număr finit de funcționale. Trebuie să observăm că fără pierdere de generalitate ne putem limita în (2.6) și (2.7) la o singură aplicare a lui (D) respectiv (P). În aceste scheme, $i, ..., j$ sînt funcții date, iar $x, ..., y$ sînt funcționale definite. Am putea dori să utilizăm funcționalele introduse anterior ca funcții date. Dar se poate vedea ușor că asemenea funcționale auxiliare $z, ..., w$ se pot introduce simultan prin aceeași schemă, dacă eliminăm prin substituție intrările lui $z_0, ..., w_0, dz, ..., d^2w$ etc.

Prin schema (D) starea de la ieșire în momentul $t + 1$ este determinată prin intrarea din momentul respectiv și starea completă din momentul precedent. Dorința de a permite determinarea prin întreaga istorie trecută pare firească. Dacă o precizăm, ar însemna firește să ne interesăm numai de determinările efective. Mai mult, nu putem exprima dependența de, să zicem, starea la momentul de timp care este parte întreagă a jumătății lui t sau a rădăcinii pătrate a lui t, fără a extinde în mod considerabil notația, adică

fără a adăuga operatori de timp mai complicaţi decît d. Dacă utilizăm aceeaşi notaţie ca mai sus, putem cel mult exprima dependenţa stării la momentul $t + r + 1$ de stările la momentele $t, ..., t + r$, în fiecare caz constanta r fiind predeterminată. În acest chip ajungem la o schemă extinsă, care ne dă o clasă de funcţionale mai largă, deoarece putem obţine acelaşi efect printr-o succesiune de aplicări ale schemei (D). Rezultă, aşadar, că nu avem nevoie să tratăm în mod separat schemele extinse, deşi sîntem liberi să facem uz de ele, atunci cînd acest lucru este convenabil. O remarcă similară se aplică şi pentru schema (P).

§ 3. METODA TABELELOR SECVENŢIALE

O trăsătură comună a metodelor de rezolvare pe care le vom da mai jos este utilizarea unor tabele secvenţiale. În primul rînd, vom tabula toate şirurile de 0 şi 1 cu 2 $(m + n)$ elemente, cum ar fi $(i, ..., dy)$, care satisfac ecuaţia (S). Apoi vom rezolva (S), făcînd apel la ordinea secvenţială.

Primul tabel îl vom numi *tabelă caracteristică*. Toate valorile posibile pentru $(i, ..., j, x, ..., i, di, ..., di)$ sînt înşirate separat. Sub fiecare punem toate valorile pentru $(dx, ..., dy)$ care satisfac ecuaţia (S) în combinaţie cu valorile date $(i, ..., j, x, ..., y, di, ..., dj)$. Dacă nu există asemenea $(dx, ..., dy)$, vom pune în spaţiul respectiv un $+$ şi vom spune că înregistrarea este *blocată*. Evident aceasta constituie o metodă efectivă pentru a construi tabelul caracteristic al unei ecuaţii (S).

Pentru a găsi soluţiile deterministe vom face în plus uz de un *tabel caracteristic redus*, care se obţine din primul prin eliminarea tuturor înregistrărilor inadmisibile, şi anume: (i) toate înregistrările blocate sînt inadmisibile; (ii) orice înregistrare care are în comun $(i, ..., j, x, ..., y)$ cu o înregistrare inadmisibilă este ea însăşi inadmisibilă; (*iii*) orice valoare a lui $(dx, ..., dy)$ într-o înregistrare cu $(di, ..., dj, dx, ..., dy)$ care intervine ca $(i, ..., j, x, ..., y)$ numai în înregistrări inadmisibile este tăiată şi orice înregistrare în care toate valorile pentru $(dx, ..., dy)$ sînt astfel tăiate este inadmisibilă. Această definiţie dă o metodă efectivă pentru construirea unui asemenea tabel.

Pentru a decide rezolubilitatea generală, construim *tabela soluţiilor*, folosind primul tabel şi neutilizînd tabelul caracteristic redus.

Acum, cel mai bine este să dăm un exemplu pentru a ilustra construcţia celor trei tipuri de tabele secvenţiale, lăsînd prezentarea metodei generale de construire a tabelelor soluţiilor pentru paragraful următor.

Exemplul 1. Să se găsească cele trei tipuri de tabele pentru ecuaţia:

(3.1) $i'x'dx' + i'xdx + ix'di + ixdi' = 0.$

Tabela caracteristică este

i	0	0	0	0	1	1	1	1
x	0	0	1	1	0	0	1	1
di	0	1	0	1	0	1	0	1
dx	1	1	0	0	0,1	+	+	0,1

Tabela caracteristică redusă se obține după cum urmează: Tăiem coloanele 6 și 7 conform cu (i), coloanele 5 și 8 conform cu (ii), coloanele 2 și 4 conform cu (iii) și, în sfîrșit, coloanele 1 și 3 iarăși conform cu (ii). Deci tabela este goală. După cum vom vedea, aceasta implică că ecuația (3.1) nu are soluție determinată.

Tabela soluțiilor lui (3.1) este:

i	x	di	dx	d^2i	d^2x	d^3i	d^3x	d^4i	d^4x	d^5i
0	0	0	1	0						
	1		0							
0	0	0	1	1	0	0	0	0		
							1			
0	0	0	1	1	0	0	0	1		
							1			
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
									1	
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
									1	
0	1	0	0	1	1	1	1	1		
0	1	1	0	0	0	0	1	0		
					1		0			
0	1	1	0	0	0	0	1	1		
					1		0			
0	1	1	0	0	0	1				
					1					
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
							1		0	
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
							1		0	
0	0	1	1	1	0	0	0	1		
							1			
0	0	1	1	1	1	1				
1	0	0	0	0	1	0				
			1		0					

1	0	0	0	0	1	1	0	0		
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0				
1	0	0	0	1	1	1	0	0		
1	0	0	0	1	1	1	1	1		
1	1	1	0	0	0	0	1	0		
					1		0			
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0		
1	1	1	0	0	0	1	1	1		
1	1	1	1	1						

§ 4. SOLUŢII DETERMINISTE

Fiind dată o ecuaţie (S) cu m intrări şi n ieşiri, problema de a găsi soluţii deterministe poate fi interpretată ca însemnînd obţinerea a $m \times n$ cazuri ale schemei (D), pentru care n funcţionale $x, \ldots, y$ astfel definite să satisfacă ecuaţia pentru orice t şi orice funcţii de intrare. Aceasta diferă întrucîtva de căutarea a n funcţionale secvenţiale deterministe $x, \ldots, y$, care să satisfacă (S), deoarece, pentru aceasta din urmă ar trebui utilizată o definiţie de forma (D), care defineşte mai mult decît n funcţionale, printre care intervin şi $x, \ldots, y$. Se consideră însă că deosebirea nu este esenţială, deoarece nu apar cazuri cînd ecuaţia ar fi rezolubilă în cazul al doilea, dar nerezolubilă în sensul dintîi. La această chestiune vom reveni cînd vom da soluţiile. Deocamdată să ne limităm la soluţiile deterministe în prima accepţie a cuvîntului.

Este cu totul evident că, cel puţin teoretic, problema prezintă o soluţie efectivă. Astfel, fiind dată o ecuaţie (S), cu m intrări şi n ieşiri, avem doar un număr finit de definiţii de forma (D), şi anume: $2^{mn}\, 2^{(2m+n)n}$. În fiecare caz în parte se poate testa efectiv dacă funcţionalele definite satisfac sau nu ecuaţia dată (S). (A se vedea, de exemplu, Burks-Wang [1]). Deci:

Teorema 1. Există o metodă efectivă pentru a testa dacă ecuaţia (S) are soluţii deterministe şi, în caz afirmativ, pentru a scrie toate soluţiile deterministe.

Desigur că, în general, această metodă nu este realizabilă. O metodă mai satisfăcătoare este dată la Church [4], dar şi ea este încă destul de greoaie. Se pare că metoda de mai jos este mai directă şi mai apropiată de intuiţie.

Fiind dată o condiție exprimabilă în termenii unei ecuații de forma (S), putem să-i găsim toate soluțiile deterministe prin următorii patru pași:

Pasul 1. Construim tabela caracteristică a ecuației.

Pasul 2. Construim tabela caracteristică redusă.

Pasul 3. Examinăm dacă fiecare din cele 2^m valori posibile pentru $(i, ..., j)$ intervine în cel puțin una dintre coloanele rămase. Acesta este cazul, dacă și numai dacă condiția inițială admite soluții deterministe.

Pasul 4. Dacă condiția admite soluții deterministe, atunci tabela redusă poate fi considerată ca o reprezentare destul de intuitivă a tuturor soluțiilor. Dacă dorim să așezăm soluțiile sub forma unei scheme (D), aceasta se poate realiza în mod mecanic: (i) alegem orice selecție posibilă din cele 2^m coloane conținînd fiecare o valoare distinctă pentru $(i, ..., j)$ și utilizăm valorile pentru $(x, ..., y)$ în aceste coloane ca stări inițiale corespunzătoare; (ii) pentru fiecare coloană din tabela redusă, alegem o valoare pentru $(dx, ..., dy)$; (iii) fiecare asemenea selecție dă o determinare pentru $(x_0, ..., y_0)$ din $(i_0, ..., j_0)$ și odeterminare pentru $(dx, ..., dy)$ din $(i, ..., j, x, ..., y, di, ..., dj)$ care poate fi așezată în forma (D) într-un mod evident.

Această metodă se justifică după cum urmează. Evident, o mulțime de funcționale satisfac ecuația (S), dacă și numai dacă, în orice moment de timp, pentru orice $i, ..., j, di, ..., dj$ valorile pentru $x, ..., y, dx, ..., dy$ satisfac (S), adică intervin într-o coloană a tabelului caracteristic. Dacă se cere ca funcționalele să fie deterministe, valorile pentru $(dx, ..., dy)$ trebuie să fie determinate în întregime de $(i, ..., j, x, ..., y, di, ..., dj)$ și nu pot fi ajustate pentru a ține seama de coloanele viitoare. Deci, toate intrările începînd cu $(i,..., j, x,...y)$ trebuie să fie respinse dacă în general se respinge vreo valoare pentru $(di, ..., dj)$; în caz contrar cînd ajungem la o stare următoare, concordînd cu $(i, ..., j, x, ..., y)$, putem alege $(di, ..., dj)$, astfel încît să obținem o situație imposibilă. Mai mult, în fiecare coloană trebuie, în mod evident, să respingem orice valoare pentru $(dx, ..., dy)$ în contextul $(di, ..., dj, dx, ..., dy)$ care figurează ca $(i, ... j, x,.. ..., y)$ numai în coloanele respinse, și să respingem fiecare coloană în care n-au mai rămas valori posibile pentru $(dx, ..., dy)$. Aceasta ne arată că fiecare soluție determinată trebuie să satisfacă și tabela caracteristică redusă. Pe de altă parte, în tabela redusă, pentru fiecare $(i, ..., j, x, ..., y, di, ..., dj)$, există cel puțin o valoare pentru $(dx, ..., dy)$, astfel încît continuarea să fie posiblă, independent de intrările următoare. Deci, dacă există cel puțin o valoare admisibilă a lui $(x_0, ..., y_0)$ pentru fiecare valoare posibilă a lui $(i_0, ..., j_0)$, atunci avem o soluție. Desigur dacă pentru o anumită valoare a lui $(i, ..., j)$ nu există o coloană care începe cu ea, atunci nu poate exista soluție.

În exemplul 1, dacă, de exemplu, i_0 și i_1 sînt amîndouă 0, atunci x_0 și x_1 trebuie să fie respectiv 0 și 1. Deoarece acest lucru trebuie să fie astfel independent de valorile pentru i_2 și i_3, putem, în particular, să alegem pe i_2 și i_3 ca fiind amîndouă 1. Atunci x_2 trebuie să fie 0 și nu există valoare posibilă pentru x_3.

Aici începe să devină evident că, permițînd variabile auxiliare, nu ajungem niciodată la soluții deterministe care nu ar avea loc în cazul absenței variabilelor auxiliare. Dacă, de exemplu, postulăm pentru exemplul 1 o variabilă

auxiliară z, putem ajunge la tabele caracteristice complicate, dacă alegem pentru z diferite funcţionale deterministe, dar niciodată nu putem ajunge la o coloană în tabela redusă a cărei parte neconţinînd z şi dz să fie în dezacord cu coloana corespunzătoare din tabela redusă iniţială. În acest caz particular, aceasta înseamnă că noua tabelă redusă este şi ea vidă. Deci, în general, dacă există vreo soluţie deterministă pentru o ecuaţie cu variabile auxiliare, trebuie să existe o soluţie corespunzătoare care nu ţine de loc seama de efectul variabilelor auxiliare. Pentru celelalte tipuri de soluţie se impun observaţii similare.

Acum să totalizăm rezultatele acestui paragraf:

Teorema 2. O ecuaţie (S) admite o soluţie deterministă, dacă şi numai dacă tabela ei caracteristică redusă conţine cel puţin o coloană pentru fiecare intrare posibilă $(i, ..., j)$; dacă (S) admite soluţii deterministe, atunci ele pot fi extrase în mod efectiv din tabela redusă.

Procedura de mai sus prezintă o listă care poate fi remediată, dacă acordăm mai multă atenţie detaliilor tabelei reduse. Foarte des o soluţie nu trebuie să parcurgă toate stările complete sau toate stările de ieşire care rămîn în tabela redusă, iar interesul practic este de a obţine o soluţie care să utilizeze un număr minim de stări. Procedura de mai sus nu ne informează în mod explicit care anume stări sînt experimentate, în mod actual, de către o soluţie dată. Pentru a remedia aceasta, vom observa că pentru fiecare alegere particulară a stărilor iniţiale ajungem adesea la repetări de stări complete înainte de a trece prin toate stările complete din tabela redusă, iar o examinare îngrijită a tabelei ne permite să facem o alegere.

O cale mai transparentă pentru a realiza aceasta este utilizarea „grafelor" pentru a uni toate tranziţiile posibile. Astfel pentru a obţine o soluţie particulară, alegem în mod arbitrar 2^m coloane, conţinînd fiecare o valoare distinctă pentru $(i, ..., j)$ şi folosim valorile pentru $(x, ..., y)$ în aceste coloane ca stări de ieşire iniţiale corespunzătoare. Atunci, pentru fiecare dintre aceste valori atribuite lui $(i, ..., j, x, ..., y)$ şi pentru fiecare valoare posibilă a lui $(di, ..., dj)$ alegem, în mod arbitrar, una dintre valorile care apar pentru $(dx, ..., dy)$ în coloană ca stare de ieşire următoare. Folosim aceste valori pentru $(di, ..., dj, dx, ..., dy)$ ca $(i, ..., j, x, ..., y)$ şi repetăm procesul de-a lungul fiecărui drum, pînă ce ajungem la o stare completă $(di, ..., dj, dx, ..., dy)$ care a mai avut loc. Un asemenea proces se încheie întotdeauna, deoarece nu sînt posibile decît 2^{m+n} stări complete. Starea completă iniţială pe care am ales-o împreună cu trecerile de la $(i, ..., j, x, ..., y, di, ..., dj)$ la $(dx, ..., dy)$ va da nemijlocit o soluţie deterministă a condiţiei iniţiale.

Pentru a avea toate soluţiile, vom reface paşii de mai sus, dar de astă dată la fiecare pas vom atribui toate posibilităţile pentru $(dx, ..., dy)$ şi vom urma cu toate alegerile posibile pînă ce în fiecare alegere dată va apare o repetare. Aceasta se poate reprezenta printr-un „graf". Apoi cercetăm dacă toate stările complete care intervin în tabela redusă, ca $(i, ..., j, x, ..., y)$ sau $(di, ..., dj, dx, ..., dy)$, au apărut aici. Dacă nu, alegem, în mod arbitrar, una dintre stările complete rămase şi executăm un graf în acelaşi fel pînă ce ajungem pe fiecare drum la o stare completă $(di, ..., dj, dx, ..., dy)$ care a intervenit deja într-unul din grafe. Acest proces se repetă pînă ce toate stările complete posibile apar într-un graf sau altul. Atunci toate soluţiile deterministe posibile se obţin din aceste grafe alegînd fiecare mulţime de 2^m stări complete,

cîte una pentru fiecare posibilitate a lui $(i, \ldots, j)$, ca stare inițială și utilizînd toate alternativele posibile de continuare.

Cîteva exemple vor lămuri mai bine aceste explicații.

Exemplul 2. Să se găsească un circuit cu o intrare i și două ieșiri x și y, astfel încît în fiecare moment dat să fie adevărate un număr impar dintre i, x, y, dx, di și un număr par de i, x, y, dy, di.

Cele patru stări posibile pentru (x, y) se pot scrie, pe scurt, astfel:

$$e = (0,0),\ f = (0,1),\ g = (1,0),\ h = (1,1). \tag{4.1}$$

Tabela caracteristică se construiește cu ușurință.

i	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
(x, y)	e	e	f	f	g	g	h	h	e	e	f	f	g	g	h	h
di	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
(dx, dy)	g	f	f	g	f	g	g	f	f	g	g	f	g	f	f	g

Tabela caracteristică redusă este aceeași, deoarece nici o intrare nu este blocată. Rezultă că exemplul este rezolubil.

Soluția generală este dată de:

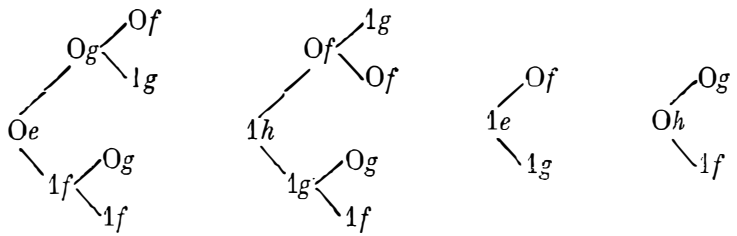
$$x_0 = A(i_0),\ y_0 = B(i_0), \tag{4.2}$$

$$dx = i'(x'y'di' + x'ydi + xy'di + xydi') + i(x'y'di + x'ydi' + xy'di' + xydi),$$

$$dy = i'(x'y'di + x'ydi' + xy'di' + xydi) + i(x'y'di' + x'ydi + xy'di + xydi').$$

Aici A B, sînt funcții booleene arbitrare de i_0.

În acest exemplu este cu totul evident că am putea obține soluții mai simple luînd ca stări inițiale f sau g. Astfel, de exemplu, începînd cu Oe și $1h$ avem următoarea mulțime de grafe pentru întregul tabel redus:



Dacă începem cu $(Oe, 1h)$ avem de parcurs toate cele patru stări de ieșire și șase din cele opt stări complete. Dacă însă începem cu $(Of, 1g)$, nu avem nevoie să parcurgem decît două stări de ieșire f și g și cele patru stări complete care le conțin, astfel încît avem soluția simplă:

$$x_0 = i_0,\ y_0 = i_0', \tag{4.3}$$

$$dx = (x'y + xy')(i'di + idi'),$$

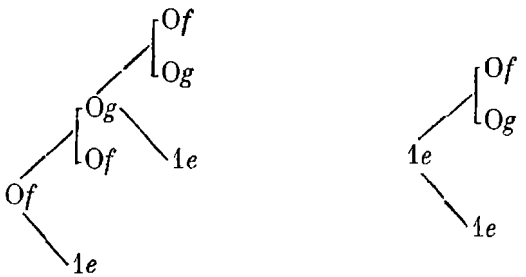
$$dy = (x'y + xy')(idi + i'di').$$

Exemplul 3. Să se găsească un circuit cu o intrare i şi două ieşiri $x\ y$, astfel încît în fiecare moment de timp t să fie adevărate exact două dintre i, x, y, di, dx, dy.

Tabela caracteristică redusă este

i	0	0	0	0	1	1
(x, y)	f	f	g	g	e	e
di	0	1	0	1	0	1
(dx, dy)	f, g	e	f, g	e	f, g	e

O mulţime de grafe corespunzătoare acestei tabele ar fi:



Soluţia generală pentru acest exemplu este:

(4.4) $$x_0 = ai'_0, \quad y_0 = a'i'_0,$$

$$dx = abcr(i'x'y + i'xy' + ix'y')\,di' + a'(b' + c' + r')\,(bi'x'y + ci'xy' + rix'y')\,di',$$

$$dy = a'b'c'r'(i'x'y + i'xy' + ix'y')\,di' + a(b + c + r)\,(b'i'x'y + c'i'xy' + r'ix'y')\,di',$$

unde a, b, c, şi r sînt parametrii care pot lua valorile 0 sau 1.

În total avem 16 soluţii, dintre care cele două mai simple conţin sau numai Of şi $1e$, sau numai Og şi $1e$:

(4.5) $$x_0 = 0,\ y_0 = i'_0,\ dx = 0,\ dy = (i'x'y + i'xy' + ix'y')\,di'.$$

$$x_0 = i'_0,\ y_0 = 0,\ dx = (i'x'y + i'xy' + ix'y')\,di',\ dy = 0.$$

Exemplul 4. $ix'di + i'xdx' = 0$.

Aici, o soluţie ar fi $x = 1$. Aceasta se poate vedea direct din ecuaţie. Soluţia generală se poate obţine în acelaşi fel ca mai sus.

Exemplul 5. $dx = xy' + x'y$, $dy = y'$, $dx\,dy\,dz = dx\,dy\,di$, $dw = w'$, $w'z = w'dz$.

Deoarece în aceste ecuații i nu figurează, iar di intervine numai în cîteva cazuri speciale, putem simplifica construcția tabelei caracteristice, omițînd i și di. Atunci tabela redusă va fi:

(x,y)	e	e	f	f	g	g	h	h
w	1	1	0	0	1	1	0	0
z	0	1	0	1	0	1	0	1
(dx, dy)	f	f	g	g	h	h	e	e
dw	0	0	1	1	0	0	1	1
dz	0,1	0,1	0	1	di	di	0	1

În fiecare dintre cele opt coloane, valoarea lui (x, y, w, z) poate fi luată ca fiind starea inițială pentru toți i_0. Cu această alegere, avem patru soluții posibile, deoarece în primele două coloane avem patru alternative posibile de alegere a lui dz.

§ 5. PROBLEME CONEXE

Există mai multe probleme conexe care merită să fie amintite: soluții independente de intrări; simplificările; utilizarea unor elemente de memorie diferite de operatorul d; soluții condiționate.

Problema simplificării am atins-o în treacăt de exemplu, în rezolvarea exemplului 2, unde s-a văzut că pentru realizarea condiției date sînt suficiente mai puține elemente. Nu vom întreprinde aici o examinare sistematică a problemei, care probabil că ar pretinde, de exemplu, o distincție între stările interne și cele de la ieșire, distincție pe care în acest articol o evităm pentru a nu produce confuzii în problema mai generală.

În termenii realizării fizice, avem la dispoziție alte elemente de bază pentru memorie, cum ar fi trigerul și *set-reset flipfop* În practică avem adesea diferite posibilități de alegere pentru a construi un circuit, iar prețul poate diferi. Nu vom cerceta această problemă a economiei, limitîndu-ne la observația că, teoretic, celelalte elemente de memorie pot fi obținute în mod natural din elementul de întîrziere d prin operații booleene. De exemplu, trigerul este:

$$dx = y, \quad y = ix' + i'x.$$

În general, o ecuație fără soluții deterministe (sau de altă natură) poate să admită de obicei asemenea soluții îndată ce impunem la intrare anumite condiții suplimentare. Asemenea soluții condiționate prezintă uneori interes, de exemplu, atunci cînd ne interesăm, în principal, de o ieșire ca funcțională de unele intrări și avem o soluție condiționată care pretinde doar restricții în ce privește celelalte intrări. În asemenea cazuri putem adăuga elemente convenabile cu ieșiri care satisfac condițiile impuse intrărilor respective. Iar uneori nu ne interesează anumite valori ale funcțiilor de la intrare. Aceasta

este o altă problemă, pe care nu o vom examina. Poate că un exemplu simplu ne va ajuta să clarificăm remarca noastră:

$$ij'dx + i'j'xdx' + i'jdx' + ij = 0. \tag{5.1}$$

Această ecuație nu admite soluție (deterministă) în x, deoarece atunci cînd $i = 1$ și $j = 1$, nici o valoare a lui x sau dx nu poate satisface ecuația. Dacă însă adăugăm condiția $i' + j' = 1$, atunci avem soluții cum ar fi: $x_0 = 0$, $dx = i'j'x + i'j$.

În anumite cazuri, o ecuație poate să aibă soluții care sînt funcții secvențiale simple de timpul t și sînt independente de funcțiile de la intrare. Rezolvarea unei asemenea ecuații este deosebit de lesnicioasă. Astfel, o ecuație (S) are o soluție independentă de funcțiile de la intrare, dacă și numai dacă are o soluție pentru cele 2^{2m} ecuații obținute din (S) prin substituirea tuturor valorilor posibile pentru $(i, ..., j, di, ..., dj)$. Deci problema se reduce la aceea de a rezolva ecuații în care nu figurează variabile de intrare. Putem trata chestiunea în același fel ca și pentru soluțiile deterministe, numai că construcția tabelelor devine mult mai simplă.

Exemplul cel mai familiar este acela al unor contoare obișnuite. Un exemplu mai artificial este următorul:

Exemplul 6. Să se găsească un circuit astfel, încît dacă sînt adevărate un număr par de i și de di, atunci trebuie să fie adevărate un număr impar dintre i, x, y, di, dx, dy; dacă sînt adevărate un număr impar de i și de di, atunci trebuie să fie adevărate un număr par dintre i, x, y, di, dx, dy.

Aceasta nu este decît un fel mai complicat de a spune că un număr impar dintre x, y, di, dx, dy sînt adevărate. Tabela caracteristică redusă este pur și simplu:

(x, y)	e	f	g	h
(dx, dy)	f, g	e, h	e, h	f, g.

De fapt avem, în esență, două stări, deoarece e și h, f și g funcționează în același chip. Ca soluții avem de exemplu:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ dx = x,\ dy = y'; \tag{5.2}$$

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ dx = y,\ dy = x'. \tag{5.3}$$

Dacă ne interesează soluțiile independente de intrări, desigur că deosebirea dintre soluțiile deterministe și cele predicative își pierde sensul. Atunci cînd dorim, putem să dăm și soluții complexe nenaturale. De exemplu, pentru cazul de mai sus avem și următoarea soluție: (x_0, y_0) este $(0, 0)$; după cum (x, y) este e, f, g, h, (dx, dy) devine respectiv f, e, e, f dacă t este număr prim întreg; și respectiv g, h, h, g în caz contrar. Dar este clar că dacă o ecuație (S) admite soluții independente de intrare, atunci ea trebuie să aibă și o soluție „periodică", perioada fiind nu mai mare decît 2^n. Astfel, deoarece există doar 2^n posibilități pentru valorile lui $(x, ..., y)$, dacă există soluții independente de intrări, putem întotdeauna să alegem și să trecem la aceeași stare următoare pentru fiecare stare dată. Deci, o dată ce o stare se repetă, se repetă și fiecare care o urmează, dar trebuie să existe repetarea după cel mult 2^n pași. Dacă reprezentăm cele 2^n stări prin numerele întregi $0, ..., 2^n - 1$,

atunci avem întotdeauna o soluție de formă $(x_0, ..., y_0) = p_0, ..., (x_{q-1}, ..., y_{q-1}) = p_{q-1}$, $(x_{s+kq}, ..., y_{s+kq}) = (x_s, ..., y_s)$, unde $p_0, ..., p_{q-1}$ sînt numere situate printre $0, ..., 2^n - 1$, $q \leqslant 2^n$, k parcurge mulțimea întregilor pozitivi, iar s parcurge numerele $0, ..., q - 1$. (O observație legată de aceasta a se vedea la Burks-Wright [2], teorema 3—1).

§ 6. UN CRITERIU EFECTIV PENTRU REZOLUBILITATEA GENERALĂ

Atunci cînd sîntem interesați de soluții arbitrare pentru ecuația (S), se poate întîmpla într-un anumit stadiu că, deși nu există o valoare pentru $(dx, ..., dy)$ care să poată fi continuată pentru toate intrările viitoare, există totuși pentru $(i, ..., j, x, ..., y, di, ..., dj)$ dați două sau mai multe valori pentru $(dx, ..., dy)$ care pot fi continuate pentru toate intrările următoare, dacă sînt luate împreună. Într-un asemenea caz putem alege valoarea pentru $(dx, ..., dy)$ conform cu intrările viitoare. Deoarece problema generală este de a găsi $x, ..., y$ ca funcționale de $i, ..., j$ și t, asemenea soluții sînt admisibile în teorie și, în adevăr, după cum vom vedea, prezintă adesea interes pentru sinteza circuitelor, întrucît multe dintre ele se pot realiza direct prin circuite.

În unele cazuri simple, tabela caracteristică este suficientă pentru a vedea direct imposibilitatea soluției pentru condițiile date. În alte cazuri, sînt necesare multe operații pentru a determina rezolubilitatea și a găsi soluțiile. Metodele generale care urmează să fie date mai jos sînt mult mai complicate decît metoda pentru soluțiile deterministe.

Iată un exemplu simplu de condiție irezolubilă:

Exemplul 7. Să se găsească două funcționale x și y în i și t, astfel încît în fiecare moment dat să fie adevărate exact două dintre i, x, y, di și dx și exact două dintre i, x, y, di și dy.

Tabela caracteristică poate fi prezentată pe scurt astfel: dacă dintre i, x, y și di nu este adevărată niciuna sau sînt adevărate mai mult decît două, atunci nu avem valori posibile pentru (dx, dy); dacă sînt adevărate exact două, atunci (dx, dy) trebuie să fie e; dacă este adevărată exact una, atunci (dx, dy) trebuie să fie h. Tabela caracteristică redusă este vidă, deci condiția nu admite soluții deterministe. Mai mult, deoarece pentru orice (i, x, y, di) există cel mult o valoare admisă pentru (dx, dy) de către tabela caracteristică, nu avem posibilitatea de a lua precauții pentru a evita fundături în viitor. Deci nu avem de loc soluție.

În ceea ce urmează, vom demonstra că ecuația este în general rezolubilă, dacă și numai dacă ea are o tabelă a soluțiilor. Metoda de a construi tabela soluțiilor o expunem cu ajutorul tabelei soluțiilor de la exemplul 1 din § 3.

Tabela soluțiilor pentru o ecuație (S) se construiește pornind de la tabela caracteristică în conformitate cu pașii următori.

Pasul 1. Anumite succesiuni de intrări sînt tabulate precum urmează. Să considerăm toate cele 2^m valori posibile pentru $(i, ..., j)$ și să extindem fiecare pînă la $(di, ..., dj)$ etc. în toate modurile posibile, pînă ce pe fiecare drum ajungem la $(d^p i, ..., d^p j)$ și $(d^{p+1} i, ..., d^{p+1} j)$ care au intervenit deja pe același drum în calitate de $(d^q i, ..., d^q j)$ și $(d^{q+1} i, ..., d^{q+1} j)$ pentru un anumit q mai mic decît p. Lungimea maximă a acestor succesiuni este determinată

de către numărul intrărilor. În exemplul 1, deoarece există o singură intrare care are numai două stări posibile, sînt numai patru perechi ($d^q i$, $d^{q+1} i$) iar aceeași pereche trebuie să se repete ca ($d^p i$, $d^{p+1} i$) pentru $p \leqslant 4$. În general, lungimea maximă a succesiunilor de intrări pentru o ecuație (S) cu m intrări este $2^{2m} + 2$. Desigur că aceasta impune o margine finită numărului de succesiuni care trebuie să fie enumerate.

Aceste secvențe finite particulare de intrări au proprietatea că orice istoric al intrării se poate obține așezînd aceste secvențe într-o manieră convenabilă. Fiecare (linie) R' la care primele două intrări concordă cu ultimele două intrări dintr-o linie R se linie că este un succesor al lui R iar R se spune că este un predecesor al lui R'. Astfel, în exemplul 1, succesorii celei de a doua linii sînt primele șase linii. Fiind dat un istoric anumit al intrării, putem găsi o linie care concordă cu un segment al său inițial și apoi putem găsi un succesor al acesteia care concordă cu un segment următor și așa mai departe. În fiecare etapă, linia dorită există întotdeauna, deoarece toate posibilitățile sînt incluse datorită repetării aceleiași perechi de stări de intrare.

Pasul 2. Introducem toate valorile admise pentru (x, ..., y) pînă la ($d^p x$, ..., $d^p y$) în fiecare linie, împreună cu legăturile lor. Să luăm, de exemplu, a doua linie a tabelei soluțiilor de la exemplul 1. Privind tabelul caracteristic, vedem că atunci cînd i și di sînt amîndouă 0, x poate fi sau 0 sau 1. Dacă x este 0, dx este 1, dacă x este 1, dx este 0 și niciodată nu este blocat. Or, dacă dx este 1, d^2x este 0, dacă dx este 0, d^2x este 1. Dar valoarea (1, 1, 0) pentru (i, x, di) este blocată, deci d^2x nu poate fi 1. Deoarece aceasta este singura continuare posibilă pentru $dx = 0$ pentru intrările date, înseamnă că dx nu poate lua valoarea 0. La fel, x nu poate lua valoarea 1. Astfel, ajungem la:

i	x	di	dx	d^2i	d^2x	d^3i	d^3x	d^4i
0	0	0	1	1	0	0		0.

Or, (1, 0, 0) pentru (d^2,i, d^2x, d^3i) poate fi urmat atît de 0, cît și de 1, conform cu tabela caracteristică. Nici (0, 0, 0), nici (0, 1, 0) nu sînt blocate. Deci linia se poate completa, punînd sub d^3x atît 0, cît și 1. Tabela soluțiilor pentru exemplul 1 este deosebit de simplă. Este clar că, în general, pot apare ramuri ale ramurilor etc., într-o anumită linie.

Dacă o anumită linie nu poate fi completată în acest fel, adică la o anumită etapă nu găsim stări de ieșire admisibile, atunci stopăm și spunem că pentru ecuația dată nu există tabela soluțiilor. În asemenea cazuri este ușor de văzut că ecuația nu admite soluții, deoarece dacă alegem un istoric de intrare care începe cu intrările de la linia respectivă, atunci nu avem valori posibile pentru starea de la ieșire, care să satisfacă acele cazuri ale ecuației inițiale (S), cînd intrările sînt specificate prin istoricul considerat. Dacă nu există asemenea linii necompletabile, putem continua cu construcția tabelei soluțiilor, examinînd cînd anume liniile se pot combina împreună în toate modurile posibile, fără a ajunge vreodată la blocaj. Pentru fiecare linie vom continua să vorbim de mulțimea de ieșire finală F, adică mulțimea tuturor stărilor de ieșire finală posibile ($d^p x$, ..., $d^p y$) și de mulțimea de ieșire inițială B.

Exemplul 8. Să considerăm o ecuație cu următoarea tabelă caracteristică:

i	0	0	0	0	1	1	1	1
x	0	0	1	1	0	0	1	1
di	0	1	0	1	0	1	0	1
dx	+	1	1	0	0,1	+	+	0,1

Dacă încercăm să construim pentru ea tabela soluțiilor, vedem că nu putem completa nici o linie care începe cu (0, 0, 1, 1) pentru (i, di, d^2i, d^3i). Rezultă că acest simplu exemplu nu admite nici un fel de soluție.

Pasul 3. Pentru fiecare linie, comparăm mulțimea de ieșire finală F cu mulțimea de ieșire inițială B a fiecăreia dintre liniile succesoare. Dacă există o linie R cu un succesor R' astfel încît F-ul lui R nu are membrii comuni cu B-ul lui R', atunci stopăm și spunem că ecuația inițială nu are tabel soluție. De fapt, cînd există asemenea linii R și R', nu avem soluție pentru nici un istoric la intrare care începe cu liniile lui R și R' luate împreună prin înlăturarea unei apariții a stării de la intrare care le unește. Dacă nu avem asemenea linii, atunci sîntem în stare să continuăm. În tabela exemplului 1 nu există asemenea liniilor.

Pasul 4. Pentru orice linie, comparăm mulțimea de ieșire finală F cu reuniunea mulțimilor de ieșire inițială B a tuturor liniilor succesoare. Eliminăm din F toate stările de ieșire finale care nu intervin în reuniunea B-urilor împreună cu toate stările de ieșire precedente în aceeași intrare, care au condus la stările finale eliminate. Motivul pentru care facem acest lucru constă în aceea că fiecare linie poate fi continuată numai prin liniile ei succesoare, astfel încît asemenea stări de ieșire adiționate nu pot fi continuate deloc. În tabela exemplului 1 nu avem nevoie să începem cu asemenea eliminări. Rezultatul obținut în acest stadiu se numește nucleul tabelei soluțiilor. În exemplul 1, nucleul este chiar tabela soluțiilor, dar în general lucrurile nu stau astfel. Chiar dacă ar fi așa, trebuie mai întîi să ne asigurăm de aceasta.

Pasul 5. Pentru fiecare linie R comparăm mulțimea de ieșire inițială B cu mulțimea de ieșire finală F a fiecăreia dintre liniile precedente. Dacă în toate cazurile B conține toți membrii lui F, am obținut tabela soluțiilor. Așa stau lucrurile la exemplul 1. Dacă există o linie R' cu un predecesor R, astfel încît B-ul lui R' nu conține toți membrii F-ului lui R, deschidem pentru fiecare pereche de R și R' o nouă linie, cu aceeași succesiune de intrări ca pentru R' dar cu intersecția lui B al lui R' și a lui F al lui R, în loc de B-ul lui R ca o nouă mulțime de ieșire inițială și continuată cu toate ieșirile succesoare lor în vechea linie R'. În acest chip, după ce străbatem toate liniile nucleului tabelei soluțiilor, obținem un tabel mărit cu un număr finit de linii noi. În acest tabel mărit, o succesiune de intrări poate servi drept cadru pentru mai multe linii. Putem împărți toate liniile în *mulțimi de intrare* exclusive conținînd fiecare toate liniile cu aceeași succesiune de intrări în calitate de cadru.

Pasul 6. Repetăm pasul 3 cu tabelul mărit, numai că acum comparăm F-ul fiecărui R cu mulțimea de intrare a fiecăruia dintre succesorii lui R. Dacă există un R cu o mulțime finală F și un succesor R', astfel încît F nu are membri comuni cu B-ul vreunei linii din mulțimea de intrare care conține R', atunci stopăm și spunem că ecuația inițială nu are tabel soluție. Într-un asemenea caz, putem găsi un anumit istoric finit de la intrare, care să includă toate intrările lui R într-o anumită etapă și soluțiile posibile pentru această perioadă de timp sînt doar stările de la ieșire ale lui R, astfel încît dacă le legăm de intrarea de la R', istoricul de la intrare rezultat nu va avea soluție. Dacă nu intervine o asemenea situație pentru nici un R din tabelul mărit, repetăm un pas asemănător cu pasul 5, numai că de astă dată comparăm B-ul fiecărui R' cu mulțimea intrărilor fiecărui predecesor. Dacă pentru fiecare R' B-ul conține pentru fiecare predecesor R toți membrii lui F pentru cel puțin o intrare în mulțimea care conține pe R, am obținut tabela soluție. În caz contrar, repetăm pasul 6 cu tabela mărită.

Acest proces se încheie întotdeauna după un număr finit predeterminat de pași, deoarece sînt posibile doar un număr finit de stări la ieșire și un număr finit de stări la intrare, iar la fiecare moment de timp este cel puțin o mulțime de intrare care are cel puțin o linie nouă cu cel puțin o stare de ieșire inițială mai mică decît o anumită linie veche. Deci sau încheiem printr-un tabel soluție, sau la o anumită repetare a pasului 3 modificat ajungem la o situație care ne furnizează un istoric de intrare pentru care ecuația inițială nu admite soluții. Așadar, am demonstrat:

Teorema 3. Există o metodă efectivă pentru a decide dacă o ecuație dată (S) are sau nu o tabelă a soluțiilor.

Problema următoare este de a stabili că existența unei tabele a soluțiilor este necesară și suficientă pentru rezolubilitatea generală.

În cursul pașilor de construire a tabelului soluțiilor am stabilit, în treacăt, necesitatea condiției. Astfel, dacă nu avem o tabelă a soluțiilor, atunci sau construcția se oprește la pasul 2, sau se oprește la pasul 3, sau se oprește la o variantă a pasului 3 în cursul pasului 6. În fiecare caz putem alege un anumit istoric de intrare care începe cu intrări inițiale convenabile $(i_0, \ldots, j_0)$ la $(d^s i_0, \ldots, d^s j_0)$ pentru un anumit s finit, astfel încît să nu existe valori $(x_0, \ldots, y_0)$, ..., $(d^s x_0, \ldots$ ..., $d^s y_0)$ care să facă pe (S) adevărată la momentele de timp $t = 0, \ldots, s$, cu intrările date.

Pentru a demonstra suficiența condiției, trebuie numai să arătăm că dacă există un tabel al soluțiilor pentru (S), atunci pentru orice istoric de la intrare (mulțime a funcțiilor de la intrare) $i, \ldots, j$ și orice moment de timp t există valori pentru $(x, \ldots, y)$ și $(dx, \ldots, dy)$ care satisfac (S), atunci cînd sînt combinate cu valorile funcțiilor de la intrare la momentele de timp t și $t + 1$. Vom demonstra în primul rînd aceasta, pentru cazul particular al tabelului soluțiilor al ecuației (3.1) de la exemplul 1.

Începînd cu cele 26 de linii din tabelul soluțiilor pentru (3.1) putem încerca să construim un „fir", efectuînd în fiecare etapă toate extinderile posibile, adică mergînd pînă la toți succesorii ultimei linii considerate în fiecare punct. Fiecare funcție de la intrare dată este atunci înfățișată pe un drum infinit și numai unul. Formînd drumul infinit pentru o anumită funcție de la intrare, dacă F al lui R este același ca și B-ul lui R', atunci nu trebuie să schimbăm

stările de la ieșire pentru R; sau dacă F-ul lui R este submulțime proprie a B-ului lui R', atunci avem de eliminat acele stări de la ieșire ale lui R care conduc la stări de ieșire în F neconținute în B-ul lui R'. În orice caz există încă ieșiri în R pentru fiecare moment de timp, iar mulțimea finală a lui R' legată cu R este aceeași ca și mulțimea ieșirilor finale ale lui R'. Întrucît repetăm procesul indefinit pentru a obține întregul istoric dat al intrărilor, nu poate apare un stadiu în care să pierdem toate stările de la ieșire pentru un anumit t, deoarece putem tăia toate stările de la ieșire de la t, numai dacă am tăia deja toate stările de la ieșire de la un moment de timp următor. Problema constă în a arăta că există o mulțime infinită de valori x_0, x_1, ..., care împreună cu valorile i_0, i_1... ale funcției de la intrare dată i satisfac simultan ecuația (3.1).

Această afirmație este destul de plauzibilă, dar pentru o demonstrație exactă pare necesară *Unendlichkeitslemma* (König [10], p. 81), binecunoscută în logica matematică. Astfel, dacă construim un „fir" pentru toate soluțiile posibile în fiecare timp dat pentru funcția de la intrare dată i, deoarece în fiecare timp dat, cel puțin o ramură poate fi continuată, trebuie să existe un drum infinit care parcurge întregul timp, dînd șirul așteptat x_0, x_1, ...

Astfel se încheie demonstrația rezolubilității lui (3.1). În cazul general, fiecare succesiune de intrări în nucleul tabelei soluțiilor poate apare de mai multe ori, liniile marcînd o mulțime de la intrare. Fiind dat un istoric de la intrare, putem începe cu un R care coincide cu un segment inițial al istoricului de la intrare și să obținem astfel cel puțin o soluție. În fiecare etapă următoare, alegem un succesor R', care concordă cu un segment următor al istoricului de la intrare, dacă numai B-ul lui R' este inclus în F-ul R-ului ales. Prin construcția tabelei soluțiilor un asemenea succesor R' există întotdeauna. Deci avem:

Teorema 4. O ecuație (S) este rezolubilă, dacă și numai dacă ea admite o tabelă a soluțiilor.

§ 7. O CONDIȚIE SUFICIENTĂ PENTRU REZOLUBILITATEA EFECTIVĂ

Este ușor de văzut că (3.1) nu admite soluții efective. Astfel, din prima intrare a tabelului soluțiilor rezultă că dacă istoricul de la intrare este 0 în tot timpul, atunci x_0 poate fi sau 0 sau 1. Pe de altă parte, dacă istoricul de la intrare începe cu 0, dar conține 1 la un anumit timp t, atunci valoarea lui x_0 nu mai este arbitrară, ci depinde de faptul dacă primul 1 din sold apare la un moment de timp t impar sau par, precum și de faptul dacă acest 1 este urmat de 0 sau de un 1. De exemplu, pentru liniile 7—13, x_0 este 0, atunci cînd t este impar și i_{t+1} este 1 sau atunci cînd t este par și i_{t+1} este 0; în caz contrar, x_0 este 1. Aceasta înseamnă că valorile lui x_0 depind de întregul istoric infinit și că nu avem un număr finit, astfel încît valoarea lui x_0 să poată fi totdeauna determinată de segmentul finit al fiecărui istoric de la intrare care merge pînă la acel număr finit.

Pentru a obține soluțiile lui (3.1) din tabelul soluțiilor, observăm că în fiecare linie, cu excepția liniei 14, dx este unic determinat de valoarea lui x și de succesiunea intrărilor în linie. Deci valoarea lui dx este totdeauna deter-

minată de către x şi cel mult $i, \ldots, d^5i$. Dacă totalizăm toate intrările pentru care dx ia valoarea 1 şi facem reducerile posibile, obţinem:

$$dx = i'x' + ix'di'(ad^2i'd^3i' + d^2i'd^3id^4i + d^2id^3i') + ixdid^2i,$$

unde a poate lua ca valoare 0 sau 1.

Deci unicul element neefectiv provine din soluţia pentru x_0: dacă i începe cu trei 0-uri, atunci x_0 este determinat ca în paragraful precedent. Pentru toate celelalte intrări avem:

$$x_0 = i_0'i_1'i_2i_3 + i_0'i_1i_2' + i_0i_1$$

Să dăm acum două exemple simple care sînt rezolubile dar nu admit soluţii efective. Nu dăm aici tabela soluţiilor pentru ele, întrucît ea se construieşte la fel ca în exemplul 1.

Exemplul 9. $i(x'di + xdi') + i'(x'dx + xdx') = 0$.
Intuitiv, aceasta înseamnă: dacă $i = 1$, $x = di$; dacă $i = 0$, $x = dx$ Deci x_0 este arbitrar, dacă istoricul este permanent 0, iar în caz contrar, el este egal cu i_{t+1} pentru primul i_t, care este 1.

Exemplul 10. $i'x'(di' + didx') + i'xdidx + ix'di + ixdi'dx = 0$.
Tabela caracteristică este:

i	0	0	0	0	1	1	1	1
x	0	0	1	1	0	0	1	1
di	0	1	0	1	0	1	0	1
dx	+	1	0,1	0	0,1	+	0	0,1

Cînd istoricul de la intrare începe cu 0101..., atunci x_0 este determinat prin prima intrare i_t, care modifică tiparul, adică i_t este 0 precedat de 0 sau 1 precedat de 1. x_0 este 0 sau 1 după cum t este par sau impar.

Nu am studiat problema clasificării soluţiilor neefective ale ecuaţiilor booleene secvenţiale.

Aceste exemple sugerează o cheie, pentru a găsi o metodă de decizie pentru o ecuaţie rezolvabilă (S) în ce priveşte soluţiile efective. În acest scop, vom lua nucleul tabelei soluţiilor unei ecuaţii rezolvabile şi vom întreprinde un studiu special al liniilor ambigue, adică ale acelor linii pentru care mulţimea ieşirilor iniţiale conţine cel puţin doi membri.

Dăm o metodă efectivă pentru a construi, pe baza nucleului tabelei soluţiilor, un *tabel parţial ambiguu*, care pentru fiecare linie ambiguă decide dacă această linie este „infinită" sau nu. Extindem nucleul în toate direcţiile posibile cu ajutorul tabelei soluţiilor şi spunem că mulţimea P_t a tuturor stărilor de ieşire posibile în cazul $(d^tx, \ldots, d^ty)$, care urmează o stare de ieşire particulară P într-o linie extinsă dată, este descendenta lui P la momentul t şi că descendenta din momentul imediat următor lui P este descendenta imediată. Pe fiecare drum, prelungirea se opreşte, atunci cînd intervine vreuna din următoarele trei situaţii: (i) dacă la un moment de timp t, doar o singură stare iniţială de ieşire în cale are o descendentă nevidă, toate celelalte stări iniţiale de ieşire fiind eliminate, întrucît nu conduc decît la

imposibilități; (ii) dacă la un moment de timp t, toate stările inițiale de ieșire în cale au aceeași descendență; (iii) dacă la un moment de timp t, nu are loc nici (i), nici (ii), dar pentru oricare două dintre stările inițiale de ieșire rămase P și Q, fie descendentele lor în momentul t sînt aceleași, fie că există p, q, $q < p < t$, astfel încît intrările în q și $q + 1$ sînt aceleași ca acelea în p și $p + 1$ și există două stări distincte de ieșire, una în P_p și P_q (respectiv P_p și Q_q) și una în Q_p și Q_q (respectiv Q_p și P_q).

Vom arăta că prelungirea se oprește pe fiecare cale după un număr finit, predeterminat, de pași. O linie în nucleul tabelei soluțiilor se spune că este infinit ambiguă, dacă există o prelungire astfel, încît are loc cazul (iii) de mai sus; în caz contrar se spune că ea este inesențial ambiguă. În tabelul pentru (3.1), tabelul ambiguității parțiale este același ca și tabela soluțiilor (nucleul tabelei soluțiilor), iar prima linie este singura linie ambiguă care se întîmplă să fie infinit ambiguă. Vom demonstra că absența liniilor infinit ambigue este o condiție suficientă pentru rezolubilitatea efectivă.

În ce privește timpul t, marginea pentru construcția de mai sus a tabelului de ambiguitate parțial este $K = 1 + (2^{2m}\, 2^n(2^{n-1}))/2$ unde m este numărul intrărilor, iar n numărul ieșirilor. Astfel, dacă am atins la momentul $t = K$ o cale, atunci sau a avut loc (i), sau a avut loc (ii), sau există cel puțin două stări inițiale distincte de ieșire fără descendentă comună pînă la momentul respectiv. Lucrurile stau astfel, deoarece îndată ce două ieșiri inițiale au aceeași descendență la un moment de timp, ele trebuie să aibă aceeași descendență în orice alt moment ulterior. Să luăm o pereche de stări inițiale de ieșire cu descendente distincte în fiecare moment dat și să alegem, în mod arbitrar, o pereche de stări distincte de ieșire pentru a reprezenta descendentele lor la fiecare moment; există cel mult $2^n(2^{n-1})/2$ asemenea perechi și 2^{2m} perechi posibile ale stărilor de intrare pentru fiecare pereche de la stările de ieșire. Deci o repetare trebuie să fi avut loc la momentul $t = K$.

Or, dacă (iii) intervine la prelungirea unei linii, atunci este posibil să găsim un istoric infinit de la intrare, astfel încît să avem cel puțin două stări inițiale la ieșire cu descendentele distincte în fiecare moment, dar care să satisfacă simultan ecuația inițială (S). Lucrurile stau astfel, deoarece nu trebuie decît să repetăm indefinit istoricul de la intrare de la $q + 1$ la p, de la $p + 1$ încolo. În particular, rezultă că fiecare ecuație rezolubilă cu o ambiguitate infinită trebuie să aibă cel puțin două soluții distincte sau, cu alte cuvinte: nici o ecuație rezolubilă în mod univoc nu poate avea o ambiguitate infinită. Există, desigur, multe ecuații rezolubile fără ambiguități infinite care admit mai mult decît o singură soluție.

Demonstrăm următoarea teoremă.

Teorema 5. Fiecare ecuație rezolubilă fără ambiguități infinite, în particular fiecare ecuație rezolubilă în mod univoc are soluții efective de forma (P) *date la 2.7 (soluții predictive) cu* $p \leqslant K$, $q \leqslant K + 1$. *Mai mult, există o metodă efectivă pentru a găsi aceste soluții.*

Dacă nu există ambiguități infinite, atunci tabelul cu ambiguități parțiale determină direct o clasă de soluții efective. Toate stările inițiale de ieșire rămase în fiecare linie a tabelului pot fi utilizate pentru istoricul de intrare care începe cu această linie din tabel. Deoarece: sau a avut loc cazul (i), starea inițială de ieșire rămasă fiind deci unica posibilă, iar ecuația se știe că este rezo-

lubilă, sau a avut loc cazul (ii) şi atunci nici una dintre stările iniţiale de ieşire rămase nu poate fi eliminată prin intrările viitoare decît dacă este descendentă comună, ceea ce ar elimina toate stările iniţiale rămase şi ar face ca ecuaţia să fie irezolubilă. Deci putem alege în mod liber stările iniţiale, cîte una pentru fiecare linie a tabelului ambiguităţii parţiale şi să scriem $(x_0, \ldots, y_0)$ ca funcţii ale intrărilor de la 0 la K.

Pentru a găsi cum anume $(dx, \ldots, dy)$ este determinat de $(x, \ldots, y)$ şi istoricul de la intrare, alegem pentru fiecare stare iniţială de la ieşire P a fiecărei linii din tabelul R stările de ieşire următoare din descendenta sa imediată. Neglijăm în R intrările şi ieşirile iniţiale şi toate descendentele stărilor iniţiale de la ieşire, diferite de P, şi considerăm pe R' care a rămas. Trebuie să existe mulţimea S de linii pentru care succesiunea intrărilor include sau este inclusă în succesiunea corespunzătoare lui R'. Dacă există o linie E ale cărei intrări sînt incluse în cele ale lui R', atunci mulţimea S nu poate să aibă decît un singur membru. Comparăm ieşirile iniţiale pentru R' cu cele pentru E care trebuie să includă pe toate cele ale lui R', deoarece orice stare iniţială eliminată de E trebuie să fie eliminată şi de R'. Deci, în acest caz, starea P poate fi urmată de fiecare membru al descendenţei imediate pentru situaţia de la intrare pentru R. Dacă există o linie E ale cărei intrări includ pe cele ale lui R' ca o parte proprie, atunci comparăm stările iniţiale pentru R' cu cele ale acestei E. Trebuie să existe membri comuni, deoarece în caz contrar ar exista o prelungire a lui R care ar elimina starea iniţială P contrar cu ceea ce am stabilit. Alegem unul dintre membrii comuni ca stare de ieşire următoare pentru P pe prelungirea intrărilor lui R, în care prelungirea intrărilor lui R' coincide cu cele pentru E. În acest chip, determinăm iarăşi toate stările următoare posibile pentru P pe intrările lui R sau ale unei prelungiri a ei. În fiecare caz, deoarece E are cel mult lungimea $K + 1$, starea de după P este determinată de intrările de la t la $t + K + 1$. Mai mult, aceste prelungiri, luate împreună, dau seamă de orice istoric viitor de la intrare, deoarece tabelul ambiguităţilor parţiale include începutul oricărui istoric posibil la intrare.

Deci, putem, pentru orice istoric posibil de la t la $t + K + 1$, să facem o alegere dintre stările următoare posibile $(dx, \ldots, dy)$, cîte una pentru fiecare istoric posibil la intrare de la t la $t + K + 1$ şi fiecare posibilitate pentru $(x, \ldots, y)$, adică fiecare stare iniţială la ieşire a unei linii ale cărei intrări sînt incluse în acest istoric de la intrare de la t la $t + K + 1$. Combinînd soluţiile pentru $(x_0, \ldots, y_0)$, date mai sus, cu soluţiile pentru $(dx, \ldots, dy)$, pe care le-am dat acum, obţinem o soluţie efectivă pentru ecuaţia dată.

Cu aceasta, demonstraţia teoremei 5 este încheiată. Însă nu este adevărat că nici o ecuaţie cu ambiguităţi infinite nu poate avea soluţii efective. Pentru a ajunge la o condiţie necesară şi suficientă pentru rezolubilitatea efectivă trebuie să examinăm mai strîns ambiguităţile iniţiale. În acest scop, efectuăm schimbări în tabelele cu ambiguităţi parţiale, obţinînd tabele cu ambiguităţi.

§ 8. UN CRITERIU EFECTIV PENTRU REZOLUBILITATEA EFECTIVĂ

Să luăm tabelul soluţiilor pentru (3.1) care este şi propriul lui tabel cu ambiguităţi parţiale. Examinăm fiecare linie R cu ambiguitate infinită, în acest caz particular numai linia întîi, şi privim toate liniile succesoare

R'. Pentru fiecare stare inițială de ieșire P a lui R, privim descendenta sa D la capătul liniei; dacă există o linie succesoare a cărei mulțime de ieșire inițială nu are nici un membru al lui D, îl tăiem pe P. Facem aceasta, deoarece considerăm că P nu poate fi utilizat într-o soluție efectivă. Astfel, deoarece linia R este infinit ambiguă, nu putem găsi o condiție efectivă pentru intrări, astfel încît P să fie acceptabilă. Pentru fiecare M putem găsi un anumit istoric de la intrare de lungime mai mare decît a lui M pentru care P este acceptabilă precum și unul pentru care P nu este acceptabilă. Astfel, repetînd un ciclu convenabil expus în (iii) în timpul construirii tabelului ambiguităților parțiale, obținem un istoric infinit pentru care P este totdeauna acceptabilă ca stare inițială. Pe de altă parte, putem introduce și intrări pentru linia succesoare R' la întretăieri ulterioare arbitrare care să interzică P. Astfel, în cazul lui (3.1) eliminăm starea inițială $x = 0$ din prima linie prin a doua linie și starea inițială $x = 0$, prin a patra linie. Atunci pentru intrările acesteia nu există stări inițiale de ieșire care să intervină într-o soluție efectivă și deci conchidem că (3.1) nu are soluție efectivă.

În cazul general putem avea mai mult decît două stări inițiale de ieșire într-o linie infinit ambiguă din tabelul cu ambiguități parțiale. În acest caz este necesar să modificăm tabela pentru a putea lucra cu ea, apoi putem trece la construirea tabelului cu ambiguități. Pașii sînt după cum urmează:

Pasul 1. Modificăm construcția tabelului cu ambiguități parțiale pentru a obține un tabel nou T. Facem aceeași construcție, însă cu deosebirea că în loc de (iii) folosim acum (iv): ori de cîte ori nu a avut loc nici cazul (i), nici cazul (ii), dar la un moment dat de timp există o repetare a lui p și $p + 1$ a unei perechi de intrări la q și $q + 1$, astfel încît descendenta lui p a fiecărei ieșiri inițiale rămase conține un membru care apare ca membru al descendentei lui q pentru una dintre stările inițiale rămase. Acum vom spune că liniile care au stopat în virtutea cazurilor (i) și (ii) sînt neesențial ambigue, pe cînd cele care au stopat în virtutea cazului (iv) sînt esențial ambigue. Fiecare linie esențial ambiguă are proprietatea că fiecare ieșire inițială a ei poate rămîne într-un istoric infinit, care începe cu această linie. Marginea poate fi asigurată prin faptul că mulțimea ieșirilor în fiecare moment dat trebuie să aibă cel puțin doi membri, iar repetarea uneia și aceleiași mulțimi de ieșire cu una și aceeași pereche de intrări este suficientă pentru a stopa prelungirea. Deci dacă începem cu $(i, ..., j)$ și stopăm la $(d^{p+1}\,i, ..., d^{p+1}\,j)$, atunci $p+1$ nu poate să fie niciodată mai mare decît

$$N = 2^{2m}(2^n - n - 1).$$

Pasul 2. Pentru fiecare linie esențial ambiguă E și fiecare stare inițială de ieșire P în ea, considerăm o sublinie R obținută din E, lăsînd la o parte toate celelalte stări inițiale de ieșire și descendentele lor. Pentru fiecare sublinie R, considerăm toate intrările ei succesoare în tabelul T. Dacă există vreo linie succesoare în T, a cărei B nu are membri comuni cu F-ul lui R, îl lăsăm la o parte pe R, precum și pe P și descendentele sale. Ca și în (3.1), justificăm acest lucru, observînd că P nu poate interveni într-o soluție efectivă pentru situația de intrare a lui E. Continuăm acest proces cu fiecare linie ambiguă esențială E, utilizînd în fiecare etapă ultima versiune obținută pentru T. Stopăm atunci cînd există un E în care n-au mai rămas stări inițiale

de ieșire sau atunci cînd fiecare E are cel puțin o stare inițială de ieșire rămasă și, în consecință, fiecare stare inițială de ieșire rămasă P are o descendentă finală în E, care are un membru comun cu fiecare dintre liniile succesoare ale lui E. În primul caz conchidem că nu sînt posibile soluții efective și cu aceasta încheiem. În al doilea caz trecem la pasul următor.

Pasul 3. În fiecare sublinie rămasă R, pentru un P inițial al unei linii E, neglijăm acum intrarea inițială și ieșirea inițială și comparăm R'-ul rămas din R cu fiecare linie S din tabelul modificat T a cărui succesiune de intrări include sau este inclusă în R'. Luăm mai întîi asemenea linii S, care sînt esențial ambigue (dacă există asemenea linii). Pentru fiecare asemenea S a cărui B nu conține toți membrii B-ului lui R' înlăturăm toți acești membri ai B-ului lui R', care nu intervin în B-ul lui S împreună cu toate descendentele lor, în R', R și E. Procedăm astfel, deoarece asemenea stări nu pot urma după starea P într-o soluție efectivă, căci toate intrările viitoare includ intrările lui E. În particular, dacă toate stările inițiale de ieșire ale lui R' sînt înlăturate într-o anumită etapă, îl înlăturăm și pe R, precum și pe P și descendentele sale. Mai mult, dacă aceasta nu a avut loc, dar există o linie S neesențial ambiguă al cărei B nu are membri comun cu B-ul lui R', înlăturăm și pe R și partea sa în E. Într-un asemenea caz putem alege repetarea ciclului de intrări de la (iv) de mai sus în R și E, atîta timp cît dorim, și apoi să aducem intrările lui S pentru a le bloca. Deci nu putem da o condiție efectivă pentru a determina cînd este admisibilă P. Procedăm astfel cu fiecare sublinie a fiecărui E. Acest pas și pasul precedent se repetă apoi, atît timp cît este necesar, de fiecare dată avînd în vedere ultima versiune a lui T. În final, sau găsim o linie E din T în care n-au mai rămas intrări inițiale sau fiecare linie din T are totuși cel puțin o stare inițială de ieșire, dar acesta și pașii precedenți nu mai pot fi folosiți pentru reduceri ulterioare. În primul caz nu avem soluție efectivă. În cazul al doilea, trecem la pasul următor.

Pasul 4. În acest stadiu, F-ul fiecărei linii esențial ambigue E trebuie să aibă un membru comun cu fiecare dintre succesoarele sale din T. Nu numai atît; descendența finală a fiecărei stări inițiale de ieșire P într-o asemenea linie E trebuie să aibă un membru comun cu B-ul fiecărei succesoare a lui E. Examinăm toate liniile neesențial ambigue, urmărind dacă vreuna din ele are o succesoare a cărei B nu are membri comuni cu F-ul său. Dacă aceasta are loc pentru vreo linie, atunci putem găsi o succesiune de linii pentru care nu este posibilă o stare inițială de ieșire care să satisfacă o prelungire a lui T. În acest caz, ecuația inițială nu are soluție efectivă. În caz contrar trecem la pasul următor.

Pasul 5. Pentru fiecare linie esențial ambiguă E poate interveni o stare inițială P ca stare inițială într-o soluție efectivă pentru un anumit istoric la intrare, care începe cu E numai atunci cînd rămîne pentru fiecare succesoare a lui E, deoarece în caz contrar putem iarăși repeta ciclul de intrări și așa mai departe. Deci ar trebui să tratăm fiecare sublinie rămasă a lui E ca o linie separată. Luăm tabelul T obținut în încheierea pasului precedent și înlocuim fiecare linie esențial ambiguă prin toate subliniile rămase. Vom numi acest tabel nou T'. Pornind de la tabelul T', construim tabelul cu ambiguități prin aceiași pași ca pasul 6 pentru construirea tabelului soluțiilor. Dacă ajungem la o oprire în acest proces, înseamnă că nu există so-

luție efectivă, motivarea fiind similară cu cea pentru soluțiile generale în cazul în care construirea tabelului soluțiilor se oprește înainte de completare. Dacă însă putem încheia procesul și obținem un tabel cu ambiguități, putem arăta că există soluții efective pentru ecuația inițială. În acest pas, liniile esențiale ambigue capătă corespondențe noi, deoarece fiecare are doar cîte o singură stare inițială.

Dacă nu există tabelul ambiguităților, atunci construcția trebuie să se fi oprit într-un anumit loc. Prin angajări în pașii de mai sus și în pașii pentru construirea tabelului soluțiilor putem în fiecare situație specifică să găsim un istoric convenabil la intrare, pentru a arăta că ecuația inițială nu are soluție efectivă.

Fiind dat tabelul cu ambiguități, putem vedea, printr-o argumentare similară cu aceea folosită la demonstrarea rezolubilității generale în cazul tabelului soluțiilor, că tabelul cu ambiguități dă soluții. Că el dă soluții efective rezultă din faptul că pentru fiecare situație de intrare care intervine în vreuna din liniile R ale tabelului cu ambiguități, fiecare stare inițială a lui R poate fi utilizată pentru orice istoric de la intrare care începe cu situația de intrare a lui R și că pentru orice situație inițială și orice prelungire a intrărilor lui R de lungime totală $N + 2$ (N fiind marginea dată în pasul 1 de mai sus) există întotdeauna un succesor care satisface orice istoric viitor de la intrare care începe cu prelungirea lui R.

Aceasta va fi mai clar, dacă indicăm cum anume să obținem soluțiile efective. Alegem, în mod arbitrar, o mulțime de linii din tabelul ambiguităților, cîte una pentru fiecare succesiune de intrări în tabel și în fiecare linie alegem, în mod arbitrar, o stare inițială de ieșire ca valoare pentru $(x_0, \ldots, y_0)$ în orice istoric de intrare care începe cu situația de input a liniei. Fiecare asemenea mulțime de valori poate fi utilizată ca soluție pentru $(x_0, \ldots, y_0)$ în termenii intrărilor $(i_0, \ldots, j_0), \ldots, (i_p, \ldots, j_p)$, $p \leqslant N$.

Pentru a obține $(dx, \ldots, dy)$ ca funcție de $(x, \ldots, y)$ și intrările de la t la $t + q$, $q \leqslant N + 1$, procedăm la fel ca și cu ecuațiile care nu au linii infinit ambigue. Astfel luăm toate stările inițiale de la ieșire în fiecare linie a tabelului ambiguităților și alegem $(dx, \ldots, dy)$ din descendentele imediate. Observăm că liniile tabelului ambiguităților pot iarăși să fie împărțite în mulțimi de intrare, fiecare mulțime conținînd toate liniile tabelului cu aceeași succesiune de intrări. Dorim să determinăm pentru fiecare stare inițială a fiecărei linii a tabelului toate succesoarele posibile ale situației de intrare a liniei sau a unor prelungiri mărginite ale ei. Să luăm o linie esențial ambiguă R cu starea ei inițială P. Să neglijăm starea de la intrare și starea de la ieșire a lui R și să considerăm R' care a rămas. Să luăm mulțimea S, care include fiecare mulțime de intrare ale cărei intrări includ pe cele ale lui R' sau sînt incluse în cele ale lui R'. Dacă există una ale cărei intrări sînt incluse în cele ale lui R', atunci S nu poate avea alți membri, deoarece nici o succesiune de intrări ale unei linii în tabel nu poate conține ca parte proprie succesiunea altei linii în tabel. În acest caz, fiecare membru al descendentei imediate a lui P este o stare următoare posibilă pentru intrările lui R deoarece fiecare trebuie să intervină într-o linie a mulțimii intrărilor respective. Aceasta este clar, deoarece fiecare stare exclusă prin intrările mulțimilor de intrare trebuie să fie exclusă prin acele ale lui R. Dacă, pe de altă parte, nu există asemenea mulțimi de intrare, atunci vor fi mai multe mulțimi de intrare, avînd fiecare o intrare care include aceea a lui R'. Desigur, nici una nu poate

fi mai lungă decît $N + 1$. Luăm aceste mulțimi una cîte una și în fiecare caz în parte determinăm stările următoare posibile ale lui P. O stare următoare după P în R este posibilă, numai dacă intervine ca stare de intrare inițială într-una din liniile mulțimii de intrare. Conform cu pasul 3 de mai sus, fiecare P trebuie să aibă cel puțin o stare următoare posibilă pentru succesiunea intrărilor mulțimii de intrare particulară. Deci pentru fiecare prelungire posibilă a lui R' în tabel putem face lista tuturor valorilor posibile pentru $(dx, ..., dy)$, avînd în vedere valoarea dată pentru $(i, ..., j)$ și $(x, ..., y)$ (respectiv P) în R. Dacă luăm P la timpul t, atunci în fiecare dintre aceste cazuri, intrările sînt de la t la $t + q$, $q \leqslant N + 1$. Aceasta completează determinarea lui $(dx, ..., dy)$ pentru linii esențiale ambigue. Pentru liniile neesențial ambigue, argumentăm analog, însă fără a face apel la pasul 3 (comparați, de asemenea, demonstrația teoremei 5).

Deci am obținut următoarea teoremă:

TEOREMA 6. Există o metodă efectivă pentru a decide dacă o ecuație (S) are soluții efective și, atunci cînd (S) este efectiv rezolubilă, pentru a înfățișa soluțiile efective de forma (P) în (2.7) cu $p \leqslant N$, $q \leqslant N + 1$.

Rezultă că orice ecuație efectiv rezolubilă (S) are soluții de forma (P) cu $p \leqslant N$ și $q \leqslant N + 1$. Îndată ce am obținut marginea pentru p și q, putem încerca precizarea unor metode mai directe de a decide rezolubilitatea efectivă, pornind de la metodele cunoscute pentru determinarea soluțiilor deterministe. Însă în acest articol nu vom aborda asemenea posibilități.

Încheiem acest paragraf cu cîteva exemple de ecuații efectiv rezolubile, care nu admit soluții deterministe.

Un exemplu banal și evident ar fi $x = di$. Exemple mai puțin banale sînt următoarele:

Exemplul 11. $dx = x'$, $x'y = x'i$, $xy = xdy$.

Utilizînd e, f, g, h pentru stările lui (x, y) ca și mai sus, putem construi tabelele destul de simplu, deoarece di nu intervine în ecuații.

Tabelul caracteristic este:

i	0	0	0	0	1	1	1	1
(x, y)	e	f	g	h	e	f	g	h
(dx, dy)	g, h	+	e	f	+	g, h	e	f

Tabelul caracteristic redus este vid, deci aici nu avem soluții deterministe.

Deoarece acum avem nevoie doar de o repetare a lui i și nu a lui (i, di), tabelul soluțiilor este simplu:

i	0	0	0	1	1	1
(x, y)	$g; e$	$e; h$	$e; h$	$f; g$	$f; g$	$h; f$
di	0	1	1	0	0	1
(dx, dy)	$e; g, h$	$g; f$	$h; f$	$g; e$	$h; e$	$f; g, h$
d^2i		0	1	0	1	
(d^2x, d^2y)		$e; g, h$	$f; g, h$	$e; g, h$	$f; g, h$	

Tabelul ambiguităților îl obținem desfăcînd exact în două fiecare linie. Soluțiile efective se obțin în felul următor. Avem 2 alegeri posibile ale stării inițiale, cîte două pentru fiecare succesiune de intrări în tabel. Ele se pot combina în 2^4 feluri, deoarece pentru fiecare i_0 și i_1 putem să-l alegem pe x_0 în două feluri. De exemplu, (i_0, i_1) fiind dată, putem alege pe e, h, g, f, respectiv ca (0, 0) (0,1), (1,0), (1,1):

$$x_0 = i_0 i_1' + i_0' i_1, \qquad y_0 = i_1.$$

Din tabelul ambiguităților putem obține (dx, dy) printr-o metodă unică. De exemplu, dacă di este 0 și (x, y) este g, atunci (dx, dy) este e; dacă di este 0, (x, y) este e, d^2i cste 0, atunci (dx, dy) este g; etc. Soluția pentru dx va fi cea dată inițial:

$$dx = x'.$$

Soluția pentru dy, după simplificări, este:

$$dy = xy + x'd^2i.$$

Un exemplu similar este următorul:

Exemplul 12. $dx = x'y + xy'$, $dy = y'$, $xyz = xyi$, $(x + y)z = (x + y)\,dz$.

Întîmplător, dacă în exemplul de mai sus $(x + y)\,z = (x + y)\,dz$ se înlocuiește cu $z = dz$, atunci nu mai avem soluții.

§ 9. FORMA NORMALĂ (S) A ECUAȚIILOR BOOLEENE SECVENȚIALE

În discuția de mai sus am lăsat de o parte două chestiuni: realizabilitatea fizică a unor soluții nedeterministe și reductibilitatea tuturor ecuațiilor booleene secvențiale la forma normală (S) dată în § 2.

9.1. Fiecare mulțime finită de ecuații booleene secvențiale este reductibilă la forma (S), uneori cu ajutorul unor noi variabile de ieșire.

Aceasta rezultă imediat conform cu (2.3) și (2.5) dacă toate argumentele care intervin sînt printre $i, ..., j, x... y, di, ..., dj, dx, ..., dy$. Dacă, pe de altă parte, în ecuațiile date mai intervin, de exemplu, d^2i, d^4i și d^3y, după distribuirea d-urilor conform cu (2.2), atunci adăugăm egalități noi:

$$u = di, \quad v = du, \quad w = dv, \quad z = dy, \quad s = dz$$

și înlocuim d^2i, d^4i, și d^3y respectiv prin du, dw și ds. Obținem astfel o ecuație de formă (S) cu mai multe variabile de ieșire. Evident că această procedură se aplică în toate cazurile.

9.2. Fiind dată o definiție de formă (P) de la (2.7), putem găsi o definiție de formă (D), de la (2.6) cu variabile adiționale de ieșire, care definește funcționalele inițiale cu $(d^pi, ..., d^pj)$ dacă $p \geqslant q$, iar în caz contrar $(d^qi, ..., d^qj)$ în locul argumentelor $(i, ..., j)$.

De exemplu, să presupunem că definiția dată este:

$$x_0 = i_0 i_3, \; dx = di\, d^2i + x'.$$

Luăm $j = d^3i$ ca argument nou și obținem o definiție de forma (D):

$$z_0 = 0,\ w_0 = 0,\ u_0 = 0,\ dz = j,\ dw = z,\ du = w,$$
$$x_0 = u_0 j_0,\ dx = wz + x'.$$

Evident că procedura se aplică pentru toate cazurile lui (P). Prin urmare, toate funcționalele secvențiale predicative sînt într-un anumit sens fizicește realizabile.

Arthur Burks a atras atenția autorului asupra acestui lucru.

Pînă acum am folosit numai variabile de intrare și variabile de ieșire ca termeni de bază pentru formarea ecuațiilor booleene secvențiale. Pare firesc să extindem formalismul, adăugînd ca termeni de bază i_0, j_0, etc., x_0, y_0 etc. Printr-o procedură similară cu cea din demonstrația pentru 9.1, putem iarăși reduce fiecare mulțime finită de asemenea ecuații booleene secvențiale la o singură ecuație de formă

$$(S_0)\ H(i_0, ..., j_0, x_0, ..., y_0, di_0, ..., dj_0, dx_0, ...,$$
$$dy_0, i, ..., j, x, ..., y, di, ..., dj, dx, ..., dy) = 0.$$

Este posibil să modificăm metodele pentru rezolvarea ecuațiilor de forma (S), pentru a obține metode similare de rezolvare a ecuațiilor de forma (S_0). O metodă constă în formarea produsului logic P a tuturor 2^{2m+2n} rezultate obținute din H prin substituirea unor șiruri de 1 și 0 pentru $(i_0, ..., dy_0)$, rezolvînd apoi ecuația $P = 0$. După aceea mai trebuie să verificăm că este posibilă o alegere pentru $x_0, ..., y_0, dx_0, ..., dy_0$, astfel încît (S_0) să fie satisfăcută pentru $t = 0$.

9.3. Metodele de rezolvare ale ecuațiilor de forma (S) pot fi modificate pentru a furniza metode pentru rezolvarea ecuațiilor de formă (S_0).

Ar putea fi interesant să comparăm ecuațiile de formă (S) cu ecuațiile care reprezintă rețele în sensul lui Burks-Wright [2]. Aceste rețele se obțin ca o generalizare și idealizare a diagramelor familiare proiectanților de circuite (a se vedea, de exemplu, Keister, Ritchie, Washburn [8]), făcînd abstracție de elementele fizice care le realizează. O rețea este o configurație arbitrară obținută din elemente de întîrziere și elemente booleene obișnuite legînd variabilele (extremitățile) într-un mod arbitrar. În terminologia ecuațiilor ce reprezintă aceste configurații conform cu Burks-Wright [2], fiecare rețea este reprezentată printr-o mulțime finită de ecuații booleene secvențiale și avem:

9.4. O mulțime finită de ecuații booleene secvențiale reprezintă o rețea, dacă și numai dacă fiecare ecuație din mulțime este sau de forma $dy = i$, sau de forma $dy = x$ sau de forma $x = B$, unde B este o expresie booleană obișnuită, în care nu figurează d. Orice asemenea mulțime o vom numi mulțime de ecuații rețea.

Evident, orice mulțime de ecuații rețea este echivalentă cu o ecuație de forma (S). Reciproc, putem demonstra:

9.5. Pentru orice mulțime finită de ecuații booleene secvențiale putem găsi o mulțime de ecuații rețea care conține, în esență, toate variabilele mul-

ținii inițiale astfel încît orice soluție a celei de a doua mulțimi ne oferă în mod direct o soluție a primei mulțimi.

Pentru demonstrație, folosim următorii pași. (i) Ca și în 9.1, eliminăm toate intrările lui d care guvernează alte intrări ale lui d, adăugînd noi variabile de ieșire. (ii) Înlocuim ecuațiile de formă $i = x$, $x = dy$, $B = x$ prin $x = i$, $dy = x$, $x = B$. (iii) Înlăturăm toate ecuațiile de formă $i = j$, iar în toate celelalte ecuații îl înlocuim pe i prin j. (iv) Înlocuim toate ecuațiile de formă $di = x$ sau $dx = j$ prin două ecuații: $y = i$ și $dy = x$ sau $dy = j$, unde y este o nouă variabilă. (v) Înlocuim toate ecuațiile de forma $A = B$, unde nici A, nici B nu reprezintă cîte o literă unică, prin $x = A$ și $x = B$, unde x este o variabilă nouă.

Evident că toți acești pași păstrează toate variabilele și toate relațiile dintre ele, existente în ecuațiile inițiale, întrucît eliminarea uneia dintre două variabile intervenind într-o ecuație $i = j$ nu determină vreo modificare esențială.

Apoi sînt posibile reduceri ulterioare. Un procedeu este folosit la Burks-Wright [2] care, făcînd uz de „joncțiuni multiple", pot pune în evidență, de exemplu, intrările uneia și aceleiași variabile în membrul stîng al mai multor ecuații, urmînd ca ele să fie eliminate. De exemplu, dacă $x = A$, $x = B$ și $x = C$ apar în mulțimea dată de ecuații, atunci le putem înlocui

cu $$x = A,\ y = (AB + A'B') + y',\ z = (BC + B'C') + z',$$

sau $$x = A,\ y = (xB + x'B')(xC + x'C') + y'.$$

De asemenea, dacă intervin $dx = A$, $x = B$, înlocuim $x = B$ prin $y = (xB + x'B') + y'$. Dacă intervin $dx = A$, $dx = B$, înlocuim $dx = B$ prin $y = (AB + A'B') + y'$.

După aceea nu mai avem nevoie să reținem ecuațiile de formă $x = i$ sau $x = y$. În adevăr, întrucît ne interesează rezolvarea ecuațiilor, putem elimina toate ecuațiile de forma $x = B$, unde x nu figurează în B, substituind B în locul lui x în toate celelalte ecuații. Așadar, ne putem limita la rezolvarea mulțimilor de ecuații în *formă normală rețea:*

9.6. O mulțime de ecuații se spune că este în formă normală rețea, dacă nici o variabilă nu intervine în partea stîngă a două sau mai multe ecuații, iar fiecare ecuație este sau de forma $x = A$, unde în A figurează x, dar nu figurează d, sau de forma $dy = B$, unde în B figurează y, dar nu figurează d.

Dacă ne interesează rezolvarea ecuațiilor în formă normală rețea, atunci este clar că problema principală constă în rezolvarea ecuațiilor de formă $x = A(x)$, care cuprind o condiție „circulară" pentru x.

Fiind dată o mulțime de ecuații în formă normală rețea, putem desigur să simplificăm partea dreaptă a ecuațiilor cît mai mult posibil prin metodele cunoscute de simplificare a expresiilor booleene nesecvențiale. Dacă mai avem două ecuații $dx = A$, $dy = B$ pentru care A și B sînt echivalente, putem înlătura una dintre ele, să zicem $dy = B$, înlocuind în celelalte ecuații toate intrările lui y prin intrări ale lui x. Dacă avem două ecuații $x = A(x)$, $y = B(y)$, astfel încît $A(x)$ și $B(x)$ sînt echivalente, putem proceda la fel. Apoi combinăm toate ecuațiile în care nu figurează d într-o singură ecuație și simplificăm. Ajungem astfel la problema de a rezolva o mulțime de ecuații cu o condiție „circulară" fără întîrzieri și un număr finit de ecuații de întîrziere.

Credem că, de exemplu, metoda de a găsi soluţii deterministe prezentată de Church [4] poate fi întrucîtva scurtată cu ajutorul acestei forme normale.

Pînă acum am arătat că problema rezolvării ecuaţiilor de forma (S) este în fond echivalentă cu problema rezolvării mulţimilor de ecuaţii reţea. La Burks-Wright [2] intervine o noţiune de „reţele cu bună comportare", care se rezumă la : o reţea arbitrară este cu bună comportare, dacă mulţimea sa de ecuaţii admite o soluţie unică în sensul general. Aşadar, teorema 5 de mai sus dă printre altele o metodă pentru a decide dacă o reţea este sau nu cu bună comportare şi pentru a determina forma tuturor soluţiilor posibile pentru reţele de bună comportare. Pare însă clar că în sinteza circuitelor nu ne interesează atît unicitatea soluţiei, cît rezolvabilitatea ca atare.

Ecuaţiile de formă (S_0) cu soluţie unică prezintă un interes special atunci cînd vrem să comparăm funcţionalele booleene secvenţiale cu definiţiile recursive care ne sînt familiare în logica matematică. În legătură cu aceasta, să facem unele observaţii.

În teoria funcţiilor recursive, definiţiile de formă (P) de la 2.7 corespund definiţiilor primitive recursive. O ecuaţie de formă (S_0), atunci cînd are o soluţie unică, va corespunde unei definiţii recursive Herbrand. Contrapartea unei definiţii general recursive va fi o ecuaţie (S_0) nu numai cu soluţie unică, dar şi astfel, încît pentru orice valori date ale lui t şi ale variabilelor de la intrare $i,\ldots, j$, putem deriva din (S_0), prin algebră booleană şi substituţii, pentru orice variabilă de ieşire x din (S_0) fie ecuaţia $x_t = 0$, fie ecuaţia $x_t = 1$, dar niciodată amîndouă (a se vedea şi Gödel [7], p. 26). Deşi este cunoscut că există funcţii recursive Herbrand care nu sînt general recursive, cele două tipuri de definiţii ale funcţionalelor secvenţiale, care le corespund, determină aceeaşi clasă de funcţionale. Astfel, orice funcţională care se poate defini printr-o (S_0) cu soluţie unică, conform teoremei 5 şi propoziţiei 9.3, se poate defini printr-o definiţie de formă (P), iar fiecare definiţie de această formă satisface în mod evident cererea suplimentară cu privire la derivabilitate.

În realitate, putem demonstra nu numai că cele două clase de definiţii determină acelaşi domeniu de funcţionale, dar şi că ele sînt coextensionale:

9.7. O ecuaţie de formă (S_0) admite soluţie unică, dacă şi numai dacă pentru orice funcţii particulare de intrare $i,\ldots, j$, toate cazurile de substituţie, adică toate cazurile lui (S_0) obţinute prin substituirea unui întreg nenegativ pentru t, şi consecinţele lor booleene includ, pentru orice numeral t, fie $x_t = 0$ sau $x_t = 1, \ldots$, fie $y_t = 0$ sau $y_t = 1$, dar niciodată simultan $x_t = 0$ şi $x_t = 1, \ldots$, sau simultan $y_t = 0$ şi $y_t = 1$.

O ecuaţie (S_0) admite soluţie unică, dacă şi numai dacă pentru orice funcţii date $i,\ldots, j$, există o atribuire unică de valori 0 şi 1 pentru $x_0,\ldots, y_0, x_1\ldots, y_1$ etc., astfel încît toate cazurile de substituţie pentru (S_0) să fie adevărate în cadrul interpretării normale a operatorilor booleeni şi a semnului egalităţii. Mai explicit: (S_0) nu are soluţie, dacă există funcţii $i,\ldots, j$, pentru care nici o atribuire de valori 0 şi 1 pentru x_0 etc. nu determină ca toate cazurile lui (S_0) să fie adevărate; (S_0) are două sau mai multe soluţii dacă pentru orice mulţime de funcţii de intrare date există atribuiri şi există funcţii $i,\ldots, j$ pentru care avem două sau mai multe interpretări ale variabilelor $x,\ldots, y$, care determină ca toate cazurile lui (S_0) să fie adevărate.

Aşadar, 9.7 urmează imediat din următoarele două enunţuri: 9.8 şi 9.9.

9.8. Pentru orice $i,..., j$ date, toate cazurile de substituție pentru (S_0)pot fi adeverite simultan prin alegerea convenabilă a funcțiilor $x,..., y$, dacă și numai dacă nu există un t și o variabilă de ieșire, să zicem x, astfel încît să fie simultan derivabile $x_t = 0$ și $x_t = 1$.

Dacă există asemenea x și asemenea t, atunci acele cazuri ale lui (S_0) pentru care putem deriva $x_t = 0$ și $x_t = 1$ nu pot fi adevărate, indiferent ce funcții alegem pentru $x,..., y$. Pe de altă parte, dacă nu există asemenea t și asemenea variabilă de ieșire, atunci orice submulțime finită de cazuri trebuie să fie adevărată pentru o anumită interpretare dată variabilelor $x,..., y$. Așadar, în virtutea unei teoreme cunoscute din logica matematică, sau aplicînd direct Unendlichkeitslemma, rezultă că există o interpretare pentru $x,..., y$ care adevereşte toate cazurile lui (S_0).

9.9. Pentru $i,..., j$ date, toate cazurile lui (S_0) au două sau mai multe interpretări adevărate, dacă și numai dacă există un anumit moment de timp t și o anumită variabilă de ieșire (să zicem x), astfel încît nu se poate deriva nici $x_t = 0$, nici $x_t = 1$.

Dacă avem două interpretări pentru $x,..., y$ care adeveresc toate cazurile lui (S_0), atunci aceste interpretări trebuie să se deosebească pentru o anumită ieșire (să zicem x) la un anumit moment de timp t. Așadar, nu pot fi derivate nici $x_t = 0$, nici $x_t = 1$. Reciproc, dacă nici una nu este derivabilă, atunci, independent de faptul că x_t este 0 sau 1 este posibil să adeverim toate cazurile lui (S_0).

Cu aceasta, demonstrația pentru 9.7 este încheiată.

În logica matematică se identifică, de obicei, proprietatea de general recursiv cu aceea de efectiv calculabil. Deoarece soluția fiecărei ecuații booleene secvențiale cu soluție unică este o funcțională predictivă în sensul lui 2.7., este firesc să ne întrebăm dacă putem identifica funcționalele booleene efectiv calculabile cu funcționalele secvențiale predictive. Întrucît permitem ca operator de timp numai pe d acest lucru pare rezonabil. Însă noi vom face uz de operatori de timp general recursivi arbitrari și totuși efectivitatea se va menține.

§ 10. LIMBAJE APARENT MAI BOGATE

Cînd se precizează condițiile pe care urmează să le satisfacă circuitele, se recurge adesea la cuantori restrînși și anumiți operatori modulo. Aceste mijloace suplimentare de expresie sînt convenabile, dar ne putem în general dispensa de ele, atunci cînd dispunem de limbajul ecuațiilor booleene secvențiale. Prin urmare, este de dorit să considerăm limbaje aparent mai bogate și să demonstrăm că condițiile care se pot exprima în cadrul lor pot fi transformate, în mod mecanic, în condiții exprimabile în cadrul limbajului inițial al ecuațiilor booleene secvențiale. În ceea ce urmează nu vom formula exact asemenea limbaje, ci vom da numai cîteva exemple pentru a ilustra cum se pot reduce la ecuații booleene secvențiale unele forme de expresie cu care sîntem obișnuiți.

În vederea acestui lucru se pretează mai puțin la confuzii și este mai intuitiv dacă începem cu simbolismul calculului monadic al predicatelor și nu cu cel al algebrei booleene, înfățișînd explicit ca argumente indicatorii de

timp 0, t, $t+1$ etc. La sfîrşit putem reveni la notaţia mai simplă în mod cunoscut.

10.1. Ieşirea x este la momentul t, dacă şi numai dacă intrarea i este la toate (respectiv unele) momentele de timp s cu $0 \leqslant s \leqslant t$.

Aceasta o exprimăm astfel:

(1) $$x(t) \equiv (s)_0^t\, i(s),$$

(2) $$x(t) \equiv (Es)_0^t\, i(s).$$

Ele sînt echivalente cu:

(1′) $$(x(0) \equiv i(0)) \,\&\, (x(t+1) = (x(t) \,\&\, i(t+1))),$$

(2′) $$(x(0) = i(0)) \,\&\, (x(t+1) \equiv (x(t) \vee i(t+1))).$$

De exemplu, dacă vrem să rezolvăm o condiţie $H((s)_0^t\, i(s))$ putem rezolva în locul ei condiţia

$$H(x(t)) \,\&\, (1').$$

Este cu totul evident că condiţia iniţială are soluţii, dacă şi numai dacă condiţia nouă are soluţii, deoarece putem întotdeauna alege un x care să satisfacă (1′). Această consideraţie se aplică, de asemenea, şi la exemplele de mai jos.

10.2. Ieşirea x este la t, dacă şi numai dacă pentru perioada $0 \leqslant s \leqslant t$ intrarea i este deschisă la k diferite momente s, astfel încît $k \equiv 1 \pmod 3$.

Exprimăm aceasta prin

(3) $$x(t) = (1_3 s)_0^t\, i(s).$$

Aceasta echivalează cu

(3a) $$(x(0) \equiv i(0)) \,\&\, (x(t+1) \equiv ((x(t) \,\&\, \sim i(t+1)) \vee (y(t) \,\&\, i(t+1)))),$$

cu condiţia

(3b) $$(y(0) \equiv \sim i(0)) \,\&\, (y(t+1) = ((y(t) \,\&\, \sim i(t+1)) \vee (\sim y(t) \,\&\, \sim x(t) \,\&\, i(t+1)))).$$

Acum, luînd conjuncţia lui (3a) şi (3b) ca (3′), putem, ca şi în exemplul precedent, să reducem problema rezolvării lui $H((1_3 s)_0^t\, i(s))$ la rezolvarea lui $H(x(t)) \,\&\, (3')$.

10.3. Ieşirea x este la t, dacă şi numai dacă pentru orice s cu $0 \leqslant s \leqslant t$, $i(s)$ este deschis exact atunci cînd $s = 3 \pmod 4$.

(4) $$x(t) = (s)_0^t\, (s \overset{4}{=} 3 \mid i(s)).$$

(4′) $$(x(0) \equiv \sim i(0)) \,\&\, (x(t+1) = (x(t) \,\&\, (i(t+1) = (y(t) \,\&\, \sim z(t)))) \,\&\, \sim y(0) \,\&\, \sim z(0) \,\&\, (y(t+1) \equiv \sim (y(t) \equiv z(t))) \,\&\, z(t+1) \equiv \sim z(t).$$

Aceste expresii noi pe care le-am introdus în exemplele considerate pot fi denumite respectiv cuantori restrînşi, cuantori modulo şi condiţii modulo.

Lăsăm deschisă problema generalizării acestor exemple în vederea obținerii unei extinderi neesențiale a limbajului ecuațiilor booleene secvențiale.

O problemă înrudită dar în altă direcție a fost ridicată în lucrarea [1] la p. 296. Și anume: este firesc să ne întrebăm, de exemplu, dacă toate funcționalele secvențiale deterministe se pot exprima explicit în termenii operațiilor booleene cu ajutorul condițiilor modulo a cuantorilor restrînși și a cuantorilor modulo. Și aceasta este o problemă deschisă. Dăm două exemple simple pentru a indica că pare plauzibil ca asemenea recursii simple să poată fi eliminate cu aceste mijloace.

10.4. $x_0 = i_0,\ dx = x'di.$

Cu cealaltă notație, definiția se scrie astfel:

$$x(0) \rightleftharpoons i(0),\quad x(t+1) \rightleftharpoons (\sim x(t)\ \&\ i(t+1)).$$

Această definiție se poate înlocui prin următoarea definiție explicită:

$$x(t) \rightleftharpoons [(t = 0\ \&\ i(t)) \vee (Es)_0^t\,(t = s+1\ \&\ ((q)_0^t\,(q^2 = t \mid i(q))$$
$$\vee (Ep)_0^s\,(p^2 = s \mid (\sim i(p)\ \&\ (q)_{p+1}^t\,(q^2 = t \mid i(q)))))].$$

10.5. $x_0 = i'_0,\ dx = x\,di' + di.$

$$x(t) \rightleftharpoons [(t = 0\ \&\ \sim i(t)) \vee (Es)\,(t = s+1\ \&$$
$$((Ep)_0^t\,(i(p)\ \&\ (q)_{p+1}^t \sim i(q)) \vee (q)_0^t \sim i(q)))].$$

§ 11. MAȘINI TURING ȘI AUTOMATE CRESCĂTOARE

În [1] și [4] sînt examinate automatele crescătoare sau potențial infinite. În legătură cu aceste concepte, cîteva observații.

Dacă concepem o mașină ca fiind dată printr-o mulțime de funcționale secvențiale deterministe caracterizată printr-o definiție de formă (D) de la 2.6, atunci un automat crescător poate fi considerat ca un șir efectiv arbitrar de asemenea mulțimi. Astfel, deoarece putem enumera efectiv toate definițiile de formă (D), să zicem printr-o funcție recursivă $e(n)$, putem defini un automat crescător ca

11.1. Un automat crescător este un șir arbitrar $e(h(0))\ e(h(1)),\ldots$ de mașini obișnuite, unde h este o funcție definită astfel: $h(0)$ este o constantă, $h(t+1) = g(h(t))$, g fiind o funcție general recursivă dată, dar altfel arbitrară.

Aceasta este mult mai cuprinzător decît exemplele de automate crescătoare cu care sîntem familiarizați (în particular, mașinile Turing). Dacă începem cu mașini Turing, putem obține clase mai restrînse de automate crescătoare despre care avem o informație mai detaliată.

O mașină Turing nu trebuie considerată ca o pereche de mașini finite legate între ele, deoarece lungimea unei jumătăți de bandă nu are o margine prestabilită. Ea nu trebuie considerată nici ca o mașină finită, interpretînd banda sau o parte a mediului, deoarece banda nu numai că servește intrările, dar ea servește și ca bloc de memorie. Nu putem elimina necesitatea unei mașini crescătoare făcînd distincție între mașină și mediu și permițînd apoi ca informația să fie înmagazinată și iar extrasă din mediu, pentru că în acest

caz tocmai mediul ar fi o mașină crescătoare. S-ar părea că cel mai corect ar fi să considerăm că o mașină Turing izolată este un computer cifric cu memorie internă în serie, dar nu paralelă, sau cu acces aleatoriu, adică informația stocată nu poate fi regăsită printr-un singur pas. O mașină de bază care simulează orice mașină Turing particulară printr-un program poate fi considerată ca un computer cifric ipotetic, avînd atît o memorie internă în serie crescătoare, cît și un acces intern întîmplător crescător.

Presupunem o formulare particulară a mașinilor Turing, care este foarte simplă, însă suficientă pentru a calcula toate funcțiile recursive. În această formulare avem doar un simbol pentru marcarea pătratelor benzii, dispozitivul de citire poate marca (operația se reprezintă prin asterisc $*$), radia (ceea ce se reprezintă prin litera E) sau se poate pregăti pentru a trece la starea următoare: Cm înseamnă că trebuie să treacă la starea m, dacă pătratul supus citirii este marcat și la starea imediat următoare în caz contrar. Banda poate fi deplasată cu un pătrat la stînga sau cu un pătrat la dreapta ($\leftarrow$, $\rightarrow$). Orice întreg nenegativ n se reprezintă pe bandă printr-o succesiune neîntreruptă de $n + 1$ pătrate marcate. Întrebările (adică argumentele funcției) se separă una de alta printr-un pătrat nemarcat. La început, este supus citirii cel mai de stînga pătrat marcat al celui mai de stînga argument. La sfîrșitul calculului, dacă există un sfîrșit pentru argumentele respective, totul în afară de răspuns este radiat, iar mașina stopează (ceea ce se reprezintă prin S), examinînd cel mai de stînga pătrat marcat al răspunsului. Este bine cunoscut din literatură (a se vedea Kleene [9] și Wang [14]) că asemenea mașini Turing pot calcula toate funcțiile recursive.

Pentru a reprezenta aceste mașini Turing, atribuim o coordonată număr întreg fiecărui pătrat de pe bandă, și anume: la fiecare moment dat, pătratul supus citirii are coordonata 0, pătratul situat imediat la dreapta (respectiv stînga) pătratului care are coordonata a obține coordonata $a + 1$ (respectiv $a - 1$). Mașina este considerată ca avînd o parte fixă, care este un automat finit, avînd ca unic nod de intrare dispozitivul de citire.

Să dăm mai întîi un exemplu simplu de adunare a doi întregi nenegativi. Tot ce are de făcut mașina constă în a marca pătratul gol (blancul) dintre două argumente, radiind apoi marcările de la extrema dreaptă și revenind la cel mai de stînga pătrat marcat. Aceasta se poate descrie în felul următor:

1. $\rightarrow$, $C1$; 2. $*$; 3. $\rightarrow$, $C3$; 4. $\leftarrow$; 5. E; 6. $\leftarrow$; 7. E; 8 $\leftarrow$, $C8$; 9. $\rightarrow$; 10. S

În termenii condițiilor, le putem lua pe acestea ca 10 stări: $q_1, \ldots, q_{10}$. Pentru fiecare două argumente date m și n $q_k(m, n, t)$ este adevărată sau falsă după cum mașina este sau nu este în momentul t în starea q_k. Similar, $p(m, n, a, t)$ este adevărată sau falsă după cum, la momentul t, pătratul avînd coordonata a este marcat sau nemarcat.

Atunci, condițiile care reprezintă mașina sînt următoarele:

11.2. $p(m, n, a, 0) \equiv (0 \leqslant a \leqslant m \vee m + 2 \leqslant a \leqslant m + n + 2)$.

$p(m, n, a, t + 1) \equiv ((q_{10} \,\&\, p(a)) \vee ((q_4 \vee q_6 \vee q_8) \,\&$
$p(a + 1)) \vee ((q_1 \vee q_3 \vee q_9) \,\&\, p(a - 1)) \vee$
$(q_2 \,\&\, (a = 0 \vee p(a))) \vee ((q_5 \vee q_7) \,\&\, (a \neq 0 \,\&\, p(a))))$.

$q_1(m, n, 0)$

$$\sim q_k(m,\ n,\ 0),\ k = 2, \ldots, 10.$$

$$q_{k+1}(m,\ n,\ t+1) \rightleftharpoons q_k,\ k = 4, 5, 6.$$

$$q_1(m,\ n,\ t+1) \rightleftharpoons (q_1 \,\&\, p\ (0)).$$

$$q_{k+1}(m,\ n,\ t+1) \rightleftharpoons (q_k \,\&\, \sim p(0)),\ k = 1,\ 3,\ 8.$$

$$q_{k+1}(m,\ n,\ t+1) \rightleftharpoons (q_k \vee (q_{k+1} \,\&\, p(0))),\ k = 2,\ 7.$$

$$q_{10}(m,\ n,\ t+1) \rightleftharpoons (q_9 \vee q_{10}).$$

În condițiile de mai sus prin q_k înțelegem întotdeauna $q_k(m, n, t)$ pentru $k = 1, \ldots, 10$; similar, prin $p(b)$ înțelegem $p(m, n, b, t)$.

În general, putem stabili o schemă generală pentru a defini toate mașinile Turing în forma specificată. Pentru prescurtare, considerăm numai funcții de două argumente.

11.3. Pentru orice număr de stări constant N, orice funcție de adevăr $Q_1, \ldots, Q_5$ de $q_1, \ldots, q_N$ care se exclud două cîte două, iar luate la un loc epuizează toate stările $q_1, \ldots, q_N$ la momentul t pentru argumentele date m și n, și pentru orice funcții de adevăr similare $F_1, \ldots, F_N$ de $q_1, \ldots, q_N$ și $p(0)$, putem defini o mașină Turing prin următoarea schemă (G):

$$p(m,\ n,\ a,\ 0) \rightleftharpoons (0 \leqslant a < m \vee m + 2 \leqslant a \leqslant m + n + 2).$$

$$p(m,\ n,\ a,\ t+1) \equiv ((Q_1 \,\&\, p(a)) \vee (Q_2 \,\&\, p(a+1))$$
$$\vee (Q_3 \,\&\, p(a-1)) \vee (Q_4 \,\&\, (a = 0 \vee p(a)))$$
$$\vee (Q_5 \,\&\, a \neq 0 \,\&\, p(a))).$$

$$q_1(m,\ n,\ 0).$$

$$\sim q_k(m,\ n,\ 0),\ k = 2, \ldots, N.$$

$$q_k(m,\ n,\ t+1) \equiv F_k(p\ (0),\ q_1, \ldots,\ q_N),\ k = 1, \ldots,\ N.$$

Este evident că toate predicatele $p\ (m, n, a, t)$ care se pot defini prin scheme (G) sînt primitiv recursive. În adevăr, nu poate exista un p astfel încît:

$$p(m,\ n,\ a,\ t+1) \equiv m + n + a \leqslant t^2.$$

Aici creșterea numărului pătratelor care își schimbă starea la momentul t este funcție de t care nu e mărginită de nici o margine dată independentă de t.

Pe de o parte, toate funcțiile parțial recursive pot fi calculate prin aceste mașini; pe de altă parte, predicatele necesare pentru a reprezenta aceste mașini formează o subclasă restrînsă a clasei funcțiilor primitiv recursive. Este firesc să căutăm explicitarea relației dintre un predicat p și funcția calculabilă cu ajutorul mașinii corespunzătoare.

Atunci cînd mașina stopează, sîntem la un stadiu cînd

$$(a)\ (p(m,\ n,\ a,\ t) \equiv p\ (m,\ n,\ a,\ t+1)).$$

Pentru a obține o margine a variabilei a, observăm că, conform metodei standard de calcul, la fiecare moment de timp t trebuie să fie afectat cel mult un pătrat în plus, astfel încît putem folosi marginea $m + n + 3 + t$.

Aşadar, în virtutea stipulării că, la sfîrşitul calculului, dispozitivul de citire examinează pătratul cel mai de la stînga al răspunsului, vedem că valoarea funcţiei $g(m, n)$, calculată de către maşina reprezentată prin echivalenţe corespunzătoare, este dată de:

$$T(p, m, n, t) \equiv (a)\ (a \leqslant m + n + 3 + t \mid p(m, n, a, t) \equiv p(m, n, a + 1, t)),$$

$$U(p, m, n, t) \equiv \mu a(a \leqslant m + n + 3 + t \mid \sim p(m, n, a + 1, t)).$$

$$g(m, n) = U(p, m, n, \mu_t T(p, m, n, t)).$$

Pentru orice funcţie parţial recursivă $g(m, n)$ există un predicat p, definit printr-o schemă (G) astfel, încît să aibă loc ultima dintre relaţiile de mai sus. Atît U cît şi T sînt primitiv recursive, iar rezultatul poate fi considerat ca o nouă demonstraţie a teoremei formei normale a lui Kleene ([9], p. 330). În particular, $g(m, n)$ este general recursivă, dacă şi numai dacă $(m)\ (n)\ (Et)\ T(p, m, n, t)$ are loc.

BIBLIOGRAFIE

[1] A. W. Burks şi H. Wang, *The Logic of Automata*, în „Jour. Assoc. Comp. Mach.," **4**, 1957 pp. 193–218, 279–297.

[2] A. W. Burks şi J. B. Wright, *Theory of Logical Nets*, în „Proc. IRE", **41**, 1953, pp. 1357–1365.

[3] A. Church, Recenzia unui articol al lui Berkeley, în „Jour. Symbolic Logic", **20**, 1955, pp. 286–287.

[4] Idem, *Application of the Recursive Arithmetic to the Problem of Circuit Synthesis*, în: „Summaries of talks at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University", pp. 3–50.

[5] L. Couturat, *The Algebra of Logic* (traducere engleză a originalului francez), London şi Chicago, 1914.

[6] J. Friedman, *Some Results on Church's Restricted Recursive Arithmetic*, în „Jour. Symbolic Logic", **22**, 1957, pp. 337–342.

[7] K. Gödel, *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems, Mimeographed.* Princeton, 1934.

[8] W. Keister, A. E. Ritchie, S. H. Washburn, *The Design of Switching Circuits*, Princeton, 1951.

[9] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, New York şi Toronto, 1952.

[10] D. König, *Theorie der Graphen*, Leipzig, 1936.

[11] L. Löwenheim, *Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietekalkül. Über Transformationen im Gebietekalkül, Gebiets determinanten*, în „Math. Annalen", **68**, 1910, pp. 167-207; **73**, 1913, pp. 245–272; **79**, 1919, pp. 223–236.

[12] G. H. Mealy, *A Method for Synthesizing Sequential Circuits*, în „ The Bell System technical Journal", **34**. 1955, pp. 1045–1079.

[13] E. F. Moore, *Gedanken-Experiments on Sequential Machines*, în „Automata Studies", 1956, pp. 129–153, Princeton.

[14] H. Wang. *A Variant to Turing's Theory of Computing Machines* în „Jour. Assoc. Comp. Mach", **4**, 1957, pp. 63–92.

partea a treia
TEORIA FORMALĂ A NUMERELOR

CAPITOLUL XI
CALCULUL PREDICATELOR

§ 1. CALCULUL PROPOZIȚIILOR

În capitolul IX am considerat incidental anumite formulări ale calculului propozițiilor și ale calculului predicatelor. În acest capitol, vom putea descrie mai pe larg o serie de chestiuni din aceste domenii.

Este bine cunoscut că calculul propozițiilor este, în esență, echivalent cu algebra booleană. Avem de exemplu, următorul sistem de axiome pentru algebra booleană. Variabilele sînt x, y, z etc; unica constantă este 0, un termen este: (i) o constantă, sau o variabilă, sau (ii) a' sau ab, dacă a și b sînt termeni. $a = b$ este o formulă, dacă a și b sînt termeni. Apoi putem defini 1 ca $0'$ și $a + b$ ca $(a'b')'$. Axiomele sînt:

(1) $aa = a$,

(2) $ab = ba$,

(3) $a(bc) = (ab)c$,

(4) $a0 = 0$,

(5) dacă $ab' = 0$, atunci $ab = a$,

(6) dacă $ab = a$ și $ab' = a$, atunci $a = 0$.

Un binecunoscut sistem de calcul propozițional este sistemul lui Whitehead—Russell, așa cum a fost modificat de către Bernays și adoptat de către Hilbert și Ackermann. Aici conectivele de bază sînt „*nu*“ și „*sau*“, iar celelalte sînt definite cu ajutorul lor.

Axiomele sînt:

(1) $(p \vee p) \rightarrow p$,

(2) $p \rightarrow (p \vee q)$,

(3) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$,

(4) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$.

Regulile de inferență sînt *modus ponens* și regula substituției dacă p, q, r etc. sînt considerate ca litere propoziționale. Dacă ele sînt considerate ca scheme, atunci regula substituției este superfluă.

Dacă într-o formulă din calculul propoziţional înlocuim p, q etc. prin x, y etc., complementara prin negaţie, intersecţia prin conjuncţie, reuniunea prin disjuncţie, se poate arăta că o formulă A este o teoremă în calculul propoziţional, dacă şi numai dacă $A^* = 1$ este o teoremă în algebra booleană, unde A^* este rezultatul înlocuirilor operate în A.

Un alt binecunoscut sistem este sistemul lui Hilbert şi Bernays, în care toate cele cinci conective uzuale sînt considerate ca primitive. Axiomele sînt:

(1a) $p \supset (q \supset p)$,

(1b) $(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$,

(1 c) $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$;

(2 *a*) $(p \,\&\, q) \supset p$,

(2 b) $(p \,\&\, q) \supset q$,

(2 c) $(p \supset q) \supset ((p \supset r) \supset (p \supset (q \,\&\, r)))$;

(3 a) $p \supset (p \vee q)$,

(3 b) $q \supset (p \vee q)$,

(3 *c*) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$;

(4 a) $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$,

(4 b) $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$,

(4 *c*) $(p \supset q) \supset ((q \supset p) \supset (p \equiv q))$

(5 a) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$,

(5 b) $p \supset \sim \sim p$,

(5 c) $\sim \sim p \supset p$.

Regulile de inferenţă sînt *modus ponens* cu sau fără regula de substituţie, ca mai sus.

Se ştie că aceste sisteme sînt toate complete şi consistente. De asemenea, axiomele sînt independente. Metoda uzuală de a demonstra independenţa constă în alegerea unei interpretări în care o anumită axiomă nu este valabilă, dar toate teoremele derivabile din toate celelalte axiome sînt valabile. De exemplu, dacă luăm 1 drept adevăr, atunci următoarea interpretare probează independenţa axiomei (1 *a*):

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \,\&\, q$	$p \equiv q$	$p \supset q$
1	1	3	1	1	1	1
1	2	3	1	2	3	3
1	3	3	1	3	3	3
2	1	2	1	2	3	1
2	2	2	2	2	1	1
2	3	2	2	3	3	3
3	1	1	1	3	3	1
3	2	1	2	3	3	1
3	3	1	3	3	1	1

În adevăr, cu excepția axiomei (1a), toate celelalte iau valoarea 1, iar dacă p și $p \supset q$ iau întotdeauna valoarea 1, atunci și q dă valoarea 1. Pe de altă parte, dacă p și q iau valoarea 2 respectiv 1, atunci (1a) ia valoarea 3.

Omițind (5c) din sistemul de mai sus, se obține „calculul minimal". Dacă însă, în afară de omiterea lui (5c), se înlocuiesc (5a) și (5b) prin:

$(p \supset \sim p) \supset \sim p$,

(5b′) $\sim p \supset (p \supset q)$,

atunci sistemul rezultat este calculul propozițional intuiționist.

Se știe, de asemenea, că (5a), (5b) și (5c) pot fi înlocuite prin:

(5a′) $(p \supset \sim q) \supset (q \supset \sim p)$,

(5b′) $\sim p \supset (p \supset q)$

(5c′) $((p \supset \sim p) \supset q) \supset ((p \supset q) \supset q)$.

După cum a arătat Lukasiewicz, această formulare are următoarea proprietate: înlăturînd (5c′) obținem calculul intuiționist, iar dacă înlăturăm și (5b′), obținem calculul minimal.

§ 2. FORMULĂRI ALE CALCULULUI PREDICATELOR

Există diferite formulări ale calculului predicatelor cunoscut sub diferite forme: teoria cuantificării, calculul restrîns de ordinul întîi al predicatelor, calculul funcțional de ordinul întîi. Adesea, aceste diverse formulări prezintă interes pentru diferite scopuri. Dăm aici trei formulări alternative.

Folosim literele propoziționale p, q, r etc., variabilele x, y, z etc., predicatele F, G etc. O literă propozițională sau un predicat urmat de variabile este o propoziție atomică. Dacă A și B sînt propoziții, iar v este o variabilă, atunci $\sim A$, $A \vee B$, $(v)A$, $(Ev)B$ sînt propoziții. O propoziție în care nu figurează cuantori este o propoziție elementară. Celelalte conective, &, $\supset$, $\equiv$ pot fi sau incluse inițial, sau introduse cu ajutorul definițiilor. O propoziție este o tautologie, dacă ea este o funcție de adevăr a componentelor sale, conținînd sau nu cuantori, care este totdeauna adevărată în interpretarea uzuală a conectivelor. O intrare dată a unei variabile v într-o formulă se spune că este legată, dacă ea este comandată de cuantorul (v) sau de cuantorul (Ev); în caz contrar, se spune că intrarea este liberă. Dacă pentru toate variabilele libere din A se așează cuantori universali în fața lui A, atunci, dacă rezultatul obținut este o teoremă, scriem $\vdash A$.

2.1. Sistemul L_q (vezi Quine, „Mathematical Logic", ed. 1951).

* 100. Dacă A este o tautologie, atunci $\vdash A$

* 101. $\vdash (v)\ (A \supset B) \supset ((v)A \supset (v)B)$

* 102. Dacă v nu este liberă în A, atunci $\vdash A \supset (v)A$.

* 103. Dacă B se deosebește de A numai prin faptul că are intrări libere ale lui u ori de cîte ori A are intrări libere ale lui v, atunci $\vdash (v)A \supset B$.

* 104. Dacă $A \supset B$ și A sînt teoreme, atunci și B este teoremă.

În acest sistem * 104, *modus ponens*, este unica regulă de inferență, mai puțin generală decît cea uzuală, întrucît A și B nu conțin variabile libere. Se iau în considerare și cuantificări vide, în sensul că $(v)A$ este o propoziție, chiar dacă v nu este liber în A. Aceasta ne permite să ne dispensăm de regula uzuală de generalizare: dacă $\vdash A$, atunci $\vdash (v)A$. Nu se dau reguli pentru cuantorul existențial, deoarece (Ev) se definește ca $\sim (v) \sim$. Nu apare nici regula substituției, deoarece axiomele sînt din capul locului scheme, după procedeul lui von Neumann. Principiul * 100 poate fi înlocuit printr-un număr finit de scheme specifice în modul uzual: uneori acest lucru este convenabil.

Se poate observa (vezi „Journal of Symbolic Logic", **12**, 1947, pp 130—132) că ne putem dispensa de * 102, dacă înlocuim * 100, * 101′ și * 104′ respectiv prin:

* 100′. Dacă A este o tautologie, atunci $\vdash (v)A$.
* 101′. Dacă v nu este liberă în B, atunci $\vdash (v)\ (A \supset B) \supset (A \supset (v)B)$.
* 104′. Dacă $\vdash A$ și $\vdash A \supset B$, atunci $\vdash B$.

Echivalența este imediată. Toate principiile noi, se constată cu ușurință, sînt consecințe ale rezultatelor din ML: * 100 și * 115; * 159; * 111. Reciproc, * 102 se demonstrează folosind * 100′, * 101′, * 104′; * 100 și * 104 sînt cazuri particulare ale lui * 100′ respectiv * 104′; * 101 se poate demonstra prin * 101′ și * 103 cu ajutorul lui * 115, în demonstrația căruia se utilizează numai principiile noi.

Ca un al doilea sistem, prezentăm sistemul din teza lui Herbrand (*Recherches sur la théorie de la démonstration*, Varșovia, 1930). Aici nu trebuie să permitem cuantificări vide (în teza sa, la p. 29 el vorbește de „cuantori fictivi"), iar cuantorul existențial este presupus ca fiind primitiv în timp ce funcțiile de adevăr, cu excepția lui $\sim$ și $\vee$, se definesc cu ajutorul acestora din urmă.

2.2. Sistemul L_h.

L_h1. Regula tautologiei: dacă A este propoziție elementară și tautologie, atunci $\vdash A$.

L_h2. Reguli de inversare: într-o propoziție dată, dacă v nu este liberă în B, putem înlocui una prin cealaltă expresiile din perechile următoare:

(1) $\sim (v)A$, $(Ev) \sim A$;

(2) $\sim (Ev)A$, $(v) \sim A$;

(3) $(v)\ (A \vee B)$, $(v)A \vee B$;

(4) $(Ev)\ (A \vee B)$, $(Ev)\ A \vee B$.

L_h3. Regula generalizării: dacă $\vdash Av$, atunci $\vdash (v)Av$.

L_h4. Regula particularizării: dacă $\vdash Avv$, atunci $\vdash (Eu)\ Avu$, cu alte cuvinte, dacă A este teoremă, iar B se obține din A, substituind u pentru unele intrări (eventual toate) ale lui v, atunci $\vdash (Eu)B$.

L_h5. Regula simplificării: dacă $\vdash A \vee A$, atunci $\vdash A$.

L_h6. *Modus ponens*: dacă $\vdash A \supset B$ și $\vdash A$ atunci $\vdash B$.

Acest sistem remarcabil este deosebit de util pentru studiul demonstrațiilor în calculul predicatelor. Prezentăm acum unele concepte și rezultate ale sistemului:

2.21 Lema lui Dreben: dacă pentru orice A, $\vdash A$ rezultă din $A \vee \ldots \vee A$, atunci $\vdash (B \vee \ldots \vee B) \supset B$.

2.22. Fiind dată o propoziție $H(p,\ldots, q)$ formată din litere propoziționale cu ajutorul conectivelor $\sim$ și $\vee$ *semnul* fiecărei intrări a fiecărei litere în H se definește astfel: (1) p este pozitiv în p; (2) semnul fiecărei intrări a lui p în $\sim A$ este opusul semnului său în A; (3) semnul unei intrări a lui p în A este același ca și semnul său în $A \vee B$ (teza citată, p. 21).

Regulile de inversiune în L_h sînt deosebit de convenabile pentru aducerea propoziției la forma normală *prenex*, adică acea formă cînd toți cuantorii figurează la începutul propoziției. Fiind dată o intrare a unui cuantor, atunci cînd ea este trasă spre început, cuantorul poate să rămînă același sau să treacă de la universal la existențial, sau invers. Definiția 2.22 se poate extinde ușor la intrările oricărei propoziții într-o propoziție dată: trebuie numai să adăugăm că semnul unei intrări a lui A în B este același ca și semnul ei în (v) B sau (Ev) B. Atunci, trăgînd cuantorul spre început, el rămîne același, dacă și numai dacă propoziția componentă care începe cu cuantorul respectiv are o intrare pozitivă în propoziția întreagă.

O trăsătură interesantă a lui L_h este că regula tautologiei folosește numai propoziții elementare. În realitate, se poate deriva următoarea regulă pentru acest sistem:

L_h1'. Regula tare a tautologiei; dacă A este o tautologie, atunci $\vdash A$.

Fiind dată o propoziție elementară tautologică, putem arăta că dacă substituim propoziții mai complicate în locul propozițiilor atomice, rezultatele vor fi întotdeauna teoreme ale sistemului L_h. Pentru aceasta, putem înlocui toate propozițiile atomice prin litere propoziționale și să considerăm o anumită tautologie dată $H(p,\ldots, q)$.

În general, fiecare dintre literele $p,\ldots, q$ poate să aibă în H un număr de intrări pozitive și un număr de intrări negative. În virtutea regulilor de inversare, putem presupune că propozițiile care se substituie literelor $p,\ldots, q$ sînt în formă normală *prenex*. Începem prin a demonstra cazul particular, cînd fiecare literă $p,\ldots, q$ are în H cel mult o intrare pozitivă și cel mult o intrare negativă:

2.23. Pentru orice tautologie elementară $H(p,\ldots, q)$ de acest tip restrictiv, toate rezultatele substituirilor în H sînt teoreme în L_h.

Deși fiecare rezultat se obține cînd facem toate substituțiile pentru diferitele litere propoziționale în același timp, ne imaginăm că împărțim procesul în pași diferiți, cîte un pas pentru fiecare literă propozițională. Să presupunem că am arătat că $H(By, \ldots, A)$ este o teoremă; dorim să arătăm că dacă în locul lui By introducem $(Ey)By$ sau $(y)By$, obținem din nou o teoremă. Să presupunem că p are o intrare pozitivă și una negativă și fie că p este de înlocuit cu $(Ey)By$. Adică, din $H(p,p, \ldots, A)$ dorim să derivăm:

$H((Ex)Bx, (Ey)By, \ldots, A)$ sau $(y)(Ex)H(Bx, By \ldots A)$.

Conform ipotezei, $(H(By, By, \ldots, A)$ este o teoremă. Deci, conform cu L_h4 și L_h3, obținem teorema căutată.

Din 2.23., rezultă că pentru orice A, B, C, D avem: $\vdash B \supset B$, și (1)$\vdash ((A \supset B) \,\&\, (C \supset D)) \supset ((A \vee C) \supset (B \vee D))$.

Dacă în (1), substituim B pentru C și pentru D și $B \vee B$ pentru A, atunci conform cu *modus ponens*, obținem:

$$\vdash ((B \vee B) \supset B) \supset ((B \vee B \vee B) \supset (B \vee B)).$$

Conform cu 2.21 și regula simplificării, avem de asemenea $(B \vee B) \supset B$.

Deci, dacă $\vdash B \vee B \vee B$, atunci $\vdash B \vee B$. Prin urmare, conform cu regula simplificării, dacă $\vdash B \vee B \vee B$, atunci $\vdash B$. Dacă repetăm procesul, substituind în (1) $B \vee B \vee B$ etc. pentru A, obținem:

2.24. Dacă $\vdash B \vee \ldots \vee B$, atunci $\vdash B$.

Cu ajutorul acestui rezultat, putem acum demonstra teorema generală:

Teorema 1. Regula tare a tautologiei, $L_h 1'$, este derivabilă în L_h; există o metodă efectivă (de fapt, primitiv recursivă), astfel încît pentru orice tautologie A putem să găsim demonstrația ei în L_h.

Vom ilustra procedeul cu ajutorul unui exemplu simplu. Fie că $H(p; p, p, p; q, q; q)$ este o tautologie elementară, avînd o intrare pozitivă a lui p, două ale lui q, trei intrări negative ale lui p și una a lui q, și fie că trebuie să demonstrăm rezultatul substituirii lui $(x)(Ey)Fxy$ pentru p și a lui $(z)Gz$ pentru q.

Conform cu $L_h 2$, $L_h 3$ și $L_h 4$, este suficient să demonstrăm:

(2) $H((Ey)Fxy; (Ey)Fxy, (Ey)Fxy, (Ey)Fxy;$

$$(z)G(z), (z)Gz; (z)Gz).$$

Dar, conform cu 2.24, $L_h 3$ și $L_h 4$, pentru a demonstra pe (2) este suficient să demonstrăm:

(3) $H(Fxu; Fxu, Fxv, Fxw; (z)Gz, (z)Gz; (z)Gz) \vee H(Fxv; \ldots) \vee H(Fxw; \ldots)$.

Din același motiv, la rîndul său, (3) rezultă din:

(4) $H(Fxu; \ldots; Gz, Gy; Gz) \vee H(Fxv; \ldots; Gz) \vee H(Fxw; \ldots; Gz) \vee H(Fxu; \ldots \ldots; Gy) \vee H(Fxv; \ldots; Gy) \vee H(Fxw; \ldots; Gy)$.

Acum trebuie să arătăm că deoarece $H(p; p, p, p; q, q; q)$ este o tautologie, (4) este de asemenea o tautologie conform cu $L_h 1$. În loc de două propoziții atomice, p și q, avem acum cinci; Fxu, Fxv, Fxw, Gz, Gy. Dacă punem $H(p; a, b, c; d, e; q)$ în formă normală conjunctivă, atunci, deoarece semnele propozițiilor atomice se păstrează, fiecare termen trebuie să fie o parte a lui

(5) $p \vee \sim a \vee \sim b \vee \sim c \vee d \vee e \vee \sim q$.

Deoarece H inițial este o tautologie, fiecare termen trebuie să conțină fie pe p, fie cel puțin una dintre $\sim a$, $\sim b$, $\sim c$, sau $\sim q$ și cel puțin una dintre d și e. Acum, dacă punem fiecare termen al disjuncției (4) într-o formă corespunzătoare și obținem

(4′) $H(a; a, b, c; d, e; d) \vee \ldots \vee H(c; a, b, c; d, e; e)$,

atunci putem arăta că (4′) trebuie să fie adevărat pentru toate combinațiile posibile ale valorilor de adevăr ale lui a, b, c, d, e.

În primul rînd, să considerăm forma corespunzătoare pentru (3):

(3′) $H(a;\ a,\ b,\ c;\ q,\ q;\ q) \vee H(b;\ ...) \vee H(c;\ ...)$.

Aceasta trebuie să fie o tautologie. Dacă a, b, c, sînt toate false, orice termen conjunctiv din orice termen disjunctiv al lui (3′) trebuie să fie adevărat, deoarece el trebuie să conțină fie q și $\sim q$, fie cel puțin una dintre $\sim a$, $\sim b$, $\sim c$. Dacă cel puțin una dintre a, b, c este adevărată, să zicem b, atunci $H(b;\ a,\ b,\ c;\ q,\ q;\ q)$ trebuie să fie totdeauna adevărată.

Deci dacă luăm forma normală conjunctivă a lui

(3″) $H(a;\ a,\ b,\ c;\ d,\ e;q) \vee H(b;\ ...) \vee H(c;\ ...)$,

atunci fiecare termen conjunctiv trebuie să conțină sau d și $\sim q$ sau e și $\sim q$ presupunînd că am înlăturat toți termenii $a \vee \sim a$, $b \vee \sim b$, $c \vee \sim c$. Dar (4′) este echivalent cu disjuncția celor două propoziții care se obțin din (3″), substituind d respectiv e pentru q. Pentru orice combinație a valorilor de adevăr ale lui a, b, c, d, e, dacă d, e sînt amîndouă false, atunci oricare este adevărată, deoarece intervine $\sim q$. Dacă cel puțin una este adevărată, atunci luăm acea una.

Aceasta încheie demonstrația teoremei 1, deoarece exemplul cuprinde toate posibilitățile esențiale ale cazului general.

Demonstrația se bazează pe metoda utilizată de Herbrand în teza lui. Dar raționamentul din exemplul de mai sus este ceva mai complicat decît la Herbrand, deoarece cred că demonstrația lui mai simplă prezintă anumite lacune. La Whitehead și Russell, întregul punct * 9 este destinat schițării demonstrației teoremei 1 pe o cale cu totul diferită. Deoarece ei nu stabilesc completitudinea sistemului lor de axiome pentru calculul propozițional, ei nu pot utiliza raționamente de felul celor din demonstrația de mai sus.

În teza lui, Herbrand continuă prin a indica procedeul cu ajutorul căruia orice demonstrație dată în L_h se poate transforma într-una care nu utilizează regula *modus ponens*. Aceasta este renumita teoremă a lui *Herbrand:*

2.25. Există un procedeu efectiv (de fapt, primitiv recursiv) cu ajutorul căruia, fiind dată o demonstrație în formularea obișnuită a calculului predicatelor, putem să o transformăm într-o demonstrație în cadrul sistemului L_h, fără a recurge la regula *modus ponens*.

În legătură cu această teoremă există o literatură bogată, care însă urmează mai mult linia lui Gentzen, o alternativă a liniei lui Herbrand. Nu vom încerca să expunem demonstrația inițială a lui Herbrand, deși considerăm că ea are multe trăsături distinctive interesante care merită să fie cercetate. În schimb vom considera unele rezultate conexe și unele formulări diferite.

În matematică, utilizăm constant următorul mod de raționament: „există y astfel încît Ay. Fie că x este astfel și să examinăm dacă x are cutare sau cutare proprietate". Utilizînd simbolismul din calculul predicatelor, am putea încerca să formalizăm acest raționament, utilizînd regula „din $(Ey)\,Ay$ inferă Ax", dar deoarece x nu este ales în mod arbitrar, ci ca un obiect arbitrar care posedă proprietatea A, nu ne putem aștepta ca variabila x dintr-o asemenea regulă să se comporte la fel ca variabilele uzuale din logica matematică. Pentru a face față acestei dificultăți, Hilbert a introdus simbolul ε și el inferă $A(\varepsilon_x Ax)$ din $(Ex)Ax$. Acest simbol este tratat amănunțit în volumul al II-lea al cărții lui Hilbert și Bernays.

În acest caz, calculul predicatelor se formulează întrucîtva diferit, adăugînd termenii care sînt expresii în $\varepsilon_x Ax$ etc. Fv, Gvu etc. sînt propoziții pentru orice termeni arbitrari v, u etc. De exemplu, pornind de la sistemul L_h, obținem cu modificările adecvate un sistem nou, L_b.

2.3. Sistemul L_b.

Sistemul include toate regulile L_h1—L_h7, propozițiile fiind interpretate în sens extins, precum și o regulă nouă:

(ε) Regula ε: $\vdash (Ev)\, Av \supset A(\varepsilon_v Av)$.

De altfel, dacă simbolul ε este dat în aparatul primitiv, se pot omite cuantorii, care se introduc prin următoarele definiții:

2.31. $(Ev)\, Av$, dacă și numai dacă $A(\varepsilon_v Av)$.

2.32. $(v)\, Av$, dacă și numai dacă $A(\varepsilon_v \sim Av)$.

Pentru sistemul L_b, în Hilbert-Bernays II se demonstrează două teoreme fundamentale (enunțate la p. 18). Dacă F este un sistem formalizat peste L_b și, în general, conține simboluri adiționale pentru indivizi și predicate, precum și un număr finit de axiome noi $A_1, \ldots, A_n$ care nu conțin simbolul ε, dar pot să conțină cuantori, atunci:

2.33. Prima teoremă ε—. Dacă axiomele $A_1, \ldots, A_n$ nu conțin variabile legate și dacă B este o teoremă a lui F, care nu conține variabile legate, atunci B se poate deriva din $A_1, \ldots A_n$, fără a utiliza în derivare variabile legate.

2.34. A doua teoremă ε—. Dacă B nu conține simbolul ε, dar poate să conțină cuantori, atunci el poate fi derivat din $A_1, \ldots, A_n$, fără a utiliza în derivare simbolul ε (adică, el poate fi derivat în L_h).

La Hilbert și Bernays, teorema lui Herbrand este dedusă din aceste două, iar cele două teoreme ε sînt extinse pentru a cuprinde și axiomele egalității. Nu vom insista asupra demonstrației acestor rezultate.

Dacă combinăm utilizarea simbolului ε cu metoda deducției naturale, așa cum a fost dezvoltată de către Quine (*Methods of Logic*, 1950), obținem un sistem L_g simetric, care are aceiași termeni și aceleași propoziții ca și L_b, dar utilizează reguli diferite. În particular, teorema deducției este luată aici ca regulă primitivă; de asemenea, se permite introducerea oricărei axiome noi ca ipoteză. Rezultatul final este o teoremă în L_g numai dacă el este eliberat de toate ipotezele. Formal, o ipoteză poate fi marcată cu un asterisc $*$ la început, care se pune de asemenea și în fața tuturor consecințelor ipotezei. Un rînd dintr-o demonstrație în L_g este o teoremă în L_g, numai dacă el nu începe cu asteriscul $*$ considerat.

L_g1. Regula ipotezei: putem introduce orice propoziție A ca un rînd în orice stadiu al deducției, cu condiția de a prefixa rîndul și toate consecințele sale cu un asterisc (*) nou.

L_g2. Regula deducției: dacă în ipoteza $*A$ ajungem la $*B$, atunci este permis un rînd nou $A \supset B$, avînd un * mai puțin.

L_g3. Regula tautologiei: este permis orice rînd care este implicat în sensul calculului cu valorile de adevăr, de către unul sau mai multe rînduri precedente luate împreună.

L_g4. Regula generalizării: dacă v este o variabilă și $\vdash Av$, atunci $\vdash (v)Av$.
L_g5. Regula exemplificării: dacă u este un termen și $\vdash (v)Av$ atunci $\vdash Au$.
L_g6. Regula particularizării: dacă u este un termen și $\vdash Au$, atunci $\vdash (Ev)Av$.
L_g7. Regula specificării: dacă $\vdash (Ev)Av$, atunci $\vdash A(\varepsilon_v Av)$.

În acest sistem se demonstrează imediat o teoremă întrucîtva asemănătoare cu a doua ε — teoremă. Pentru aceasta este necesară o regulă adițională, care nu mai este derivabilă, dacă se înlătură L_g7:

L_g7': Regula slăbită a specificării: dacă $\vdash Av \supset B$ și v nu este liber în B, atunci $\vdash (Ev)\,Av \supset B$.

Avem atunci:

2.4. Dacă B este derivabil în L_g din $A_1, \ldots, A_m$ și dacă simbolul ε nu figurează în $A_1, \ldots, A_m$, B, atunci B poate fi derivat din $A_1, \ldots A_m$ cu ajutorul regulei L_g7' dar fără a utiliza în derivare simbolul ε.

Fie dată în L_g o derivare a lui B din $A_1, \ldots, A_m$ și fie că

$$\varepsilon_x C_1 x, \ \ldots \ \varepsilon_x C_n x$$

sînt toți termenii ε care intră în demonstrație cu ajutorul regulei L_g7, în ordinea în care apar în demonstrație.

Rezultă că, dacă în loc de a utiliza L_g7, scriem fiecare dintre $C_1(\varepsilon_x C_1 x), \ldots$ $\ldots, C_n(\varepsilon_x C_n x)$, obținem din nou o demonstrație a lui B, dar de astă dată din $A_1, \ldots, A_m$ împreună cu $C_1(\varepsilon_x C_1 x), \ldots, C_n(\varepsilon_x C_n x)$. Acum problema este de a găsi o altă demonstrație care să nu cuprindă premisele adiționale.

Să considerăm ultima dintre ele: $C_n(\varepsilon_n C_n x)$. Conform cu regula L_g2, putem demonstra „$C_n(\varepsilon_n C_n x) \supset B$“ din $A_1, \ldots, A_m$, $C_1(\varepsilon_x C_1 x), \ldots, C_{n-1}(\varepsilon_x C_{n-1} x)$ fără a utiliza L_g7. De-a lungul demonstrației putem înlocui $\varepsilon_x C_n x$ peste tot printr-o variabilă nouă, să zicem „v“, și să obținem o demonstrație a lui „$C_n v \supset B$“. Conform cu regula adițională L_g7' introdusă special în acest scop, putem acum deriva „$(Ev) C_n v \supset B$“ fără a utiliza L_g7.

Dar „$C_n(\varepsilon_n C_n x)$“ a fost introdus inițial prin L_g7. Premisa sa „$(Ex) C_n x$“ este deci derivabilă din $A_1, \ldots A_m, C_1(\varepsilon_x C_1 x), \ldots, C_{n-1}(\varepsilon_x C_{n-1} x)$. Prin urmare, deoarece „$(Ev) C_n v \supset B$“ este de asemenea derivabil din aceleași, rezultă că B este derivabil din $A_1, \ldots, A_m$, $C_1(\varepsilon_x C_1 x), \ldots, C_{n-1}(\varepsilon_x C_{n-1} x)$ fără a utiliza L_g7.

Prin urmare am reușit să eliminăm premisa $C_n(\varepsilon_x C_n x)$. Repetînd același proces, eliminăm celelalte premise, una cîte una, și obținem o demonstrație a lui B din $A_1, \ldots, A_m$, în care nu se face uz de L_g7.

În demonstrația rezultată pot să mai apară ε — termeni introduși prin L_g1, L_g3 și L_g5. Să presupunem că

$$\varepsilon_x H_1 x, \ \ldots, \ \varepsilon_x H_k x$$

sînt toți termeni ε din demonstrația rezultată, așezați în ordinea ultimelor lor intrări. Dacă înlocuim $\varepsilon_x H_k x$ de-a lungul întregii demonstrații printr-o nouă variabilă liberă, obținem din nou o demonstrație a lui B din $A_1, \ldots, A_m$, în care nu se utilizează L_g7. Repetînd același lucru cu $\varepsilon_x H_{k-1} x$ și așa mai departe, obținem în final o demonstrație a lui B din $A_1, \ldots, A_m$, în care nu mai figurează simbolul ε.

Uneori se consideră că calculul predicatelor include și teoria egalității. Aceasta înseamnă că se fixează un predicat particular Rxy, care se poate

rescrie ca $x = y$ împreună cu anumite axiome pentru el. Pe această cale, obținem sistemul:

2.5. Sistemul L_e. Acesta poate fi de exemplu L_q la care se adaugă axiomele egalității L_e1 și L_e2.

L_e1. $\vdash v = v$.

L_e2. Dacă B diferă de A numai prin faptul că are intrări libere ale lui u în locul unor intrări libere ale lui v și dacă $\vdash v = u$, atunci $\vdash A \equiv B$.

De asemenea, adesea este convenabil să includem în calculul predicatelor nume și functori constanți. Atunci variabilele generează conceptul mai general de termen care cuprinde: constantele, variabilele și functorii urmați de termeni. Deoarece aceste simboluri adiționale nu afectează, în general, considerațiile globale cu privire la calculul predicatelor, adesea facem abstracție de ele, deși ori de cîte ori este necesar le considerăm ca fiind date.

§ 3. COMPLETITUDINEA CALCULULUI PREDICATELOR

Utilizînd conceptul de extindere consistentă maximă (Gödel, *Eine Eigenschaft der Realisierung des Aussagenskalküls*, în „Ergebnisse eines Math. Kolloquiumus" **4**, 1933, pp. 20—21; L. Henkin, în „Journal of Symbolic Logic", **14**, 1949, pp. 159—166), se poate da o demonstrație scurtă a completitudinii sistemelor L_q, L_h, L_b, L_g.

Teorema 2. Sistemele L_q, L_h, L_b, L_g sînt toate complete; în fapt, nu numai o formulă separată, dar și orice mulțime numerabilă de formule, dacă nu conține simbolul ε și este consistentă cu sistemele date (adică nu intervin contradicții dacă elementele ei sînt luate ca axiome) are un model numerabil.

Demonstrația se poate da la început pentru L_b și L_g, deoarece, conform cu 2.41, teorema va rămîne valabilă pentru L_q și L_h.

Presupunem că toate formulele cuantificate, adică, să zicem, toate formulele din L_g, sînt numărate într-o anumită ordine astfel încît fiecare este asociată cu un întreg pozitiv unic: q_1, q_2 etc. Dacă se dă o mulțime consistentă de formule S_0, atunci extinderea ei consistentă maximă se construiește în felul următor: Dacă S_0 împreună cu q_1 este consistentă, atunci S_1 este S_0 împreună cu q_1; în caz contrar, S_1 este același ca și S_0. În general, dacă S_n împreună cu q_{n+1} este consistentă, atunci S_{n+1} este S_n împreună cu q_{n+1}; în caz contrar, S_{n+1} este același ca și S_n. Extinderea consistentă maximă va fi reuniunea tuturor mulțimilor S_i.

Fie S_0 o mulțime consistentă de formule din L_g. Putem presupune că toate variabilele libere sînt legate cu cuantori universali, așezați la început (adică presupunem numai formule „închise"), iar apoi eliminăm toți cuantorii universali și — în modul obișnuit — toate conectivele în afară de „nici". Construim apoi extinderea maximă (s-o numim S) a lui S_0 în cadrul sistemului L_g sau L_b. Vom spune că o formulă închisă este adevărată sau falsă după cum aparține sau nu lui S. Afirm că astfel obținem un model al lui S_0 în domeniul

numerabil D al tuturor ε — termenilor constanți (adică, termenii care nu conțin variabile libere).

În primul rînd, dacă P este un predicat arbitrar de n argumente, iar $a_1, ..., a_n$ sînt n termeni constanți, atunci sau $P(a_1 ..., a_n)$, sau $\sim P(a_1, ..., a_n)$ este adevărată, dar nu pot fi amîndouă adevărate, deoarece S este consistentă maximal. În al doilea rînd, „nici p nici q" este adevărată, dacă și numai dacă atît p cît și q nu sînt adevărate, iarăși din cauză că S este consistentă maximal. În al treilea rînd, $(Ex)F(x)$ este adevărată, dacă și numai dacă există un anumit ε — termen constant, astfel încît $F(a)$ este adevărată, deoarece „$(Ex)f(x) \supset F(\varepsilon_x Fx)$" aparține lui S. Mai departe, deoarece S_0 este o submulțime a lui S, toate formulele din S_0 sînt adevărate.

Aceasta completează demonstrația teoremei 2, completitudinea revenind pentru cazul particular cînd S_0 se reduce la o formulă unică.

Această teoremă are o istorie lungă.

În 1915, Löwenheim („Math. Annalen", **76**, pp. 447—470) a demonstrat:

3.1. Fiecare formulă cu cuantori care este satisfăcută în vreun domeniu oarecare (nevid), este satisfăcută într-un domeniu numerabil.

În 1920, Skolem („Vidensk. Skrifter 1, Math. Naturw. Klasse" Oslo, nr. 4) a ameliorat demonstrația și a extins-o la orice mulțime numerabilă de formule. Aceste demonstrații utilizează axioma alegerii. Ideea este deosebit de simplă și frapantă. Să presupunem dată o formulă unică în formă normală *prenex*:

p: $(x)(Ey)(Ez)(w)(u)(Ev)\,H(x, y, z, w, u, v)$.

Urmînd pe Gödel, să numim „funcții Skolem pentru p și M" orice funcții $f(x), g(x), h(x, w, u)$ în M, astfel încît pentru orice elemente x, w, și u din M are loc următoarea:

p^*: $H(x, f(x), g(x), w, u, h(x, w, u))$.

Conform cu axioma alegerii, există asemenea funcții, f, g și h. Ele pot fi folosite rodnic în numeroase considerații.

Deci, dacă o formulă cu cuantori p este în general satisfăcută, ea este satisfăcută și într-un domeniu numerabil. Astfel, dacă 0 este un obiect arbitrar, domeniul este reuniunea tuturor mulțimilor M_i, unde $M_0 = 0$ și M_{j+1} conține toate obiectele și numai obiectele care fie că aparțin lui M_j, fie că sînt $f(a)$, $g(a)$ sau $h(a, b, c)$pentru anumiți a, b și c, care aparțin lui M_j.

În 1923 și 1929 (publicația citată, nr. 4/1929), Skolem a demonstrat 3.1 și generalizarea ei la formule infinite, fără a utiliza axioma alegerii.

Skolem presupune că toate formulele cu cuantori sînt date în formă normală *prenex*. Dar, pentru prescurtare, să considerăm o singură formulă în formă normală Skolem:

$$(A)\quad (x_1) ... (x_m)(Ey_1) ... (Ey_n)\,H(x_1, ..., x_m;\ y_1, ..., y_n).$$

Skolem consideră că $H(1, ..., 1;\ 2, ..., n+1)$ ca H_1 iar apoi așează toate m-uplurile de întregi pozitivi nu mai mari decît $n+1$ într-o ordine arbitrară, primul fiind m-uplul $(1, ..., 1)$. Dacă $(k_{i1}, ..., k_{im})$ este al i-lea m-uplu, atunci H_i este:

$$H_{i-1}\ \&\ H(k_{i1} ... k_{im};\ \ n(i-1)+2, ..., ni+1).$$

Apoi el consideră toate m-uplurile de întregi pozitivi utilizați și din nou cuplează ai i-lea m-uplu cu n-uplul format din n întregi consecutivi, începînd cu $n(i-1)+2$. Pe această cale el definește un șir de conjuncții libere de cuantori $H_1, H_2, \ldots$, toate obținute din formula A.

Demonstrația lui 3.1 dată de dînsul conține două părți:

3.2. Dacă o formulă cu cuantori A este satisfăcută, atunci nici una din formulele $\sim H_1, \sim H_2, \ldots$, nu este o tautologie.

3.3. Dacă nici una dintre formulele $\sim H_1, \sim H_2, \ldots$ nu este o tautologie, atunci formula A este satisfăcută în domeniul întregilor pozitivi.

În același timp, Herbrand („Comptes rendus", Paris, **188**, 1929, p. 1076), a demonstrat ca o parte a renumitei sale teoreme:

3.4. Dacă $\sim A$ nu este o teoremă a calculului predicatelor, atunci nici una dintre $\sim H_1, \sim H_2, \ldots$, nu este o tautologie.

Completitudinea calculului predicatelor rezultă ca un corolar din 3.3 și 3.4.

Ceva mai tîrziu, Gödel a demonstrat aceste teoreme în mod independent („Monatsh Math. Phys." **37**, 1930, pp. 349—360). Demonstrația lui a devenit larg cunoscută prin cartea lui Hilbert și Ackermann.

Pe cînd demonstrația teoremei lui Herbrand (a se vedea 2.25 de mai sus) pretinde considerații matematice asupra structurii demonstrațiilor, Beth și Dreben au observat că din 3.3 și 3.4 se poate deriva o teoremă Herbrand mai slabă, care utilizează un procedeu general recursiv — și nu primitiv recursiv — pentru a obține o demonstrație în care nu intervine *modus ponens*. Astfel, conform cu 3.3, dacă A este o teoremă, unele dintre $H_1, H_2 \ldots$ trebuie să fie tautologii. Deoarece $H_1, H_2 \ldots$ se pot construi efectiv și se pot testa în ce privește proprietatea de tautologie, putem găsi efectiv o tautologie H_j, îndată ce A este o teoremă. Conform demonstrației lui 3.4, putem scrie deci o demonstrație a lui A în care intervin numai L_h1—L_h5, adică nu intervine regula *modus ponens*.

Încheiem cu o observație cu privire la relația dintre axioma alegerii și simbolul ε.

Este clar că există o anumită legătură între axioma alegerii și regulile determinînd operatorul ε al lui Hilbert. Uneori se spune că regula ε este principiul generalizat al alegerii. Aceasta este o eroare. De exemplu, dacă axioma alegerii ar fi un caz particular al ε — regulei, cum ar putea consistența alegerii să nu rezulte din ε — teoremele conform cărora ne putem dispensa de aplicarea regulilor pentru ε, atunci cînd acest operator nu figurează nici în axiome nici în concluzii? În realitate, dacă axioma alegerii ar fi derivabilă din regula ε, atunci cu ajutorul ε— teoremelor am putea deriva axioma alegerii din celelalte axiome ale teoriei mulțimilor. Dar după cîte știm, independența axiomei alegerii este o problemă nerezolvată [1].

Desigur, există cel puțin o deosebire între regula ε și axioma alegerii. Prima realizează o selecție unică, în timp ce a doua pretinde că este posibilă o alegere simultană din fiecare membru al unei mulțimi date și că toate aceste elemente

selectate se pot alătura pentru a genera o mulțime nouă. Așadar, nu avem vreun motiv pentru a presupune că axioma alegerii ar rezulta din regula ε.

Dacă

$$(x)\,(Ey)\,(z)\,(z\varepsilon y \equiv ((Ew)\,(w\varepsilon x \,\&\, z = \varepsilon_u(u\varepsilon w)))$$

este o teoremă, într-un anumit sistem, a teoriei mulțimilor, atunci axioma alegerii rezultă din regula ε în sistemul respectiv. Dar în acest caz este foarte neverosimil ca operatorul ε să nu apară în axiomele sistemului considerat.

Există și cazuri cînd, deși regula ε poate da rezultatul dorit, axioma alegerii nu poate s-o facă. De exemplu, în teoria lui Zermelo putem infera „$(x)\,R(x, \varepsilon_y Rxy)$“ din „$(x)\,(Ey)Rxy$“ conform cu regula ε, dar nu putem infera „există f astfel încît $(x)\,R(x, fx)$“ din „$(x)\,(Ey)Rxy$“ cu ajutorul axiomei alegerii și ținînd seama de absența mulțimii universale în teoria lui Zermelo.

Majoritatea observațiilor din acest paragraf și din cel precedent au apărut în *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, Amsterdam, 1955, pp. 57—84.

Malțev, Henkin, A. Robinson și Tarski au utilizat teorema completitudinii calculului predicatelor pentru a obține rezultate algebrice. Se cunoaște, de asemenea, direcția complementară de a demonstra rezultate care prezintă interes pentru logică prin mijloace pur algebrice.

Teorema completitudinii este utilizată în forma următoare: dacă A este o mulțime numerabilă, iar B o mulțime finită de formule în calculul predicatelor și dacă pentru orice submulțime finită A' a lui A există un model care satisface atît B cît și A, atunci există un model care satisface A și B. Aceasta se poate folosi, de exemplu, pentru a demonstra că orice ordine parțială se poate extinde pînă la o ordine totală. Faptul că o relație R este o ordine totală se poate exprima în calculul predicatelor, spunînd că R este tranzitivă și că pentru orice x și y distincți avem Rxy sau Ryx. Aceste propoziții în R formează mulțimea finită B. Dacă R este dată ca ordine parțială, atunci A este mulțimea tuturor propozițiilor $R(a, b)$ care sînt adevărate, adică în care obiectele a și b se află în relația de ordine parțială R. Deoarece fiecare submulțime finită a lui A se poate pune într-o ordine totală, se poate găsi un model care să satisfacă atît B, cît și orice mulțime finită cuprinsă în A. Deci, se poate găsi un model care să satisfacă atît A cît și B, ceea ce revine la a spune că R se poate extinde pînă la o ordine totală.

Notă adițională. B. S. Dreben dă următoarea demonstrație pentru 2.21 de mai sus. Să considerăm cazul cînd B este $(x)\,(Ey)\,(z)\,Gxyz$ și există trei intrări ale lui B în premisă. Fie că G_t este

$$Gx_{3t-2}\,x_{3t-1}\,x_{3t};$$

atunci, conform cu 2.23,

$$((G_1 \vee G_2 \vee G_3) \supset G_1) \vee ((G_4 \vee G_5 \vee G_6) \supset G_2) \vee ((G_7 \vee G_8 \vee G_9) \supset G_3)$$

este teoremă.

Deci, prin aplicări repetate ale lui $L_k 3$ și $L_k 4$, punem B în locul fiecărui $G_j (j = 1, \ldots, 9)$. Deci concluzia din 2.21 rezultă din ipoteza de acolo.

CAPITOLUL XII
CALCULE ALE PREDICATELOR MULTISORTATE

§ 1. TEORII UNISORTATE ŞI TEORII MULTISORTATE

Anumite sisteme axiomatice conţin mai mult decît o singură categorie de obiecte fundamentale; de exemplu, în geometrie figurează: puncte, linii şi plane; în teoria tipurilor întîlnim indivizi, clase de indivizi, clase de clase de indivizi etc. Este firesc să folosim variabile de diferite spețe avînd domeniul de variaţie respectiv restrîns la diferite categorii de obiecte şi să presupunem ca substructură calculul uzual al predicatelor pentru fiecare din diferitele spețe de variabile, incluzînd calculul propoziţional uzual pentru toate formulele sistemului. O teorie axiomatică edificată astfel o vom numi teorie cu mai multe sorturi, pe scurt: multisortată. Ne vom referi la teoria funcţiilor de adevăr şi a cuantorilor din teoria respectivă ca fiind logica ei elementară (cu mai multe sorturi) şi vom numi simbolurile şi axiomele (inclusiv schemele de axiome) primitive simboluri primitive proprii şi axiome proprii ale sistemului. Printre simbolurile primitive proprii ale unui sistem cu mai multe sorturi $T_n (n = 2, ...,)$ se pot include simbolurile de unele sau de toate spețele următoare: (1) predicate care denotă proprietăţi şi relaţii tratate în sistem; (2) functori care denotă funcţii tratate în sistem; (3) nume constante pentru anumite obiecte ale sistemului. Pentru simplitate însă vom presupune că sistemele T_n, pe care le considerăm, nu conţin nici nume, nici functori.

Fiecare teorie T_n poate fi descrisă după cum urmează: există cel puţin un predicat. Există variabile de diferite spețe x_1, y_1, z_1 ... (variabile de speţa întîi); $x_2, y_2, z_2, ...$; $x_n, y_n, z_n, ...$ Fiecare predicat cu k locuri ($k = 1, 2, ...$) avînd locurile ocupate de variabile de speţă convenabilă este o formulă (denumită formulă atomică); toate cuantificările, precum şi combinaţiile de formule cu ajutorul funcţiilor de adevăr sînt din nou formule. În general, fiecărui loc dintr-un predicat îi poate fi proprie (adică îi poate conveni) mai mult decît o singură speţă de variabile; dar, pentru a simplifica expunerea noastră, vom presupune întotdeauna că fiecare loc din fiecare predicat trebuie completat printr-o anumită speţă de variabile şi numai una. Acestea fiind precizate, o logică elementară cu mai multe sorturi L_n este determinată prin principiile $1_n - 5_n$:

1_n. Dacă Φ este o tautologie, atunci $\vdash \Phi$.

2_n. $\vdash (\alpha)(\Phi \supset \psi) \supset ((\alpha)\Phi \supset (\alpha)\psi)$.

3_n. Dacă α nu este liberă în Φ, atunci $\vdash (\alpha)\Phi$.

4_n. Dacă α și α' sînt variabile de aceeași speță, iar Φ' se deosebește de Φ doar prin aceea că conține intrări libere ale lui α' ori de cîte ori Φ conține intrări libere ale lui α, atunci $\vdash (\alpha)\ \Phi \supset \Phi'$.

5_n. Dacă $\Phi \supset \psi$ și Φ sînt teoreme în L_n, atunci ψ este teoremă.

Adăugînd anumite axiome proprii (sau eventual scheme de axiome) la L_n, obținem un sistem T_n.

Altă cale este de a formula un sistem care cuprinde diferite categorii de obiecte fundamentale, folosind doar o singură speță de variabile care au ca domeniu de variație reuniunea tuturor categoriilor. Cea mai simplă cale de a face distincție între categorii este de a introduce n predicate cu un loc S_1, S_2, ..., S_n, astfel încît x aparține la categoria a i-a, dacă și numai dacă $S_i(x)$. Atunci putem edifica o teorie cu un singur sort $T_1^{(n)}$ corespunzătoare teoriei T_n în următorul fel: în $T_1^{(n)}$ formulele atomice sînt determinate de predicatele din T_n și de S_1, ..., S_n, avînd locurile ocupate de variabilele generale. Formulele și celelalte entități se definesc în $T_1^{(n)}$ în modul uzual. Și $T_1^{(n)}$ conține o logică elementară uzuală de un sort L_1 determinată de cinci principii 1_1—5_1 (corespunzătoare cu * 100 — * 104 în L_q din capitolul precedent) care sînt similare cu 1_n—5_n, dar se referă la formulele și variabilele din $T_1^{(n)}$. Atunci prin logica elementară $L_1^{(n)}$ înțelegem sistemul obținut din L_1 prin adăugirea următorului principiu adițional:

6_1. Pentru fiecare $i (i = 1, ..., n)$, $(E\alpha)\ S_i(\alpha)$ este o teoremă.

De asemenea, introducem o regulă de traducere a enunțurilor din L_n în enunțul din $L_1^{(n)}$ și reciproc:

RT. Un enunț Φ' din $L_1^{(n)}$ și un enunț Φ din L_n sînt fiecare o traducere a celuilalt, dacă și numai dacă Φ' este rezultatul obținut din Φ prin substituire simultană pentru fiecare expresie de forma $(x_i)\ (-x_i-)$ din $\Phi (i = 1, ..., n)$ a unei expresii de forma $(x)\ (S_i(x) \supset (-x-))$, (subînțelegîndu-se că diferitele variabile din Φ se înlocuiesc prin variabile diferite în Φ').

Utilizînd această regulă, observăm că orice enunț din L_n are o traducere în $L_1^{(n)}$ iar unele enunțuri din $L_1^{(n)}$ (dar nu toate) au traduceri în L_n. În particular, axiomele proprii din T_n au toate traduceri în $L_1^{(n)}$, iar $T_1^{(n)}$ este tocmai $L_1^{(n)}$ + traducerile acestor axiome proprii din T_n.

Se pot demonstra următoarele rezultate (I)—(IV):

(I) Un enunț al unui sistem T_n este demonstrabil în T_n, dacă și numai dacă traducerea sa în sistemul corespunzător $T_1^{(n)}$ este demonstrabilă în $T_1^{(n)}$.

(II) Dacă un sistem T_n este consistent, atunci sistemul corespunzător $T_1^{(n)}$ este de asemenea consistent.

(III) Dacă $T_1^{(n)}$ este consistent, atunci și T_n este consistent.

(IV) Există o metodă primitiv recursivă cu ajutorul căreia, fiind date un enunț din T_n și o demonstrație a sa în T_n, putem stabili o demonstrație în $T_1^{(n)}$ pentru traducerea enunțului respectiv în $T_1^{(n)}$; și reciproc, există o metodă primitiv recursivă, cu ajutorul căreia fiind dat un enunț din $T_1^{(n)}$, care are o traducere în T_n și fiind dată o demonstrație pentru acest enunț în $T_1^{(n)}$, putem găsi o demonstrație în T_n pentru traducerea sa în T_n.

Din rezultatele (I), (II) și (III) se vede că pentru chestiunile în legătură cu consistența lui T_n putem să considerăm în locul lui T_n pe $T_1^{(n)}$, care este simplu, întrucît conține numai o singură speță de variabile. Pe de altă parte, $T_1^{(n)}$ este mai complicat decît T_n, întrucît conține predicatele noi S_1, S_2, ..., S_n.

În mai multe cazuri, fiind dat un sistem T_n, putem găsi un sistem corespunzător, care conține numai o singură speță de variabile și nu conține predicate noi și care poate servi aceloraşi țeluri, atît în ce privește studiul problemelor de consistență, cît și pentru dezvoltarea teoriei. Dacă putem sau nu să găsim un asemenea sistem corespunzător depinde de faptul dacă putem exprima apartenența la diferite categorii în felul următor: variabile generale (al cărui domeniu de variație este reuniunea tuturor domeniilor speciale), cuantorii și conectivele funcții de adevăr, parantezele drepte, apoi literele predicative ale teoriei cu mai multe sorturi date, reconstruite astfel, încît să aibă locurile lor completabile prin variabile generale. Se pare că, în majoritatea cazurilor, acest lucru este posibil.

Dintre teoremele (I)—(IV), (III) este evidentă. Apoi, (II) este o consecință directă a lui (I). În adevăr, există, în mod evident, un enunț Φ în $T_1^{(n)}$, astfel încît atît Φ, cît și $\sim \Phi$ sînt translatabile în T_n. Să presupunem că $T_1^{(n)}$ este inconsistent. Atunci fiecare enunț din $T_1^{(n)}$ se poate demonstra, deci atît Φ, cît și $\sim \Phi$ se pot demonstra în $T_1^{(n)}$. Așadar, conform cu (I), traducerile lor ψ și $\sim \psi$ în conformitate cu RT sînt amîndouă demonstrabile în T_n, adică T_n este inconsistent.

În acest capitol vom arăta, în primul rînd, că în L_n se pot demonstra, cu ușurință, teoreme corespunzătoare celor din L_1 și că asupra lui L_n putem demonstra teoreme matematice de completitudine și altele corespunzătoare teoremelor asupra lui L_1. Apoi vom arăta că teorema (I) (prin urmare și teorema (II)) rezultă din acestea. Vom arăta, de asemenea, că reciproc fiind date (I) și teoremele metamatematice asupra lui L_1 putem demonstra ca corolare anumite teoreme similare asupra lui L_n.

Firește, teorema (IV) implică (I). O demonstrație a lui (IV) va depinde de considerațiile sintactice asupra structurii demonstrațiilor în sistemele de comparat. În teza sa (p. 64), Herbrand a enunțat primul o asemenea teoremă. Dar demonstrația sa este inadecvată, deoarece nu ține seama de faptul că anumite raționamente care merg în $L_1^{(n)}$ nu merg în L_n. Acest lucru a fost pus în evidență de către A. Schmidt, care a dat o demonstrație detaliată a teoremei în „Math. Annalen", **115,** 1938, pp. 485—506. Se pare că această demonstrație conține anumite dificultăți. Mai tîrziu, el a dat o variantă mai bună și simplificată în „Math. Annalen", **123,** 1951, pp. 187—200. O altă demonstrație a fost dată de către autorul acestei cărți în „Journal of Symbolic Logic", **17,** 1952, pp. 105—116. Acest memoriu a fost gata și trimis spre publicare înainte de apariția memoriului din 1951 al lui Schmidt, astfel încît n-a putut să țină seamă de el. Se pare totuși că demonstrația este mai directă decît chiar demonstrația simplificată a lui Schmidt. În restul capitolului de față voi reproduce părțile fundamentale ale memoriului meu. Toate aceste demonstrații se supun restricției menționate mai sus, adică:

1.1. În fiecare loc al predicatelor primitive din teoriile cu mai multe sorturi pot figura numai variabile de un sort dat.

Recent, P.C. Gilmore a generalizat demonstrația pentru cazurile cînd nu se impune restricția de mai sus. (Vezi *Composito Mathematica*, 1958). Astfel, de exemplu, în teoria tipurilor nu mai este necesar să se folosească predicate diferite pentru relația de apartenență. De curînd, T. Hailperin a examinat chestiuni relevante pentru logici cu mai multe sorturi, în „Journal of Symbolic Logic", **22,** 1957, pp. 19—35 și 113—129.

Dăm acum o lemă utilă din „Journal of Symbolic Logic", **15,** 1950, pp. 110—112.

1.2. Putem demonstra ca metateoreme în $L_1^{(n)}$ traducerile lui 1_n—5_n pentru fiecare speță de variabile din $L_1^{(n)}$.

În acest scop vom utiliza rezultatele din *ML* ale lui Quine, precum și axioma adițională 1_6.

Dacă nu sîntem interesați în prezentarea explicită a demonstrațiilor, 1.2 se poate demonstra cu ajutorul unui raționament prin analogie. Fie A o formulă derivabilă în calculul predicatelor. În virtutea consistenței calculului predicatelor, A este validă în orice domeniu nevid D. Acum fie $S_1, \ldots, S_n$ submulțimi oarecare din D și fie A' formula care se obține din A prin restrîngerea domeniului de variație a variabilelor la $S_1, \ldots, S_n$ într-o manieră convenabilă, ca în $L_1^{(n)}$. Dacă B este conjuncția axiomelor din 6.1, atunci, deoarece D este arbitrar, $B \supset A'$ este de asemenea validă. Deci, în virtutea completitudinii calculului predicatelor, $B \supset A'$ se poate demonstra în L_1 și deci A' este demonstrabilă în $L_1^{(n)}$. De exemplu, dacă A este $\sim(x)\,(Cx\,\&\sim Cx)$, iar A' este $\sim(x)\,(S_1x \supset (Cx\,\&\sim Cx))$, atunci A' se poate demonstra în $L_1^{(n)}$ cu ajutorul lui $(Ex)\,S_1(x)$.

Pentru a da o metodă efectivă (de fapt primitiv recursivă) de transformare a unei demonstrații a lui A în L_n într-o demonstrație a lui A' în $L_1^{(n)}$, să arătăm cum se pot demonstra în $L_1^{(n)}$ traducerile lui 1_n—5_n.

Pentru 1_n aceasta este evident, deoarece fiecare parte proprie care începe cu cuantori se ia ca unitate și traducerea nu afectează proprietatea de a fi o tautologie. În caz că există variabile libere, adăugăm, pur și simplu, condițiile $S_1(x)$ etc. ca antecedente care firește că păstrează caracterul de tautologie. Cazurile 3_n și 5_n sînt asemănătoare.

Pentru a demonstra traducerea lui 2_n, este suficient să observăm că, de exemplu,

$(x)\,((S_1x \supset Ax) \supset (S_1x \supset Bx)$ (este echivalentul $(x)\,(S_1x \supset (Ax \supset Bx)$.

Traducerea lui 4_n se poate demonstra cu ajutorul lui 6_1.

§ 2. LOGICI ELEMENTARE CU MAI MULTE SORTURI L_n

Teoremele în L_n și teorema asupra lui L_n se pot demonstra la fel ca teoremele din L_1 și teoremele asupra lui L_1. De exemplu, putem obține forme normale prenex, forme normale Skolem, teorema deducției etc.

La fel putea defini formule valide și satisfăcute, exact cum le-am definit în L_1:

2.1. O valoare atașată unui predicat sau formulei atomice corespunzătoare $F x_{n_1}^{(k_1)} \ldots x_{n_j}^{(k_j)}$ din L_n peste o mulțime de n domenii nevide este o funcție de la predicat sau formula atomică corespunzătoare lui la o relație j —adică de la care al i-lea loc este ocupat de către indivizi din al n_i-lea domeniu.

2.2. O formulă Φ din L_n fără variabile libere este validă într-o mulțime particulară de n domenii nevide, dacă toate atribuirile de valori pentru toate formulele atomice care figurează în formula respectivă sînt astfel, încît în

interpretarea normală a conectivelor funcții de adevăr și a cuantorilor formula Φ devine adevărată. Formula Φ este validă, dacă ea este validă în toate mulțimile de n domenii nevide.

2.3. Φ este satisfăcută într-o mulțime particulară de n domenii nevide dacă $\sim \Phi$ nu este validă în această mulțime. Φ este satisfăcută, dacă ea este satisfăcută într-o mulțime oarecare de n domenii nevide.

Cu aceste definiții putem demonstra următoarele teoreme pentru L_n exact ca pentru L_1:

2.4. Dacă $\vdash \Phi$ în L_n, atunci închiderea lui Φ este validă.

2.5. Dacă închiderea lui Φ este validă într-o mulțime de n domenii numărabile, atunci $\vdash \Phi$ în L_n.

2.6. Dacă închiderea lui Φ este validă, atunci $\vdash \Phi$ în L_n.

2.7. Dacă $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, sînt enunțuri din L_n și dacă sistemul T_n obținut din L_n prin adăugarea axiomelor proprii $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ este consistent, atunci $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ sînt satisfăcute simultan într-o mulțime de n domenii numerabile.

Ne limităm să schițăm o demonstrație pentru următoarea teoremă 2.8, din care 2.5 rezultă imediat.

2.8. Dacă enunțul $\sim \Phi$ nu este demonstrabil în L_n, atunci Φ este satisfăcută într-o mulțime de n domenii numerabile.

Să presupunem că variabilele de speța a p-a ($p = 1, \ldots, n$) în L_n sînt $v_p^{(1)}, v_p^{(2)}, \ldots$ și că Φ este enunțul $(v_{n_1}^{(k_1)}) \ldots (v_{n_t}^{(k_t)})(Ev_{m_1}^{(j_1)}) \ldots (Ev_{m_s}^{(j_s)})\, \psi(v_{n_1}^{(k_1)}), \ldots, v_{n_t}^{(k_t)}; v_{m_1}^{(j_1)}, \ldots, v_{m_s}^{(j_s)})$.
Fie $\psi_i (i = 1, 2, \ldots)$ $\psi(v_{n_1}^{\tau(i,1)}, \ldots, v_{n_t}^{\tau(i,t)}; v_{m_1}^{\sigma(i,1)}, \ldots, v_{m_s}^{\sigma(i,s)})$,
unde $(\tau(i, 1), \ldots, \tau(i, t))$ este al i-ilea termen din șirul tuturor t — uplurilor de întregi pozitivi ordonat după suma celor t întregi și, acolo unde suma este aceeași, lexicografic; iar șirul s-uplurilor $(\sigma(i, 1), \ldots, \sigma(i, s))$ $(i = 1, 2, \ldots)$ este astfel, încît dacă printre $m_1, \ldots, m_s$, m_{r_1} este identic cu $m_{r_1}, \ldots m_{r_q}$ și numai cu ele, atunci $\sigma(1, r_1), \ldots \sigma(1, r_q), \sigma(2, r_1), \ldots, \sigma(2, r_q), \sigma(3, r_1), \ldots$ coincid cu $1, \ldots q$, $(q + 1), \ldots, 2q(2q + 1), \ldots$.

Pentru a demontra 2.8, observăm, în primul rînd, că putem demonstra la fel ca în cazul lui L_1 următoarele două propoziții.

2.8.1. Dacă $\sim \Phi$ nu este demonstrabil în L_n, atunci nici una dintre $\sim \psi_1$, $\sim \psi_1 \vee \sim \psi_2, \ldots$ nu este tautologie.

2.8.2. Dacă nici una dintre $\sim \psi_1$, $\sim \psi_1 \vee \sim \psi_2, \ldots$ nu este tautologie, atunci $\psi_1, \psi_2, \ldots$ sînt satisfăcute simultan.

Prin urmare, asociind fiecare variabilă $v_j^{(k)}$ din $\psi_1, \psi_2, \ldots$ cu a j-a putere al celui de al k-lea număr prim, putem la fel ca și în cazul lui L_1, să obținem o interpretare adevărată pentru Φ în mulțimea domeniilor $D_1, D_2, \ldots$ unde D_j este mulțimea puterilor j a tuturor numerelor prime. Deci 2.8 și 2.5 pot fi demonstrate.

Observăm, în treacăt, că putem de asemenea evita complicațiile în ce privește definițiile pentru $\psi_1, \psi_2, \ldots$ demonstrînd 2.8 mai simplu prin conside-

rarea lui $v_i^{(k)}$ și $v_j^{(k)}$ ca fiind aceeași pentru orice i, j, k. Atunci putem utiliza aproape exact argumentarea din L_1 pentru a da o interpretare **adevărată** pentru Φ într-o mulțime de n domenii identice, fiecare dintre ele fiind mulțimea întregilor pozitivi.

Deoarece în multe cazuri este de dorit ca diferitele categorii (de exemplu, puncte, linii, plane etc.) să fie reciproc exclusive, putem concepe că în asemenea cazuri nu există atribuiri de valori care să satisfacă identic toate domeniile. Dar posibilitatea pe care tocmai am indicat-o arată că aceasta nu este cazul. În adevăr, devine clar că nu avem vreun mijloc pentru a exprima explicit în L_n cererea ca domeniile diferitelor atribuiri satisfăcătoare pentru ψ să fie diferite. O asemenea cerere ține exclusiv de condițiile implicite pe care le pretindem de la fiecare interpretare normală a teoriei. Dar în definițiile atribuirilor satisfăcătoare de valori nu avem nimic care să prevadă cazurile cînd asemenea condiții neformale nu sînt îndeplinite. Într-o teorie unisortată putem adăuga axiome ca $\sim (Ex)\,(S_i(x).\ S_j(x)$ pentru a explicita cererea, deoarece în atribuirea de valori insistăm ca operatorii, funcțiile de adevăr și cuantorii, să mențină calitatea de interpretare normală.

§ 3. TEOREMA (I) ȘI COMPLETITUDINEA LUI L_n

Din completitudinea lui L putem deriva teorema (I), enunțată în paragraful 1.

Să considerăm un enunț Φ în T_n și traducerea sa Φ' în $T_1^{(n)}$. Să presupunem că toate variabilele din Φ sînt dintre spețele $m_1, \ldots, m_k$. Dacă A este atribuire de valori pentru $\sim \Phi$ într-o mulțime D de domenii, atunci există o atribuire asociată A' pentru $\sim \Phi'$ în domeniul D' care este reuniunea tuturor domeniilor mulțimii D, astfel încît $(Ex)S_{m_1}.\ldots.(Ex)S_{m_k}(x)$ primește valoarea adevărat, iar toate celelalte litere predicative din $\sim \Phi'$ primesc pentru entitățile din D', care aparțin domeniilor proprii ale lui D, aceeași valoare ca A, iar pentru toate celelalte entități din D', să zicem, valoarea fals. Reciproc, fiind dată o atribuire de valori A' pentru $\sim \Phi'$ într-un domeniu D', astfel încît $(Ex)\,S_{m_1}(x).\ldots.(Ex)\,S_{m_k}(x)$ primește valoarea adevăr, există un A asociat pentru $\sim \Phi$, astfel încît al m_i-lea domeniu ($i = 1, \ldots k$) constă din obiectele x pentru care $S_{m_i}(x)$ primește valoarea adevărată în A', iar toate literele predicative din $\sim \Phi$ primesc aceleași valori ca în A'. Evident, în ambele cazuri A satisface $\sim \Phi$, dacă și numai dacă A' satisface $\sim \Phi'$. Deci avem: $\sim \Phi$ este satisfăcută, dacă și numai dacă este satisfăcută $(Ex)S_{m_1}(x).\ \ldots.\ (Ex)S_{m_k}(x).\ \sim \Phi'$.

Așadar, avem:

3.1. Φ este validă, dacă și numai dacă $(Ex)S_{m_1}(x).\ \ldots.\ (Ex)S_{m_k}(x).\ \supset \Phi'$ este validă.

Prin urmare, putem demonstra:

3.2. Φ este demonstrabilă în L_n, dacă și numai dacă Φ' este demonstrabilă în $L_1^{(n)}$.

Demonstrație. Dacă Φ este demonstrabilă în L_n, atunci, conform cu 2.4, ea este validă. Deci, conform cu 3.1 $(Ex)\ S_{m_1}(x).\ldots.(Ex)\ S_{m_k}(x)\supset\Phi'$ este validă

și deci, în virtutea completitudini lui L_1, demonstrabilă în L_1. Prin urmare, conform cu 6_1, Φ' este demonstrabilă în $L_1^{(n)}$.

Reciproc, dacă Φ' este demonstrabilă în $L_1^{(n)}$, putem presupune că toate cazurile (în număr finit) din 6_1 folosite în demonstrația lui Φ' în $L_1^{(n)}$ figurează printre $(Ex)\,S_{m_1}(x), \ldots, (Ex)\,S_{m_k}(x)$, căci putem alege astfel $m_1, \ldots, m_k$. Prin urmare, conform teoremei deducției pentru L_1, $(Ex)S_{m_1}(x) . \ldots . (Ex)S_{m_k}(x) . \supset \Phi'$ este demonstrabilă în L_1 și deci validă. Așadar, în virtutea lui 3.1, Φ este validă și, conform cu 2.6, este demonstrabilă în L_n.

Pe baza lui 3.2, teorema (I) rezultă imediat ținînd seama de teorema deducției pentru L_1 și teorema deducției pentru L_n. Reciproc, fiind dat (*I*) putem deriva 3.2. Mai mult, așa cum s-a observat în § 1, teorema (II) enunțată acolo este un corolar al lui (I). Acum putem arăta că se pot infera 2.6 și 2.7 din teoremele corespunzătoare pentru L_1, ținînd seama de (I).

Demonstrația lui 2.6. Dacă Φ este validă, atunci conform cu 3.1, $(Ex)\,S_{m_1}(x) . \ldots . (Ex)\,S_{m_k}(x) . \supset \Phi'$ este validă și, prin urmare, deoarece L_1 este complet, demonstrabilă în L_1. Deci, conform cu 6_1, Φ' este demonstrabilă în $L_1^{(n)}$. Deci, conform cu 3.2, Φ este demonstrabilă în L_n.

Demonstrația lui 2.7. Să presupunem că sistemul T_n obținut din L_n prin adăugirea ca axiome proprii a enunțurilor $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ din L_n este consistent. În virtutea lui (II), sistemul $T_1^{(n)}$ care corespunde lui T_n este consistent. Deci, conform teoremei pentru L_1, care corespunde cu teorema 2.7 pentru L_n, toate axiomele lui $T_1^{(n)}$ sînt satisfăcute simultan într-un domeniu numerabil. Dar axiomele lui $T_1^{(n)}$ sînt: axiomele lui L_1, axiomele $(Ex)\,S_1(x), \ldots, (Ex)\,S_n(x)$ și traducerile $\Phi_1', \Phi_2', \ldots$ ale lui $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$. Putem deci divide domeniul în n domenii, astfel încît al i-ilea domeniu constă din toți indivizii x pentru care $S_i(x)$ este adevărată. În acest chip obținem o mulțime de n domenii nevide, fiecare dintre ele fiind finit sau numerabil și în care sînt satisfăcute atît $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, cît și axiomele lui L_n (a se compara raționamentul din demonstrația 3.1). În consecință, putem găsi o mulțime de n domenii numerabile în care T_n este satisfăcută. Cu aceasta demonstrația lui 2.7 este încheiată.

§ 4. DEMONSTRAȚIA TEOREMEI (IV)

Putem desface teorema (IV) în două părți:

4.1. Există un proces efectiv cu ajutorul căruia ori de cîte ori este dată o demonstrație în T_n pentru un enunț Φ din T_n putem găsi o demonstrație în $T_1^{(n)}$ pentru traducerea Φ' a lui Φ.

4.2. Există un proces efectiv cu ajutorul căruia pentru orice demonstrație din $T_1^{(n)}$ a unui enunț Φ' din $T_1^{(n)}$ care are o traducere Φ în T_n, putem găsi o demonstrație în T_n pentru Φ.

În primul rînd, să demonstrăm 4.1. În demonstrația lui Φ folosim numai un număr finit de axiome proprii din T_n; fie Ψ conjuncția acestor axiome. Conform teoremei deducției, avem un proces efectiv pentru a găsi o demonstrație pentru Φ în T_n ori de cîte ori este dată o demonstrație a lui $\Psi \supset \Phi$

în L_n. Iar dacă traducerea ei $\Psi' \supset \Phi'$ are o demonstrație în $L_1^{(n)}$, atunci avem de îndată o demonstrație în $T_1^{(n)}$ pentru Φ' prin *modus ponens* și axiomele proprii din $T_1^{(n)}$, fiindcă Ψ' este traducerea conjuncției unor axiome proprii din T_n. Deci trebuie numai să demonstrăm că există un proces efectiv, cu ajutorul căruia fiind dată o demonstrație în L_n pentru o formulă ψ din T_n putem găsi o demonstrație în $L_1^{(n)}$ pentru traducerea lui ψ' în $T_1^{(n)}$.

Conform cu 1.2, putem demonstra ca metateoreme în $L_1^{(n)}$ traducerile enunțurilor $1_n - 5_n$ pentru fiecare speță de variabile din $L_1^{(n)}$. Deoarece în fiecare demonstrație pentru L_n folosim doar un număr finit de cazuri particulare ale enunțurilor $1_n - 5_n$, fiind dată o demonstrație în L_n a unei formule ψ din L_n, avem o demonstrație pentru traducerea sa Ψ' din $L_1^{(n)}$, care constă din demonstrațiile traducerilor în $L_1^{(n)}$ ale acestor cazuri particulare și o traducere în $L_1^{(n)}$ a demonstrației lui ψ în L_n. Deci 4.1 este demonstrat.

Pentru 4.2 demonstrația este mai complexă. Mai întîi să observăm că este suficient să demonstrăm următoarea teoremă:

4.3. Există un proces efectiv cu ajutorul căruia fiind dată o demonstrație în $L_1^{(n)}$ a unui enunț χ' din $T_1^{(n)}$ care are o traducere χ în T_n, putem găsi o demonstrație a lui χ în L_n.

În adevăr, fie Φ' un enunț din $T_1^{(n)}$ și fie dată o demonstrație a sa în $T_1^{(n)}$; atunci conform cu teorema deducției pentru L_1, avem în $L_1^{(n)}$ o demonstrație pentru $\Psi' \supset \Phi'$; Ψ' fiind conjuncția axiomelor proprii din $T_1^{(n)}$ utilizate în demonstrația dată pentru Φ'. Deci, în virtutea lui 4.3, avem o demonstrație în L_n pentru traducerea $\Psi \supset \Phi$ a lui $\Psi' \supset \Phi'$, și în felul acesta și o demonstrație în T_n pentru Φ.

În consecință, fiind dat 4.3, putem demonstra 4.2. Să demonstrăm deci 4.3.

Prin ipoteză, se dă o demonstrație Δ', în $L_1^{(n)}$ pentru un enunț χ' din $T_1^{(n)}$ care are o traducere χ în T_n. Ni se cere să găsim o demonstrație Δ în L_n pentru această traducere χ a lui χ' în T_n. În ceea ce urmează, vom presupune că χ' a fost dat astfel, încît traducerea sa χ este în formă normală *prenex*. În conformitate cu aceasta, deoarece pentru fiecare variabilă α și fiecare formulă ψ din $T_1^{(n)}$ putem substitui $(E\alpha)(S_i(\alpha) . \psi)$ pentru $\sim (\alpha)(S_i(\alpha) \supset \sim \psi)$, orice cuantificare în χ' este sau de forma $(\alpha)(S_i(\alpha) \supset \Phi)$, sau de forma $(E\beta)(S_j(\beta) . \Phi')$, unde α și β sînt variabile în $T_1^{(n)}$, Φ și Φ' sînt formule în $T_1^{(n)}$ iar i și j sînt printre numerele $1, \ldots, n$. Mai departe: fiecare formulă $S_i(\alpha)$ care figurează în χ' intervine fie într-un context de forma $(\alpha)(S_i(\alpha) \supset \Phi)$ fie într-un context de forma $(E\alpha)(S_i(\alpha) . \Phi)$, dar nu în două contexte distincte; iar fiecare variabilă α care figurează în χ apare o singură dată fie în forma $(\alpha)(S_i(\alpha) \supset \Phi)$ fie în forma $(E\alpha)(S_i(\alpha) . \Phi)$. O asemenea ipoteză în ce privește forma lui χ nu restrînge în nici un fel generalitatea rezultatului, deoarece știm că fiecare enunț din $T_1^{(n)}$ care are o traducere în T_n poate fi adus la o asemenea formă prin proceduri asemănătoare cu cele care transformă un enunț într-o formă normală *prenex*.

Prin urmare, dacă asociem fiecare întrare a unei variabile cu numărul i, atunci cînd există o formulă $(\alpha)(S_i(\alpha) \supset \Phi)$ sau o formulă $(E\alpha)(S_i(\alpha) . \Phi)$ care intră în χ', observăm că fiecare intrare a unei variabile în χ' este asociată cu un număr unic iar două intrări ale aceleiași variabile au întotdeauna același număr.

Să considerăm acum formula χ_1, obținută din χ' prin eliminarea tuturor părților de formă $S_i(\alpha)\supset$ sau $S_i(\alpha)_\bullet$, sau cu alte cuvinte, prin înlocuirea fiecărei cuantificări de formă $(\alpha)(S_i(\alpha)\supset\Phi)$ prin $(\alpha)\Phi$, și a fiecărei cuantificări de formă $(E\alpha)(S_i(\alpha)_\bullet\Phi)$ prin $(E\alpha)\Phi$. Vedem că χ_1 nu mai conține intrări ale formulelor atomice de forma $S_i(\alpha)(\alpha)$, și că χ_1 este identic cu traducerea χ a lui χ' în T_n, cu singura deosebire că acolo unde χ conține intrări ale lui $x_i, y_i, \ldots, z_k$, în χ_1 apar, să zicem, $x, y, \ldots, z$ asociate cu numerele $i, j, \ldots, k$. Apoi, χ_1 este, de asemenea, în formă normală *prenex*. De acum înainte subînțelegem că fiecare intrare a fiecărei variabile în χ_1 este asociată cu numărul atribuit intrării corespunzătoare din χ'.

Vom spune că o intrare a unei variabile (într-o demonstrație din L_1) este asociată cu numărul propriu, dacă numărul ei este exact numărul speței de variabile care e aptă să ocupe locul corespunzător al predicatului din T_n, care figurează cu variabila. De exemplu, o intrare a lui α într-un context $P\alpha\beta\ldots\gamma$ se zice că este asociată cu numărul propriu dacă α este asociată cu i, iar primul loc pentru argumentele lui P este de completat cu variabile de speța i din T_n. Din această definiție, având în vedere felul în care numerele sînt asociate cu intrările variabilelor, obținem, deoarece χ' are o traducere în T_n, următoarea teoremă:

4.4. Fiecare intrare în χ_1 a unei variabile este asociată cu numărul propriu.

Demonstrăm o altă teoremă:

4.5. Fiind dată demonstrația Δ' în $L_1^{(n)}$ pentru χ' putem forma o demonstrație Δ_1 în L_1 pentru χ_1.

Demonstrație. Fiecare rînd din Δ' este fie un caz din $1_1 - 4_1$, fie un caz din 6_1, fie o consecință în virtutea lui 5_1 a două rînduri precedente. Să înlocuim de-a lungul lui Δ' toate intrările tuturor formulelor de forma $S_1(\alpha)$ prin intrări ale formulelor de forma $S_i(\alpha)\vee\sim S_i(\alpha)$. Atunci în șirul rezultat Δ'', fiecare rînd care era un caz al lui 6_1 devine o consecință simplă a lui 1_1-5_1. Dacă adăugăm demonstrațiile care se pot obține ușor pentru aceste cazuri ale lui 6_1 în susul lui Δ'', atunci obținem în L_1 o demonstrație a unei concluzii χ'' care este identică cu χ', exceptînd faptul că conține intrări ale formulelor de forma $S_i(\alpha)\vee\sim S_i(\alpha)$ în locul celor de forma $S_i(\alpha)$. Dar în acest caz este ușor de văzut că dintr-o demonstrație a lui χ'' în L_1 putem obține în L_1 o demonstrație pentru χ_1 în virtutea lui 1_1 și a principiului de substituire pentru formulele echivalente. Deci obținem în L_1 o demonstrație Δ_1 pentru χ_1.

Acum să aplicăm teorema lui Herbrand care pentru țelurile noastre poate fi enunțată astfel:

HT. Există o metodă efectivă care pentru orice demonstrație dată în L_1 pentru un enunț ψ în formă normală *prenex* furnizează o nouă demonstrație II a lui ψ (așadar ψ va fi ultimul rînd din II), în care rîndul întîi este o tautologie, iar fiecare din celelalte rînduri se obține din rîndul imediat precedent cu ajutorul uneia dintre următoarele trei reguli: (1). Fiind dată o formulă în L_1, care este de forma unei alternative (disjuncții), putem înlocui un termen al disjuncției $\Phi\beta$ prin $(E\alpha)\Phi\alpha$, unde α este o variabilă arbitrară; (2). Fiind dată o formulă din L_1, care are forma unei alternative, putem

înlocui un termen $\Phi\beta$ prin $(\alpha)\Phi\alpha$, unde β este o variabilă care nu este liberă în nici o altă parte a formulei; (3). Fiind dată o formulă în L_1, care are forma unei alternative, putem omite repetările de termen alternativ.

Este ușor să ne convingem că demonstrația II pentru ψ, așa cum este specificată în HT, este iarăși o demonstrație în L_1 sau, mai exact, că din II (așa cum este dată) putem construi cu ușurință o demonstrație în L_1, avînd ca ultim rînd pe ψ. Demonstrațiile de speța descrisă în HT, le vom numi demonstrații în L_1 în formă normală Herbrand. Cu această convenție, HT se enunță simplu astfel: fiecare demonstrație în L_1 pentru un enunț în formă normală *prenex* poate fi transformată într-o demonstrație în formă normală Herbrand.

Conform cu 4.5 și HT, deoarece χ_1 este în formă normală *prenex*, putem cu adevărat să găsim o demonstrație II în L_1 pentru χ_1 în forma normală Herbrand. Să presupunem dată o asemenea demonstrație *II*. Ni se cere ca pe baza lui II să construim în L o demonstrație Δ, avînd ca ultim rînd pe χ.

După cum am menționat mai sus, fiecare intrare în χ_1 a fiecărei variabile este asociată cu un număr definit, care, în plus, conform cu 4.4, este număr propriu. Utilizînd aceste corelații, putem acum asocia fiecare intrare în II a fiecărei variabile cu un număr definit în felul următor:

4.6. Dacă intrarea este într-un rînd Φ, care este urmat de un rînd Φ', atunci ea este asociată cu același număr ca și intrarea corespunzătoare a aceleiași variabile în Φ', cu excepția următoarelor cazuri particulare:

4.6.1. Dacă Φ' se obține din Φ prin substituirea lui $(\alpha)\psi\alpha$ în locul propoziției alternative $\psi\beta$, iar intrarea în Φ este una a variabilei β în propoziția $\psi\beta$, atunci ea este asociată cu același număr ca și intrarea corespunzătoare a variabilei α în partea $\psi\alpha$ a lui Φ'.

4.6.2. La fel în cazul cuantificării particulare $(E\alpha)\psi\alpha$ în Φ'.

4.6.3. Dacă Φ' se obține din Φ prin omiterea repetărilor unui termen alternativ Φ_1, iar intrarea în Φ este într-o anumită intrare din Φ_1, atunci este asociată cu același număr ca și intrarea corespunzătoare în termenul alternativ Φ_1 din Φ'.

Să înlocuim fiecare intrare în II a unei variabile asociate cu numărul i, printr-o intrare a unei variabile corespunzătoare de speța i în T_n (de exemplu, dacă o intrare a lui x este asociată cu i în *II*, o vom înlocui printr-o intrare a lui x_i) și să notăm rezultatul cu Δ_2. Se vede, cu ușurință, că ultimul rînd din Δ_2 este tocmai χ, traducerea lui χ' în T_n. Mai mult, conform cu 1.1, fiecare rînd din Δ_2 este o formulă din T_n, care fie că este o tautologie, fie că rezultă din rîndul imediat precedent printr-o regulă de inferență cuantorial validă (adică o regulă de inferență derivabilă în L_n). Prin urmare, fiind dată Δ_2, putem construi, cu ușurință în L_n o demonstrație Δ a concluziei χ.

Cu aceasta se încheie demonstrația lui 4.3. Prin urmare, 4.2 și teorema (IV) (făcînd apel la 4.1) sînt amîndouă demonstrate.

CAPITOLUL XIII
ARITMETIZAREA METAMATEMATICII

§ 1. NUMEROTAȚIA GÖDEL

În acest capitol vom considera, pe scurt, reducerea matematicii la teoria numerelor efectuată de Gödel și cîteva aplicații ale ei: cele două renumite teoreme ale lui Gödel, forma normală a lui Kleene pentru funcții recursive, lema lui Bernays ca o întărire a teoremei de completitudine a calculului predicatelor și teorema lui Löb.

Instrumentul formalizării a ajuns la un stadiu cînd uneori este posibil să descriem — dacă nu și să înțelegem — un sistem formal, vorbind despre simboluri și combinațiile lor. Orice teorie conține anumite simboluri primitive, pentru care e totdeauna posibil să decidem efectiv dacă o anumită formă este un asemenea simbol sau nu. Apoi, avem reguli de combinare ale acestor simboluri pentru a forma expresii cu sens, astfel încît să putem decide efectiv dacă niște combinații sînt termeni sau propoziții, precum și dacă un șir dat de propoziții este sau nu o demonstrație. Drept urmare, este posibil să reprezentăm simbolurile primitive prin anumite numere (să zicem numere prime) și combinațiile lor prin alte numere, de exemplu — o propoziție prin numărul $2^a \cdot 3^b \ldots$ unde a, b etc. sînt numerele simbolurilor din propoziții. În acest mod putem, în general, să definim funcții primitiv-recursive și predicate primitiv-recursive, care reprezintă proprietăți și relații ca aceea de a fi propoziție, aceea de a fi o demonstrație etc.

Pentru fixarea ideilor, să considerăm sistemul Z de teoria numerelor menționat în cap. I, logica subiacentă fiind calculul predicatelor cu egalitate L_e extins astfel, încît să includă nu numai variabile, dar și termeni. De exemplu, *103 din L_q se aplică și la cazul $(x)F(X) \supset F(t)$, unde t este un termen arbitrar în sistem.

Dacă șirul de simboluri sau propoziții A, B, ..., este reprezentat prin numărul $2^a \cdot 3^b \cdot \ldots$, unde a, b etc. reprezintă A, B etc., putem defini numărul celui de al n-lea membru al șirului reprezentat prin numărul x, ca cel mai mic y mai mic ca x, astfel încît x este divizibil prin a y-a putere a celui de al n-lea număr prim, dar nu prin a $(y+1)$-a putere, și așa mai departe.

În acest mod putem defini un predicat $B(x, y)$, astfel încît x reprezintă un șir de propoziții în Z, din care ultima este reprezentată prin y, iar fiecare propoziție a șirului este sau axiomă, sau rezultă din propoziții precedente, în virtutea unei reguli de inferență. Cu alte cuvinte, $B(x, y)$ are loc atunci cînd x reprezintă o demonstrație din Z, avînd ca concluzie o propoziție reprezentată prin y.

Să presupunem că „0" este reprezentat prin 2, „=" este reprezentat prin 3, variabila „i" este reprezentată prin 5. Atunci „$i = 0$" este reprezentată prin $2^5 3^3 5^2 = 21\,600$ care se scrie în Z ca un 0 urmat de 21 600 marcări ale operației de luare a succesorului imediat. Pentru a simplifica, să presupunem că 21 600 este într-adevăr un termen în Z. Dacă substituim acum „21 600" pentru variabila „i" în expresia a cărui număr Gödel este 21 600, obținem atunci „21 600 = 0", care are iarăși un număr Gödel, să zicem 3 129 578. Acum, putem defini o funcție primitiv-recursivă $s(x, y)$ astfel încît $s(21\,600, 21\,600) = 3\,129\,578$. În general, pentru orice numerale $\bar{x}$ și $\bar{y}$, convenim că $s(\bar{x}, \bar{y})$ este numărul Gödel al expresiei obținute din expresia al cărei număr este $\bar{x}$ prin substituirea lui $\bar{y}$ în locul variabilei „i". Dacă „i" nu figurează în expresia inițială, atunci $s(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}$.

Acum putem arăta (a se vedea § 2 de mai jos):

1.1. Orice formulă numerică, adică formulă care conține egalitatea și funcții primitiv recursive, dar nu conține nici variabile libere, nici variabile legate este demonstrabilă în Z, dacă și numai dacă este intuitiv adevărată.

Să considerăm:

$$(x) \sim B(x, s(i, i)). \tag{1}$$

Aceasta este o abreviere a unei formule alcătuite numai din simboluri primitive ale lui Z. Dacă nu ținem seamă de dificultate, am putea scrie, în fapt, formula respectivă și să calculăm numărul ei Gödel. Să presupunem că am găsit că $\bar{p}$ (un numeral constant, nu o variabilă) este numărul ei.

Întrucît s este primitiv recursiv, există un numeral unic $\bar{q}$, pentru care putem demonstra în Z:

$$s(\bar{p}, \bar{p}) = \bar{q}. \tag{2}$$

Dar prin modul în care este definit s, $\bar{q}$ este și numărul lui

$$(x) \sim B(x, s(\bar{p}, \bar{p})). \tag{3}$$

$$(x) \sim B(x, \bar{q}). \tag{3'}$$

Conform lui (2), putem demonstra în Z:

$$(x) \sim B(x, s(\bar{p}, \bar{p})) \equiv (x) \sim B(x, \bar{q}). \tag{4}$$

Putem defini ușor și o funcție primitiv recursivă n, astfel încît $n(\bar{q})$ dă numărul negației formulei care are numărul $\bar{q}$.

Aplicînd 1.1, putem demonstra despre Z că pentru orice numerale date $\bar{m}$ și $\bar{k}$, putem demonstra în Z:

$$\sim B(\bar{m}, \bar{q}). \tag{5}$$

$$\sim B(\bar{k}, n(\bar{q})). \tag{6}$$

Aceasta nu înseamnă că putem demonstra $(m)(k)(\sim B(m, \bar{q}) \,\&\, \sim B(k, \bar{q}))$. Într-adevăr, din a doua teoremă a lui Gödel va urma că această din urmă formulă nu este demonstrabilă în Z.

Să presupunem că putem demonstra în Z:

$$B(\bar{m}, \bar{q}). \tag{7}$$

Atunci $\bar{m}$ este numărul unei demonstrații a lui (3). Așadar, conform cu (4) și *Lq* 4, adică *103, putem extinde demonstrația, obținînd astfel o demonstrație a lui (3′) și astfel una a lui (5), adică putem transcrie în fapt, plecînd de la $\bar{m}$ dat, o demonstrație pentru (5). Întrucît presupunem Z consistent, nu putem demonstra în același timp (5) și (7) în Z. Așadar (7) nu este demonstrabil și, conform cu 1.1 (5) este demonstrabil în Z.

Să presupunem acum că putem demonstra în Z:

(8) $$B(\bar{k},\ n(\bar{q})).$$

Întrucît $\bar{q}$ este numărul lui (3), $n(\bar{q})$ este numărul negației lui (3). Dacă putem demonstra (8), atunci este adevărat și putem în fapt să transcriem, pornind de la $\bar{k}$, o demonstrație pentru negația lui (3). Așadar, pe baza lui (4), putem transcrie o demonstrație pentru

(9) $$\sim (x) \sim B(x,\ \bar{q}).$$

Întrucît am demonstrat mai sus că (5) este demonstrabil pentru orice $\bar{m}$, aceasta ar însemna că putem demonstra pentru F atît toate formulele $F(0)$, $F(1)$,..., cît și $\sim (x)F(x)$. Intuitiv vorbind, acest lucru nu este satisfăcător și nu poate surveni dacă presupunem că Z este ω — consistent, adică nu există nici un F astfel încît $(Ex) \sim F(x)$ sau $\sim (x)F(x)$ este demonstrabil, dar toate cazurile $F(0)$, $F(1)$,..., sînt și ele demonstrabile. Această cerință pare rezonabilă, deoarece credem că dacă $F(0)$, $F(1)$,..., sînt demonstrabile toate și deci adevărate, $(x)\ F(x)$ trebuie să fie și el adevărat, chiar dacă este eventual indemonstrabil. Bineînțeles, ω — consistența implică consistența.

Așadar, (9) nu este demonstrabil și prin urmare (8) nu este demonstrabil. Așadar, dacă Z este ω — consistent atunci toate cazurile lui (5) și (6) sînt demonstrabile în Z. În raționamentul de mai sus am demonstrat, în treacăt, și faptul că nici (3′) și nici negația sa (9) nu sînt demonstrabile în Z. Așadar, (3) este indecidabil în Z. Urmează că (1) este și el indecidabil în Z.

Urmează, de asemenea, că prin adăugarea lui (9) la Z putem obține un sistem consistent dat ω — inconsistent, în ipoteza că Z este consistent.

Aceasta completează demonstrația primei teoreme a lui Gödel.

Rosser a introdus un procedeu ingenios care ne permite să ne dispensăm de ipoteza mai tare a ω — consistenței.

În loc de (1), Rosser utilizează:

(10) $$(x)\ B(x,\ s(i,\ i)) \supset (Ey)\ (y \leqslant x\ \&\ B(y,\ n(s(i,\ i)))).$$

Fie $\bar{p}$ numărul formulei de mai sus și fie $\bar{q}$ numărul lui

(11) $$(x)\ B(x,\ s(\bar{p},\ \bar{p})) \supset (Ey)\ (y \leqslant x\ \&\ B(y,\ n(s(\bar{p},\ \bar{p})))).$$

(11′) $$(x)\ B(x,\ \bar{q}) \supset (Ey)\ (y \leqslant x\ \&\ B(y,\ n(\bar{q}))).$$

Atunci (2) are loc; în consecință

(12) $$(11) \equiv (11').$$

Vrem să arătăm din nou că toate cazurile lui (5) și (6) sînt demonstrabile în Z.

Să presupunem din nou că putem demonstra (7). Atunci iarăși putem demonstra (11) și (11′). Recurgînd încă o dată la (7), putem demonstra:

$$(13) \qquad (Ey)\,(y \leqslant \bar{m} \;\&\; B(y,\ n(\bar{q}))).$$

Cuantorul fiind restrîns de un numeral, (13) este echivalent cu o formulă numerică. Rezultă că din (13) putem infera că (8) trebuie să fie demonstrabil pentru unii $\bar{k}, \bar{k} \leqslant \bar{m}$. Aceasta ar face ca negația lui (11′) să fie demonstrabilă. Așadar, dacă Z este consistent, (11′) nu este demonstrabil și toate cazurile lui (5) sînt demonstrabile.

Să presupunem acum că (8) este demonstrabil pentru unii $\bar{k}$. Rezultă că negația lui (11) și (11′) este demonstrabilă. Așadar, în Z va fi demonstrabil:

$$(14) \qquad (Ex)\,(B(x,\ \bar{q}) \;\&\; \sim (Ey)\,(y \leqslant x \;\&\; B(y,\ n(\bar{q})))).$$

Din (14) putem însă deduce:

$$(15) \qquad (Ex)\,(x \leqslant \bar{k} \;\&\; B(x,\ \bar{q})).$$

Dar atunci putem demonstra (7) pentru unii $\bar{m}$ cu $\bar{m} \leqslant \bar{k}$. Aceasta contrazice direct concluzia noastră despre (5). Prin urmare, dacă Z este consistent (14) nu este demonstrabil în Z și toate cazurile lui (6) sînt demonstrabile în Z. În consecință, dacă Z este consistent, nici (14), nici (11′) nu sînt demonstrabile în Z.

Aceasta completează demonstrația extinderii de către Rosser a primei teoreme a lui Gödel.

Consistența lui Z se poate exprima în Z prin propoziția:

$$(16) \qquad (Ex)\,B(x,\ k) \supset (Ex)\,B(x,\ n(k)).$$

Succint: *Con(Z)*.

A doua teoremă a lui Gödel spune următoarele:

Teorema 1. Dacă Z este consistent, atunci Con(Z) nu este o teoremă a lui Z.

Intuitiv vorbind, este foarte plauzibil că această teoremă decurge din prima teoremă. Astfel, în cadrul raționamentelor de mai sus am arătat că dacă Z este consistent, atunci (3) nu este demonstrabil în Z. Dacă formalizăm acest enunț în metamatematică, vom avea:

$$(17) \qquad Con(Z) \supset (x) \sim B(x,\ \bar{q}).$$

Așadar, dacă putem formaliza în Z acest raționament, putem să demonstrăm (17) în Z. Dar atunci — deoarece $(x) \sim B(x,\ \bar{q})$ nu este demonstrabil dacă Z este consistent — rezultă că $Con(Z)$ nu este demonstrabil, dacă Z este consistent.

Aducerea la îndeplinire a acestui lucru nu este în fapt ușoară. Singurul loc unde se face aceasta este, după cum se pare, Hilbert-Bernays, vol. II. De exemplu, teorema lui Löb este demonstrată pe această bază.

În cartea sa *Introduction to Metamathematics* (p.211), Kleene propune să folosim $(x) \sim B(x,\ \bar{q})$ ca enunț care exprimă consistența lui Z și să renunțăm la realizarea formalizării. Propunerea lui Kleene nu pare întemeiată. Este într-adevăr

evident că aceasta implică $Con(Z)$, iar implicația se poate demonstra imediat în Z. Nu este însă evident că raționamentul intuitiv care demonstrează (17) se poate formaliza în Z. Este posibil ca un raționament echivalent din punct de vedere intuitiv cu $(x) \sim B(x, \bar{q})$ să fie demonstrabil în Z, dar echivalența intuitivă să nu poată fi formalizată în Z. De exemplu, în demonstrația lui Gentzen sau Ackermann de consistență a lui Z, ipotezele inducției transfinite pot fi demonstrate în Z, însă inducția transfinită — despre care s-ar putea susține în mod rezonabil că nu este mai puțin evidentă din punct de vedere intuitiv ca raționamentul care demonstrează (17) — nu poate fi formalizată în Z, și numai acest fapt ne împiedică să demonstrăm $Con(Z)$ în Z.

Prin urmare, se pare că trebuie să înțelegem $Con(Z)$ ca o formulă care dă o formalizare directă a definiției inițiale a consistenței sau una foarte apropiată. În caz contrar, se creează loc pentru interpretări echivoce ale enunțurilor privitoare la chestiunea consistenței — așa cum a subliniat Kreisel (Koninklijke Nederlandse Akad. Wet., în „Proc.", **56**, 1953, pp. 405—406).

În Hilbert-Bernays, vol. II se demonstrează amănunțit următoarele trei rezultate:

1.2. Dacă o formulă cu număr $\overline{m}$ este derivabilă în Z dintr-o formulă cu număr $\bar{q}$, putem demonstra în Z:

$$(Ex)\, B(x, \bar{q}) \supset (Ex)\, B(x, \overline{m}).$$

1.3. Putem demonstra în Z:

$$(Ex)\, B(x, n(y)) \supset (Ex)\, B(x, n(s(y, z))).$$

1.4. Dacă $f(y)$ este o funcție primitiv recursivă de un argument dată arbitrar, iar $\bar{k}$ este numărul formulei $f(i) = 0$, putem demonstra în Z:

$$f(y) = 0 \supset (Ex)\, B(\bar{x}, s(\bar{k}, y)).$$

Pe baza lui 1.2 — 1.4., a doua teoremă a lui Gödel se demonstrează după cum urmează. Ca și mai sus, fie $\bar{p}$ numărul lui (1), fie $\bar{q}$ cel al lui (3). Atunci (2) și (4) sînt și ele demonstrabile în Z. Fie $\bar{k}$ și $\overline{m}$ numerele lui:

(18) $$B(i, \bar{q}),$$

(19) $$\sim B(i, \bar{q}).$$

Prin urmare, conform cu 1.2., putem demonstra în Z:

(20) $$(Ex)\, B(x, \bar{q}) \supset (Ex)\, B(x, \overline{m}).$$

Dar în Z putem demonstra:

$$n(\bar{k}) = \overline{m}.$$

Prin urmare, conform cu 1.3, putem demonstra în Z:

(21) $$B(y, \bar{q}) \supset (Ex)\, B(x, n(s(\bar{k}, y))).$$

Dar, conform cu 1.4, putem demonstra în Z:

(22) $$B(y, \bar{q}) \supset (Ex)\, B(x, s(\bar{k}, y)).$$

Dacă însă am putea demonstra (16) în Z, am avea, pe baza lui (21) şi (22), ca teoremă a lui Z:

$$\sim B(y, \bar{q})$$

şi

$$(x) \sim B(x, \bar{q}).$$

Aceasta contrazice demonstraţia primei teoreme.
Prin urmare (16) sau $Con(Z)$ nu este demonstrabil în Z.

De multe ori s-a pus problema dacă demonstraţiile lui Gödel se pot formaliza în cadrul unor sisteme formale convenabil alese. Demonstraţia de mai sus oferă, printre altele, o formalizare a unei părţi a demonstraţiei primei teoreme a lui Gödel în cadrul sistemului Z însuşi.

De altfel, întrucît formalizarea în Z a unei demonstraţii a reciprocei lui (17) nu prezintă dificultăţi, rezultă că formula de mai jos este o teoremă a lui Z:

(i) $$Con(Z) \equiv (3').$$

Pe de altă parte, dacă luăm (3'') ca fiind $(x) \sim B(x, n(\bar{q}))$, atunci

(ii) $$Con(Z) \supset (3'')$$

nu mai este o teoremă a lui Z, deoarece în caz contrar am obţine o demonstraţie pentru $Con(Z')$ în Z', unde Z' rezultă din Z prin adăugarea ca axiomă nouă a formulei $Con(Z)$. Astfel, dacă $\bar{t}$ este numărul lui $\sim Con(Z)$, atunci, pe baza lui (i) şi 1.2, putem demonstra în Z: $(Ex)\, B(x, \bar{t}) \supset (Ex)\, B(x, n(\bar{q}))$. În consecinţă, putem demonstra în Z şi: $(3'') \supset (x) \sim B(x, \bar{t})$. Dacă admitem (ii), am avea $(x) \sim B(x, \bar{t})$ ca o teoremă a lui Z', din care putem obţine cu uşurinţă $Con(Z')$.

Pe de altă parte, avînd în vedere demonstraţia lui Rosser, se poate demonstra în Z atît $Con(Z) \supset (11')$, cît şi $Con(Z) \supset (11'')$. Urmează că în Z nu putem demonstra $Con(Z) \equiv (11')$.

Cum observă Sen Yu-ting (*Journal of Symbolic Logic*, **20**, p. 119), următorul enunţ în limbajul obişnuit duce la paradox:

(23) Ceea ce spun nu poate fi demonstrat.

În adevăr, dacă acest enunţ se poate demonstra, el trebuie să fie adevărat, adică, avînd în vedere propria sa afirmaţie, el nu se poate demonstra. În consecinţă, acest enunţ nu se poate demonstra, deoarece ipoteza contrară duce la o contradicţie. Cu alte cuvinte, enunţul este adevărat. În acest mod am demonstrat enunţul.

Deosebirea faţă de raţionamentul lui Gödel rezidă în faptul că se poate întîmpla ca, înăuntrul unui sistem formal ca Z, un enunţ (3') corespunzînd lui (23), să fie adevărat, însă indemonstrabil. Aşadar, în locul unei contradicţii obţinem incompletitudinea.

Dacă însă spunem în schimb:

(24) Ceea ce spun poate fi demonstrat,
atunci nu avem, desigur, nici un paradox.

Acest enunţ are numai proprietatea caracteristică de a fi demonstrabil, dacă este adevărat. Dar, conform teoremei lui Gödel, nu orice enunţ într-un

sistem formal se bucură de această proprietate relativ la metoda demonstrativă a sistemului. În sistemul Z, un asemenea enunț ar deveni:

$$(25) \qquad (Ex)B(x, s(\bar{p}, \bar{p})),$$

unde $\bar{p}$ este numărul lui $(Ex)B(x, s(i, i))$.

Löb demonstrează următoarea teoremă (*Journal of Symbolic Logic*, **20**, pp. 115—118).

Teorema 2. Enunțul (25) este o teoremă a lui Z; în general, pentru orice enunț A cu numărul Gödel $\bar{k}$, dacă $(Ex)\, B(x, \bar{k}) \supset A$ este teoremă în Z atunci și A este teoremă.

Se poate observa că, în conformitate cu această teoremă, avem desigur și enunțuri A cu număr $\bar{k}$, astfel încît $(Ex)B(x, \bar{k}) \supset A$ nu este teoremă a lui Z, de exemplu enunțul (1) de mai sus . Un alt exemplu, care nu depinde de această teoremă, este $0 = 1$ ca A; în caz contrar, întrucît $0 \neq 1$ este teoremă a lui Z, *Con* (Z) ar fi și ea teoremă.

Demonstrația lui Löb utilizează 1.2., precum și ceea ce urmează:

1.5. Pentru orice $\bar{k}$, dacă $\bar{m}$ este numărul lui $(Ex)B(x, \bar{k})$, atunci următoarea formulă este teoremă a lui Z:

$$(Ex)B(x, \bar{k}) \supset (Ex)\, B(x, \bar{m}).$$

1.6. Dacă A este demonstrabilă în Z și are numărul $\bar{k}$, atunci $(Ex)B(x, \bar{k})$ este demonstrabilă în Z.

1.6 este evident. El deduce 1.5. din 1.3. și 1.4. Atunci demonstrația decurge după cum urmează. Fie A o formulă dată, avînd proprietatea cerută, și fie $\bar{p}$ numărul lui

$$(26) \qquad (Ex)\, B(x, s(i, i)) \supset A,$$

și fie $\bar{q} = s(\bar{p}, \bar{p})$ numărul lui

$$(27) \qquad (Ex)\, B(x, s(\bar{p}, \bar{p})) \supset A,$$

care este echivalentă cu

$$(28) \qquad (Ex)\, B(x, \bar{q}) \supset A.$$

Dacă $\bar{t}$ este numărul lui $(Ex)\, B(x, \bar{q})$, atunci, pe baza lui 1.2., putem demonstra în Z:

$$(29) \qquad ((Ex)\, B(x, \bar{t}) \,\&\, (Ex)\, B(x, \bar{q})) \supset (Ex)B(x, \bar{k}).$$

Dar, pe baza lui 1.5, $(Ex)\, B(x, \bar{q}) \supset (Ex)\, B(x, \bar{t})$. Așadar, (29) se reduce la

$$(30) \qquad (Ex)B(x, \bar{q}) \supset (Ex)B(x, \bar{k}).$$

Prin urmare, conform ipotezei, putem conchide că (28) este teoremă a lui Z. La fel și (27). În consecință, conform cu 1.6., avem $(Ex)B(x, \bar{q})$. În consecință, conform cu (28), A este teoremă a lui Z. Teorema 2 este demonstrată.

În esență, (28) spune:

(28) Dacă (28) este demonstrabil atunci A.

În limbajul obișnuit putem ajunge la paradox în modul următor. Să admitem că (28) este demonstrabil. Atunci (28) este adevărat și — întrucît am admis ipoteza lui (28) — atunci A. Așadar, am demonstrat că dacă (28) este demonstrabil, atunci A. Aceasta înseamnă că am demonstrat (28). Așadar, putem conchide A. Aceasta duce la concluzia că orice enunț A este adevărat și demonstrabil. Pe de altă parte, dacă pornim de la demonstrabilitatea relativă la Z ajungem la cealaltă situație din cadrul demonstrației de mai sus, pe care o putem recapitula astfel.

(31) Dacă (31) este demonstrabil în Z, atunci A.

Nu putem demonstra (31) în Z pentru A arbitrar, dacă Z nu este inconsistent. Cum Z este consistent, putem demonstra în el numai:

(32) Dacă (31) este demonstrabil în Z, atunci A este demonstrabil în Z.

Așadar, pentru ca să ajungem la A, avem nevoie de ipoteza suplimentară că în Z este demonstrabil:

(33) Dacă A este demonstrabil în Z, atunci A.

Dar acesta este cazul numai pentru un A adecvat ales.

§ 2. FUNCȚIILE RECURSIVE ȘI SISTEMUL Z

Pînă acum nu am dat o demonstrație pentru 1.1. Aceasta urmează dintr-un rezultat mai tare al lui Gödel, privitor la eliminarea funcțiilor primitiv recursive în Z, eliminare realizată mai detaliat în Hilbert-Bernays I, pp. 412—421. Să demonstrăm 1.1 este ceva mai ușor decît să demonstrăm rezultatul mai tare. Întrucît ideile principale sînt aceleași și nu intrăm în amănunte, ne vom mulțumi să dăm rezultatul mai tare și să indicăm, în linii mari, modul în care a fost demonstrat.

2.1. O funcție primitiv recursivă este orice funcție care se poate defini cu ajutorul lui 0, a funcției succesor și a variabilelor, utilizînd numai substituții și recurențe primitive, adică, fiind date g, h, definim f prin : $f(0, x) = g(x)$, $f(y', x) = h(y, f(y, x), x)$.

Un predicat F este reprezentat printr-o funcție, f, dacă $f(x) = 0 \equiv F(x)$ și $f(x) = 1 \equiv \sim F(x)$, pentru toți x. O altă definiție, care nu este folosită în mod uzual, ar consta numai în cerința ca pentru toți x să avem $f(x) = 0 \equiv \equiv F(x)$.

Un predicat este primitiv recursiv, dacă funcția sa reprezentativă este primitiv recursivă.

2.2. Dacă $A(x)$ și $B(y)$ sînt primitiv recursive, atunci $\sim A(x)$, $A(x)$ & $B(y)$ etc. sînt și ele primitiv recursive.

Astfel, dacă a, b reprezintă A, B, fie atunci $c(0) = 1$, $c(x') = 0$; $d(0, y) = 1$, $d(x', y) = c(y)$. $\sim A(x)$ este reprezentat prin $c(a(x))$, $A(x)$ & $B(y)$ prin $d(c(a(x)), c(b(y)))$.

2.3. Dacă $f(x)$ și $g(y)$ sînt primitiv recursive, atunci $f(x) < g(y)$ și $f(x) = = g(y)$ sînt de asemenea primitiv recursive.

2.4. Dacă $R(x, y)$ și $f(z)$ sînt primitiv recursive, atunci (Ex) $(x < f(z)$ & & $R(x, y))$, și $\mu x(x < f(z)$ & $R(x, y))$ sînt de asemenea primitiv recursive.

Dacă $a(x, y)$ reprezintă R, atunci, de exemplu, primul predicat în 2.4 este reprezentat de b : $b(0, y) = a(0, y)$, $b(z', y) = a(z', y).b(z, y)$.

Teorema lui Gödel este:

Teorema 3. Dacă g, h pot fi reprezentate în Z, atunci o funcție f definită prin recurență primitivă, ca în 2.1., poate fi reprezentată în Z în sensul că există o formulă $R(x, y, z)$ în Z, astfel încît cele ce urmează sînt teoreme ale lui Z:

$$(Rxyz \;\&\; Rxyw) \supset z = w,\quad R(0,\ x,\ g(x)),\qquad R(y', x, h(y, \mu_z R(y, x, z), x)).$$

Să luăm un caz simplu cînd $f(0)$ este o constantă a, $f(x') = g(x, f(x))$. După cum a observat pentru prima oară von Neumann, putem concepe șiruri finite $f(0), \ldots, f(n)$, pentru fiecare n, reprezentîndu-le prin întregi, de exemplu:

$$2^{f(0)} \ldots p_{n+1}^{f(n)}$$

și să luăm funcția primitivă recursivă $h(m, k)$ care dă termenul de rang k al șirului reprezentat de m. Atunci funcția cerută f poate fi definită explicit:

$$(1)\quad f(n) = \mu_y(Ex)(h(x, n) = y \;\&\; h(x, 0) = a \;\&\; (z)\ (z < n \supset h\ (x, z')$$
$$= g(z,\ h(x,\ z)))).$$

În consecință, rezultă că dacă în Z dispunem de funcția h, teorema poate fi demonstrată.

Gödel nu a făcut decît să arate, printr-un raționament suplimentar, că putem realiza ceva similar, luînd numai adunarea și înmulțirea ca funcții primitiv recursive date inițial, așa cum e cazul în Z. El utilizează următoarea lemă (pentru a cărei demonstrație amănunțită a se vedea M. Davis, *Computability and Solvability*, 1958, p. 45):

2.5. Pentru orice șir finit $a_0, \ldots, a_n$ există întregi p și q, astfel încît, pentru toți $k = 0, \ldots, n$, $p \equiv a_k \pmod{k'q + 1}$.

Pe baza acestei leme putem folosi p pentru reprezentarea șirului dat, iar $h(x, k)$ poate fi definit ca restul împărțirii lui p prin $k'q + 1$ și putem iarăși defini pe f în mod explicit prin (1).

Pentru a demonstra că aceasta se poate efectua corect în Z, este necesar să demonstrăm în Z:

$$(Ex)\ (Ey)\ (Eu)\ (x = uy' + a \;\&\; (z)\ (z < n \supset (Ev)\ (Ew)(Et) \cdot$$
$$\cdot\ (x = v\ (z'y + 1) + t \;\&\; x = w(z''y + 1) + g(z,\ t)))).$$

O demonstrație de acest fel este dată în Hilbert-Bernays, vol I. p. 416 și urm.

Teorema 3 fiind dată, este relativ ușor să demonstrăm 1.1., întrucît pașii pentru evaluarea oricărei formule numerice pe baza definițiilor recursive pot fi efectuați cu ușurință în Z.

O altă aplicație celebră a metodei de numerotație Gödel este forma normală a lui Kleene pentru funcțiile recursive. Întrucît forma ecuațiilor care definesc o funcție recursivă precum și regulile de derivare pot fi reprezentate cu ușu-

rință prin metode primitiv recursive, Kleene a fost în stare să definească un predicat primitiv recursiv T, astfel încît $T(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ are loc dacă $\bar{x}$ este numărul definiției unei funcții f, iar $\bar{z}$ este numărul primei ecuații derivate de forma $f(\bar{y})=\bar{k}$, unde $\bar{k}$ este un numeral. El definește, de asemenea, o funcție primitiv recursivă U, astfel încît $U(\bar{z})$ este $\bar{k}$, dacă $\bar{z}$ este numărul unei ecuații de forma de mai sus. Așadar, obținem (a se vedea cartea lui Kleene, p. 288 și p. 33):

Teorema 4. Dacă f este general recursivă, atunci există un număr e, astfel încît $f(x) = U(\mu_y T(e, x, y))$; o teoremă similară are loc pentru funcțiile parțial recursive.

O altă aplicație a numerotației Gödel constă în a da o „definiție a adevărului " a lui Z (a se vedea Hilbert-Bernays, vol. II, pp. 330—340). Astfel, întrucît adunarea și înmulțirea sînt unicele funcții inițiale date în Z, este ușor să caracterizăm mulțimea formulelor numerice în Z care sînt adevărate. Putem reprezenta transformarea oricărei formule în forma *prenex* și apoi putem să definim $(x)F(x)$ ca fiind adevărat atunci cînd $F(0)$, $F(1)$,... sînt toate adevărate. În mod similar, în cazul lui $(Ex)F(x)$. În acest mod, putem defini inductiv o relație $M(n, k)$, astfel încît $M(n, 0)$ are loc, dacă n este numărul unei formule numerice adevărate și $M(n, k')$ are loc dacă n este, de exemplu, numărul lui $(x)F(x)$ și pentru toate numerele j ale formulelor $F(0)$, $F(1)$ etc. are loc $M(j, k)$. Atunci un număr n este numărul unei formule adevărate, dacă $(Ek)M(n, k)$.

Definiția inductivă a lui $M(n, k)$ este de forma:

$$(2) \quad M(n, 0) \equiv A(n), \quad M(n, k') \equiv B(n, k).$$

Aici, A este primitiv recursiv, dar B conține cuantori. Iar o consecință a teoremelor lui Gödel este că nu există un predicat M în Z pentru care putem demonstra în Z relația de mai sus (2).

§ 3. LEMA LUI BERNAYS

Datorită completitudinii calculului predicatelor, orice sistem S, dacă este consistent, are un model aritmetic sau o interpretare „adevărată" în domeniul numerelor naturale. În consecință, dacă S este consistent, există aserțiuni adevărate privitor la numere naturale care corespund tuturor axiomelor sistemului. Dar, deoarece știm că sistemul S (de exemplu, o teorie tare a mulțimilor) poate fi mult mai tare decît teoria uzuală a numerelor, se pune problema naturii aserțiunilor corespunzătoare axiomelor lui S și dacă ele ar putea fi indemonstrabile sau chiar inexprimabile în teoria numerelor. Lema lui Bernays conține un răspuns la aceste întrebări.

Pentru a recurge la un exemplu determinat, să presupunem că S este teoria mulțimilor a lui Zermelo în forma ei perfecționată de către Skolem și să presupunem că se dă o aritmetizare a sintaxei lui S în așa fel, încît un enunț aritmetic $Con(S)$ exprimă consistența lui S. Atunci lema este următoarea. Există un predicat aritmetic exprimabil în notația teoriei uzuale a numerelor, astfel încît prin substituirea acestuia în locul predicatului apartenenței, în

cadrul axiomelor lui S, obținem aserțiuni care sînt toate demonstrabile în sistemul rezultat prin adăugarea lui $Con\,(S)$ ca axiomă nouă la teoria obișnuită a numerelor. În demonstrarea acestei leme extindem oarecum construcția din Hilbert-Bernays, vol. II, pp. 234—353. Comunicarea a apărut inițial în „Methodos", 1951, pp. 217—232.

Fie Q calculul uzual al predicatelor într-o formulare standard, de exemplu, ca în L_q sau L_k. Privitor la un asemenea sistem Q este bine cunoscut că fiecărui enunț A îi putem asocia o formă normală Skolem pentru consistență C, care este un enunț de forma $(x_1) \ldots (x_r)\,(Ey_1) \ldots (Ey_s)\,B\,(x_1, \ldots, x_r; y_1, \ldots, y_s)$, unde $r, s > 0$, iar B nu conține cuantori, astfel încît are loc legea următoare.

3.1. Există un proces efectiv prin care pentru orice enunț A din Q putem găsi un enunț asociat C în forma normală Skolem pentru consistență, asfel încît $C \supset A$ este teoremă a lui Q și dacă $\sim C$ este teoremă a lui Q atunci și $\sim A$ este teoremă. Mai mult, putem găsi un enunț C' care rezultă din C prin substituirea unor expresii predicative adecvate în locul literelor predicative din C, care nu figurează și în A, astfel încît $A \supset C'$ este teoremă a lui Q.

Pentru a demonstra teorema principală, vom presupune că sistemele considerate sînt formulate toate în cadrul lui Q. Astfel, orice sistem care conține mai multe specii de variabile în notația sa primitivă este — prin ipoteză — tradus deja, prin metode cunoscute, într-un sistem care conține numai o singură specie de variabile.

Să considerăm acum un sistem S arbitrar printre primitivele căruia figurează numai o singură specie de variabile. Afară de conective, cuantori și variabile, sistemul S mai conține unele dintre următoarele specii de simboluri (eventual toate): predicate, functori și constante individuale. Aceste simboluri se scriu, de regulă, în forme determinate și primesc denumiri speciale, care concordă cu axiomele lui S: predicatul de apartenență ε, functorul adunare $+$, numărul zero 0 etc. Spunînd că S este formulat în cadrul teoriei generale a cuantificării Q, înțelegem prin aceasta presupunerea că simbolurile speciale au fost identificate arbitrar cu anumite simboluri de același fel în Q, astfel că notația lui S este conținută în notația lui Q și toate formulele lui S sînt și formule ale lui Q.

Presupunem că S conține ca parte propria sa teorie a cuantificării, respectiv partea din Q în care figurează numai simbolurile care aparțin lui S. Pentru a distinge Q de asemenea teorii speciale ale cuantificării, vom spune că Q este teoria generală a cuantificării. Întrucît se știe că, din punct de vedere teoretic, ne putem dispensa de simboluri funcționale și constante individuale, presupunem că nici Q, nici S nu conțin simboluri funcționale sau constante individuale, în notațiile lor primitive. Mai mult, întrucît toate regulile de inferență în S sînt cazuri speciale ale celor din Q sau pot fi înlocuite prin scheme axiomatice, este suficient să considerăm în cele ce urmează numai axiomele lui S, admițînd că regulile de inferență dinafara teoriei cuantificării au fost înlocuite în întregime prin scheme de axiome.

Să presupunem acum că se dă un asemenea sistem S, cu axiomele sale $A_1, A_2, \ldots$, care se exprimă toate în notația lui Q. Putem demonstra următoarea teoremă.

3.2. Dacă Q rămîne consistent după adăugarea lui $A_1, A_2, \ldots$ ca axiome noi, atunci S are o interpretare adevărată în domeniul numerelor naturale.

Fie $C_1, C_2, \ldots$ formele normale Skolem pentru consistență corespunzătoare lui $A_1, A_2, \ldots$ etc. Prin ipoteză, pentru orice $n, \sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_n$ nu este demonstrabilă în Q. Aici putem admite că noile litere predicative care au trebuit să fie introduse în formarea formelor normale Skolem sînt alese separat pentru fiecare C_i, astfel încît literele predicative noi care intră în C_j diferă toate de literele predicative care intră în $C_k (k \neq j)$. Fie $C_1', C_2', \ldots$, în aceeași relație față de $C_1, C_2, \ldots$ cum este C' față de C în 3.1. Acum, dacă $\sim C_1 \vee \ldots \vee \sim C_n$ ar fi demonstrabilă, atunci și $\sim C_1' \vee \ldots \vee \sim C_n'$ ar fi demonstrabilă. Dar, conform lui 3.1, $\sim C_i' \supset \sim A_i$ este demonstrabil în Q $(i = 1, \ldots, n)$, ca și enunțul $\sim C_1' \vee \ldots \vee \sim C_n' \supset \sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_n$. Ar urma deci că $\sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_n$ este demonstrabil. În consecință, $\sim C_1 \vee \ldots \vee \sim C_n$ nu este demonstrabil în Q.

Pentru fiecare pozitiv întreg i, fie $\bar{x}_i$ un r_i-uplu de variabile și fie $\bar{y}_i$ un s_i-uplu de variabile, unde $r_1, s_1, r_2, s_2 \ldots$ formează un șir de întregi pozitivi. Putem admite că pentru fiecare întreg pozitiv i, C_i este $(\bar{x}_i)\ (E\bar{y}_i)\ B_i(\bar{x}_i; \bar{y}_i)$ sau $(x_1) \ldots (x_{r_i})\ (Ey_1) \ldots (Ey_{s_i})\ B_i(x_1, \ldots, x_{r_i}; y_1, \ldots, y_{s_i})$. Fie $x_0, x_1, x_2, \ldots$ un șir de variabile distincte din Q. Fie $\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i$ un șir de r_i-upluri de variabile scoase din șirul $x_0, x_1, \ldots$ (cu repetiții) și dispuse în ordinea sumei indicilor sau, în caz de sumă identică, lexicografic. Fie $\bar{y}_k^i$ un s-uplu de variabile scoase din variabilele $x_0, x_1, \ldots$, astfel încît $\bar{y}_1^1, \bar{y}_2^1, \bar{y}_1^2, \bar{y}_3^1, \bar{y}_2^2, \bar{y}_1^3, \bar{y}_4^1 \ldots$ coincid cu $x_1, x_2, \ldots$: de exemplu, $\bar{y}_1^1$ este $x_1, \ldots, x_{s_1}$; $\bar{y}_2^1$ este $x_{s_1+1}, \ldots, x_{2s_1}$; $\bar{y}_1^2$ este $x_{2s_1+1}, \ldots, x_{2s_1+s_2}$. Fie $D_1\ B_1(\bar{x}_1^1; \bar{y}_1^1)$ și fie $D_n(D_{n-1} \,\&\, B_1(\bar{x}_n^1; \bar{y}_n^1) \,\&\, B_2(\bar{x}_{n-1}^2; \bar{y}_{n-1}^2) \,\&\, \ldots \,\&\, B_{n-1}(\bar{x}_2^{n-1}; \bar{y}_2^{n-1}) \,\&\, B_n(\bar{x}_1^n; \bar{y}_1^n))$.

Este posibil să demonstrăm prin inducție că pentru fiecare n, următoarea formulă este o teoremă în Q: $(x_0)(\bar{y}_1^1) \ldots (\bar{y}_1^n) \sim D_n \supset \sim C_1 \vee \ldots \vee \sim C_n$. În consecință, întrucît consecventul nu este demonstrabil în Q, antecedentul nu este nici el demonstrabil și $\sim D_n$ nu este o tautologie. Așadar, pentru fiecare k, D_k nu conține cuantori și este realizabil (adică putem realiza o alegere satisfăcătoare a valorilor de adevăr, adică putem atribui valorile de adevăr, adevăr și fals, formulelor atomice care figurează în D_k în așa fel, încît D_k să primească valoarea adevăr, în cazul interpretării normale a funcțiilor de adevăr). Mai mult, dacă F_k este pentru orice k formula obținută din D_k prin înlocuirea lui x_0 prin 0, a lui x_1 prin 1 etc. atunci orice F_k este, la rîndul ei, o formulă a funcțiilor de adevăr realizabilă.

Acum, vrem să arătăm că formulele propoziționale $F_1, F_2, \ldots$ sînt realizabile simultan. Fie $P_1, P_2, \ldots$, formulele atomice care intră în $F_1, F_2, \ldots$ așezate în ordinea primei lor apariții, și fie t_i cel mai mare număr t, astfel încît P_t intră în $F_1, \ldots, F_i$. Prin urmare, F_k conține t_k formule atomice $P_1, \ldots, P_{t_k}$ și există 2^{t_k} alegeri posibile de valori de adevăr pentru F_k, pe care le putem reprezenta prin numere diferite în felul următor. Să reprezentăm valorile adevăr și fals prin numerele 0 și 1, și să reprezentăm alegerea de valori de adevăr pentru care $P_1, \ldots, P_{t_k}$ iau, respectiv, valorile $m_1, \ldots, m_{t_k}$ prin numărul $2^{t_k-1}m_1 + \ldots + 2m_{t_k-1} + m_{t_k}$. În acest fel, cele 2^{t_k} alegeri posibile de valori de adevăr pentru F_k sînt reprezentate prin numerele de la 0 la $2^{t_k}-1$. Să numim o alegere de valori de adevăr pentru formulele atomice $P_1, \ldots, P_{t_k}$ pentru care F_k ia

valoarea adevăr ca o alegere satisfăcătoare pentru F_k. Întrucît orice F_k este realizabil, există cel puțin o alegere (și cel mult $\overrightarrow{2^t}_k$ alegeri diferite) satisfăcătoare pentru F_k. Dacă $j > k$, atunci orice alegere satisfăcătoare pentru F_j conține ca parte o alegere satisfăcătoare pentru F_k, deoarece F_k este o parte a conjuncției F_j-urilor. Vom numi această alegere satisfăcătoare pentru F_k a k-a parte a alegerii satisfăcătoare pentru F_j.

Dacă o alegere satisfăcătoare pentru F_k este a k-a parte a unei alegeri satisfăcătoare date pentru F_j și n este un număr oarecare între k și j, atunci a k-a parte a alegerii satisfăcătoare pentru F_n este totodată și a n-a parte a alegerii respective pentru F_j. În consecință, pentru orice k, există cel puțin o alegere satisfăcătoare pentru F_k, astfel încît pentru fiecare $n(n > k)$ ea constituie a k-a parte a unei alegeri satisfăcătoare pentru F_n. Așadar, pentru fiecare k putem selecta o alegere unică în $P_1, \ldots, P_{t_k}$, care este alegerea satisfăcătoare pentru F cu cel mai mic număr caracteristic, astfel încît, pentru orice $n(n > k)$, ea este a k-a parte a unei alegeri satisfăcătoare pentru F_n.

Să presupunem dată pentru orice k alegerea selectată pentru F_k. Pentru aceste alegeri selectate se poate demonstra că pentru două numere oarecare j și n $(j > n)$, alegerea selectată pentru F_n este a n-a parte a celei a lui F_j. Aceasta, deoarece din modul în care reprezentăm alegerile prin numere putem deduce că dacă j_1 și j_2 sînt două atribuiri de valori pentru $P_1, \ldots, P_{t_j}$ și n_1, n_2 reprezintă n-părțile lor corespunzătoare, atunci $j_1 > j_2$ are loc dacă și numai dacă $n_1 > n_2$. În consecință, aceste alegeri selectate luate împreună oferă o alegere pentru $P_1, P_2, \ldots$, care satisface $F_1, F_2, \ldots$ în mod simultan. Prin urmare, dacă interpretăm orice literă de enunț P ca desemnînd un enunț despre numere naturale, care este adevărat sau fals, după cum în alegerile de mai sus P primește valoarea adevăr sau fals, și dacă interpretăm fiecare literă predicativă φ cu n argumente $(n > 0)$, ca desemnînd un predicat cu n-locuri din teoria numerelor, adevărat pentru n numere date $m_1, \ldots, m_n$ în cazul cînd $V(m_1, \ldots, m_n)$ intră într-un F_i și primește valoarea adevăr în alegerile de mai sus și fals în caz contrar — atunci avem o interpretare în domeniul numerelor naturale prentru predicatele care figurează în $F_1, F_2, \ldots$ care face ca $F_1, F_2, \ldots$ să devină toate adevărate.

Dar orice F_k este o conjuncție de termeni de forma $B_n(\overline{m}_j^n, j_i^n)$ obținută din $B_n(\overline{x}_i^n; \overline{y}_i^n)$ punînd 0 pentru x_0, 1 pentru x_1 etc. În consecință, formulele $B_n(\overline{m}_i^n; j_i^n)$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$ sînt toate adevărate în interpretarea respectivă. Întrucît pentru orice $n(n = 1, 2, \ldots)$ r_n-uplurile $\overline{m}_1^n, \overline{m}_2^n \ldots$ epuizează toate r_n-uplurile de numere naturale, C_n (respectiv $(\overline{x}_n)(E\overline{y}_n) B_n(\overline{x}_n; \overline{y}_n)$) este adevărat în interpretarea de mai sus în domeniul numerelor naturale. În consecință, conform lui 3.1, A_1, A_2, sînt toate adevărate în această interpretare. Așadar, 3.2 este demonstrat.

Demonstrația de mai sus rămîne valabilă dacă A_1, A_2, ... sînt toate unul și același enunț (să spunem $\sim \bar{C}$). În acest caz, demonstrația garantează că dacă $\bar{C}$ nu este demonstrabil în Q atunci $\sim \bar{C}$ este realizabil (în domeniul numerelor naturale). În consecință, pentru orice enunț $\bar{C}$ din Q dacă $\bar{C}$ este valid (general adevărat) atunci $\bar{C}$ este teoremă a lui Q. Cu alte cuvinte, completitudinea lui Q decurge și ea din 3.2.

Înainte de a demonstra teorema principală, pare indicat să ne ocupăm de o mică complicație, cauzată de existența unor teoreme ale lui Q care conțin

simboluri ce nu figurează în S și care nu sînt deci teoreme ale lui S. Vom face aceasta pe baza teoremei ce urmează:

3.3. Sistemul obținut din Q, după adăugarea tuturor axiomelor lui S, este traductibil în S.

Demonstrație. Cu ajutorul cuantorilor și al conectivelor pentru funcții de adevăr, putem genera, plecînd de la predicatele lui S, un număr arbitrar de predicate și enunțuri. Substituind în mod determinat unul din predicatele lui S în locul fiecărui predicat sau literă de enunț din Q în toate enunțurile lui Q, obținem o traducere a sistemului Q plus axiomele lui S în sistemul S. Se poate verifica faptul că axiomele lui S rămîn nemodificate în traducere, în timp ce axiomele și regulile de inferență ale teoriei generale a cuantificării sînt traduse în axiome și reguli ale teoriei speciale a cuantificării din S.

Aplicînd metoda aritmetizării la demonstrația pentru 3.2, putem demonstra teorema principală.

Teorema 5. Dacă S este consistent, atunci putem defini în sistemul Z, obținut din teoria numerelor prin adăugarea ca axiomă a $Con(S)$, anumite predicate, astfel încît axiomele A_1, A_2, ... ale lui S devin toate demonstrabile în Z, dacă înlocuim în cadrul lor toate predicatele, unul cîte unul, prin aceste predicate definite în Z, și facem ca toate variabilele să varieze pe domeniul numerelor naturale.

Să presupunem dată o aritmetizare a sintaxei lui Q. Întrucît S este formulat în Q, avem cu aceasta și o aritmetizare a sintaxei lui S. Fie $\mathrm{Thq}(m)$ enunțul aritmetic care exprimă faptul că m reprezintă o teoremă a lui Q.

Prin ipoteză, S este consistent. Așadar, conform cu 3.3, Q rămîne consistent cînd adăugăm A_1, A_2, ..., și consistența sistemului obținut rezultă din $Con(S)$. În consecință, pentru orice constantă i, $\sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_i$ nu este demonstrabil în Q și, deoarece $Con(S)$ este axiomă a lui Z_s, $(i) \sim \mathrm{Thq}(a_i)$ este o teoremă a lui Z_s, a_1, a_2, ... fiind numerele corespunzătoare pentru $\sim A_1$, $\sim A_1 \vee \sim A_2$ ... .

Fie K_1, K_2, K_3 și K_4 clasele numerelor Gödel ale formulelor respectiv de forma $\sim C_1 \vee \ldots \vee \sim C_k$, $\sim D_k$, $(x_0)(\overline{y}_1^1) \ldots (\overline{y}_1^k) \sim D_k \supset \sim C_1 \vee \ldots \vee \sim C_k$ și $\sim F_k (k = 1, 2, \ldots)$. Ne putem atunci convinge că toate aceste clase sînt recursive, deoarece, în general, pentru orice formulă din Q putem să decidem întotdeauna dacă ea are sau nu una dintre aceste forme.

Conform demonstrației uzuale pentru 3.1 și a raționamentelor utilizate în cadrul demonstrației pentru 3.2, există un proces efectiv care pentru fiecare demonstrație în Q a formulei $\sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_k$ dă o demonstrație pentru $\sim C_1 \vee \ldots \vee \sim C_k$. Așadar, avem următoarea teoremă a lui Z_s: pentru orice m, dacă m aparține lui K_1, atunci $\sim \mathrm{Thq}(m)$.

Întrucît în demonstrarea faptului că, pentru orice n dat, $(x_0)(\overline{y}_1^1) \ldots (\overline{y}_1^n) \sim D_n \supset \sim C_1 \vee \ldots \vee \sim C_n$ este teoremă a lui Q am recurs numai la inducție și la considerații sintactice elementare, demonstrația se poate aritmetiza pentru a da următoarea teoremă a lui Z_s: pentru orice m, dacă m aparține lui K_3, atunci $\mathrm{Thq}(m)$. Așadar, dacă $\mathrm{taut}(m)$ este enunțul aritmetic care exprimă faptul că m este numărul unei formule tautologice, putem demonstra și faptul că în Z_s: pentru orice m, dacă m aparține lui K_2, atunci $\sim \mathrm{taut}(m)$, și dacă m aparține lui K_4, atunci de asemenea $\sim \mathrm{taut}(m)$.

Cu alte cuvinte, oricare din F_1, F_2 ... este realizabil ca funcție de adevăr. Ca și mai sus, fie P_1, ..., P_{t_k} formulele atomice care intră în F_k. Putem defini o funcție recursivă Q, astfel încît $Q(k, n)$, dacă și numai dacă n reprezintă o alegere satisfăcătoare pentru F_k peste formulele atomice ale lui F_k. Putem defini, de asemenea, o funcție recursivă e, astfel încît $e(k)$ este numărul formulelor atomice conținute în F_k. Folosind aceste noțiuni, putem demonstra următoarea teoremă în Z_s: $(\exists\, m)\,(m < 2^{e(k)}\ \&\ Q(k, m))$.

Mai mult, pe baza considerațiilor despre alegerile marcate de valori de adevăr care luate împreună satisfac simultan F_1, F_2, ..., putem defini și o funcție a astfel, încît pentru orice k, $a(k)$ este numărul care reprezintă alegerea marcată pentru formulele atomice ale lui F_k. În acest scop admitem o relație recursivă H, astfel încît $H(k, m, j, n)$ are loc, dacă și numai dacă m reprezintă a k-a parte a unei alegeri satisfăcătoare pentru F_j reprezentată prin n. În acest caz, definiția funcției cerute este: $a(k) = \mu_m(j)\,(k \leqslant j \supset (\exists\, n)\, H(k, m, j, n))$. Această funcție a nu este neapărat recursivă, deoarece valorile pe care le poate lua variabila j nu sînt mărginite superior pentru orice k dat. Axioma $Con(S)$ joacă un rol esențial în formarea definiției de mai sus pentru $a(k)$ în Z_s pentru a obține funcția cerută.

Fie V_1, V_2, ... toate literele predicative și de enunț care intră în unii din C_1, C_2, ..., dispuse în ordinea primei lor apariții. Pentru orice $i (i = 1, 2, ...)$, presupunem că V_i ocupă al p_i-lea loc ($p_i = 0, 1, 2, ...$). Pentru orice V_i putem defini o funcție recursivă k_i, astfel încît pentru orice n_1, ..., n_{p_i} și m, $k_i(n_1, n_2, ..., n_{p_i}) = m$, dacă și numai dacă $V_i(n_1, ..., n_{p_i})$ este P_m. Întrucît (k) $(k \leqslant e(k))$, rezultă că pentru orice k, P_k intră în F_k. În consecință, pentru orice caz $V_i(n_1, ..., n_{p_i})$ al predicatului $V_i(z_1, ..., z_{p_i})$ intrînd ca P_m în F_1, F_2, ..., valoarea pe care o ia $V_i(n_1, ..., n_{p_i})$ în toate alegerile marcate este valoarea pe care P_m o ia în alegerea marcată pentru F_m (pentru P_1, ..., P_{t_m}) reprezentată prin $a(m)$. Să admitem, mai departe, că am introdus o funcție recursivă γ_1 astfel, încît, $\gamma_1(m, k, j) = 0$, dacă și numai dacă alegerea reprezentată de m în formulele atomice ale lui F_k atribuie valoarea adevăr lui P_j. Utilizînd aceste noțiuni, putem reprezenta condiția că $V_i(n_1, ..., n_{p_i})$ ia valoarea adevăr în toate alegerile selectate de către formula $\gamma_1[a(k_i(n_1, ..., n_{p_i})), k_i(n_1, ..., n_{p_i}), k_i(n_1, ..., n_{p_i})] = 0$.

Prin aceasta, expresia predicativă $\gamma_1[a(k_i(z_1, ..., z_{p_i})), k_i(z_1, ..., z_{p_i}), k_i(z_1, ..., z_{p_i})] = 0$, pe care o vom numi $V_i^*(z_1, ..., z_{p_i})$, constituie corespondentul aritmetic cerut al lui $V_i(y_1, ..., y_{p_i})$ care figurează inițial în C_1, C_2 etc. Vrem să arătăm că fiecare dintre rezultatele C_1^*, C_2^*, ... obținute din $C_1, C_2, ...$ prin substituirea lui V_1^*, V_2^*, ..., respectiv pentru toate intrările lui V_1, V_2, ... este demonstrabil în Z_s.

Să notăm prescurtat $(\exists\, m)\,(m < 2^{e(k)}\ \&\ Q(k, m))$ prin $q(k) = 0$. Deoarece atunci $q(k) = 0$ este demonstrabil în Z_s, este suficient să arătăm că fiecare C_n^* particular poate fi derivat în Z din $q(k) = 0$. Formula C_n^* este de forma $(m_1) \ldots (m_{r_n})\,(Ej_1) \ldots (Ej)_{s_n}\, B_n^*(m_1, ..., m_{r_n}; j_1, ..., j_{s_n})$, unde B_n^* corespunde lui B_n în același fel ca C_n^* lui C_n. Pentru ca să derivăm C_n^* este suficient să derivăm:

$$B_n^*(m_1, ..., m_{r_n};\ \eta_n(m_1, ..., m_{r_n}), ..., \eta_n(m_1, ..., m_{r_n}) + s - 1),$$

unde $\eta_n(m_1, \ldots, m_{r_n})$ este o funcție recursivă care dă primul termen al s_n-uplului j_i^n dacă termenii lui $\overline{m}_i^n$ sînt $m_1, \ldots, m_{r_n}$ ($\overline{m}_i^n$ și j_i^n se definesc ca în ultima parte a demonstrației lui 3.2). Dar derivarea acestei formule este analogă întocmai cu derivarea folosită de Hilbert și Bernays pentru cazul cînd în loc să considerăm o infinitate de forme normale Skolem C_1, C_2, ... considerăm o singură formă.

Fiind dat că orice C_n^* este demonstrabil în Z_s, teorema 5 decurge imediat. Într-adevăr, conform lui 3.1, A_n^* este atunci de asemenea teoremă a lui Z_s, unde A_n^* corespunde lui A_n la fel ca C_n^* lui C_n. În consecință, A_1^*, A_2^*, ... sînt demonstrabile toate în Z_s. Mai mult, există un proces efectiv prin care, pentru un A_n oarecare, putem găsi corespondentul său A_n^* în Z_s.

Pentru ca să aplicăm teorema 5 la un sistem cu mai multe specii de variabile, sistemul ar trebui mai întîi redus la un sistem cu o singură specie de variabile. Cu toate acestea, trebuie observat aici că putem demonstra analog și o teoremă similară teoremei 5 pentru o teorie a cuantificării multisortate, teoremă care se poate aplica direct la sisteme cu mai multe specii de variabile.

De altfel, nu este greu să modificăm demonstrațiile pentru 3.1, 3.2, 3.3 și teorema 5 astfel, încît să obținem teoreme similare pentru cazurile cînd Q include o mulțime numerabilă de constante individuale, iar S include o mulțime finită sau numerabilă de constante individuale despre care putem admite că au fost identificate într-un mod arbitrar cu unele constante sau cu toate constantele din Q.

Deși putem da o altă demonstrație mai scurtă a teoremei 5 printr-o aritmetizare a unor demonstrații mai scurte ale completitudinii calculului predicatelor, este foarte probabil că informația obținută ar fi mai mică iar anumite aplicații, ca cea făcută de Kreisel (*Fund. Math.*, vol. 37, pp. 265—285), care depinde de anumite detalii ale demonstrației mai lungi, nu mai pot fi făcute.

§ 4. TRADUCERI ARITMETICE ALE SISTEMELOR DE AXIOME

În acest paragraf vom discuta ideile de traducere studiate în „Trans. Am. Math. Soc.", **71**, 1951, pp. 283—293). Aceste idei au fost definite avînd în vedere anumite scopuri specifice și, în generalitatea lor, ele prezintă o ambiguitate în ce privește existența și demonstrabilitatea, așa cum au arătat Gödel și Kreisel. Inițial au fost definite două noțiuni; ele devin patru la număr, dacă distingem traducerile demonstrabile de cele în care se cere simpla existență a unei corelații efective.

Fie S și S' două sisteme formale oarecare, formalizate în cadrul calculului predicatelor.

Definiția 1. Se spune că S are un model interior S' dacă există un mod efectiv de înlocuire a tuturor predicatelor lui S prin predicate ale lui S', astfel încît toate enunțurile care rezultă în locul teoremelor lui S sînt teoreme ale lui S'.

Mai explicit, această definiție conține cel puțin următoarele părți.

(1) Imaginea unei cuantificări (adică a unei formule care începe cu un cuantor) din S este o cuantificare în S'.

(2) Imaginea negației unei formule a lui S este negația imaginii formulei.

(3) Imaginea conjuncției a două formule ale lui S este conjuncția imaginilor lor.

(4) Toate imaginile teoremelor lui S sînt teoreme ale lui S'. Sau reciproc.

(4.1) Imaginile axiomelor lui S sînt teoreme ale lui S'.

(4.2) Dacă un enunț al lui S este deductibil din alte enunțuri ale lui S, pe baza unei reguli de inferență, iar imaginile acestor din urmă enunțuri ale lui S sînt teoreme ale lui S', atunci imaginea primului enunț este de asemenea teoremă a lui S'.

În această definiție, pentru a fi succinți, funcțiile nu sînt menționate, deoarece ele pot fi înlocuite prin predicate sau înglobate într-un mod analog.

Pentru a compara tăria relativă a sistemelor formale este indicat adesea să cerem ca aceste condiții să fie satisfăcute în mod demonstrabil.

DEFINIȚIA 2. Fie B și B' predicatele demonstrație ale lui S și S' și fie T un sistem care operează cu numere naturale. Se spune că S este T-traductibil în S', dacă există o funcție recursivă f astfel încît putem demonstra în T: $(i) Q(k) \supset Q'(f(k))$ unde Q și Q' sînt clasele de numere Gödel ale formulelor cuantificaționale în S și S'; (ii) $c(f)k), f(m)) = f(c(k, m))$, unde $c(a, b)$ este numărul conjuncției formulelor cu numerele a, b; (iii) $f(n(k)) = n(f(k))$, unde n este funcția pentru negație, ca mai sus; (iv) $(Ex) B(x, y) \supset (Ex) B'(x, f(y))$.

Sacrificînd generalitatea în favoarea preciziei, ne vom dispensa de relativizarea în raport cu T și vom vorbi, pur și simplu, despre traductibilitate atunci cînd T este subînțeles a fi sistemul Z.

Se întîmplă foarte des ca atunci cînd spunem că S se poate obține în S' sau este conținut ca parte în S', sau este consistent relativ la S', să fim în situația că S este traductibil în S' conform definiției de mai sus. Putem cita ca exemplu: reducerea algebrei numerelor complexe la cea a numerelor reale, consistența (relativă) a diverselor geometrii (prin traducerea lor în geometria euclideană sau în sistemul numerelor reale), consistența teoriei mulțimilor finite, consistența relativă a axiomei alegerii și ipoteza generalizată a continuului, reducerea aritmeticii la teoria mulțimilor.

Aplicînd această definiție, putem reformula lema lui Bernays:

TEOREMA 6. Orice sistem formal S (formalizat în cadrul calculului predicatelor) este traductibil în sistemul Z_s obținut din Z prin adăugarea lui $Con(S)$ ca nouă axiomă.

DEFINIȚIA 3. Două sisteme formale S și S' se spune că sînt de tărie egală, dacă fiecare dintre ele este traductibil în celălalt; se spune că S' este mai tare ca S, dacă S este traductibil în S' însă reciproca nu are loc.

Despre două sisteme de tărie egală se poate spune că ele au aceeași „structură".

Se pare că, pe baza acestei definiții, putem obține o clasificare satisfăcătoare a sistemelor formale uzuale. În scopul clasificării sistemelor parțiale ale lui Z, este de dorit să folosim T—traducerea relativă la un sistem T mai elementar ca Z, cum ar fi sistemul R de aritmetică primitiv recursivă, obținut din Z prin eliminarea tuturor cuantorilor și adăugarea ulterioară a tuturor definițiilor primitiv recursive.

Pentru a păstra numai consistența, nu trebuie să pretindem atît de mult de la o traducere, deoarece lucrul esențial este conservarea negației. Prin urmare, putem introduce și o noțiune mai slabă de traducere.

Definiția 4. Fie S și S' sisteme formale care conțin un semn al negației. Se spune că sistemul S este slab T-traductibil (sau pur și simplu traductibil, dacă T este Z) în S', dacă există o funcție recursivă f, astfel încît condițiile (iii) și (iv) de la definiția 2 sînt satisfăcute.

De exemplu, se știe că calculul predicatelor este slab traductibil în calculul propozițional prin simpla eliminare a tuturor cuantorilor în fiecare formulă. Se știe, de asemenea, că Z este slab traductibil în sistemul lui Heyting pentru teoria intuiționistă a numerelor.

Există o serie de consecințe mai mult sau mai puțin evidente ale acestor definiții.

4.1. Dacă S este (slab) traductibil în S' atunci S este consistent dacă S' este consistent și $Con(S)$ este derivabil din $Con(S')$ în Z.

Vom adopta forma uzuală a lui $Con(S)$ și $Con(S')$. Dacă $\sim Con(S)$, atunci putem obține o constantă $\bar{k}$, astfel încît $(Ex)B(x, \bar{k})$ și $(Ex)B(x, n(\bar{k}))$. Conform cu (iii) și (iv) de mai sus, avem $(Ex)B'(x, f(\bar{k}))$ și $(Ex)B(x, n(f(\bar{k})))$, și în consecință $\sim Con(S')$.

Nu se știe dacă teorema continuă să fie adevărată, atunci cînd în loc de „S este traductibil în S'“, folosim numai ipoteza „S are un model interior în S'“.

4.2. Dacă Z și un sistem consistent S sînt traductibile în S' și traducerea lui $Con(S)$ în S' este teoremă a lui S', atunci S' este mai tare decît S; în particular, S poate fi același cu Z.

În caz contrar, traducerea lui $Con(S')$ în S' ar fi demonstrabilă în S'. Conform unei extinderi a celei de a doua teoreme a lui Gödel, S' și deci și S ar fi inconsistente.

4.3. Dacă luăm ca admisă cunoscuta ω-consistență pentru Z, atunci S este consistent, dacă și numai dacă Z_s este consistent.

Dacă adoptăm teoria mulțimilor a lui Zermelo și lăsăm la o parte axioma mulțimii putere, obținem un sistem S_1 cu o mulțime infinită, care conține toate mulțimile finite. Dacă numim S_2 sistemul obținut din S_1 prin adăugarea unei axiome că mulțimea putere a acelor mulțimi infinite există, numim S_3 extinderea ulterioară, incluzînd mulțimea putere a acelei mulțimi putere, și așa mai departe, atunci știm din lucrările de specialitate că are loc ceea ce urmează:

4.4. Există un șir de sisteme $S_1, S_2, \ldots$, astfel încît toate aceste sisteme sînt mai tari ca Z, iar dacă ele sînt consistente, atunci pentru fiecare m și n, S_m este mai tare ca S_n dacă și numai dacă m este mai mare ca n.

După cum știm, teoriile mulțimilor $S_1, S_2, \ldots$ pot fi formulate astfel, încît în axiomele fiecărui sistem figurează doar un singur predicat diadic (predicatul de apartenență). Fie aceste predicate $E_1, E_2, \ldots$, și fie $E_1^*, E_2^*, \ldots$ traducerile lor aritmetice, conform lemei lui Bernays.

DEFINIȚIA 5. Un predicat E implicit determinat prin anumite aserțiuni privitoare la el se spune că este definibil sau că admite un model într-un sistem S', dacă există un sistem S în care aserțiunile respective sînt teoreme și care este traductibil în S'.

De exemplu, predicatul de a fi număr natural este, conform definiției de mai sus, definibil în aceste sisteme, dacă considerăm că sistemul Z determină predicatul. Conform lui 4.4, avem:

4.5. Nici unul din predicatele E_1, E_2, ... nu este definibil în Z. Dacă S_1, S_2 ... sînt toate consistente, atunci pentru fiecare m și n, E_m este definibil în S_n atunci și numai atunci cînd m nu este mai mare decît n.

Dacă un predicat E este determinat prin anumite postulate, o traducere E^* a predicatului este determinată de traducerile acelor postulate. În consecință, avem și:

4.6. Nici unul din predicatele E_1^*, E_2^* ... nu este definibil în Z.

Fie Z_s, ca mai sus, sistemul obținut din Z prin adăugarea în calitate de nouă axiomă a lui $Con(S)$. Folosind același șir de sisteme, avem:

4.7. Dacă S_1, S_2 sînt toate consistente atunci:

(a) Toate sistemele Z_z, Z_{s_1}, Z_{s_2} ... sînt consistente și au aceeași notație primitivă ca Z;

(b) Orice sistem în șirul $Z, Z_z, S_1, Z_{s1}, S_2, Z_{s_2}$, ... este traductibil în fiecare sistem următor din șir;

(c) Pentru toți întregii pozitivi m și n, dacă m—1 este mai mare ca n atunci S_m nu este traductibil în Z_{s_n};

(d) Dacă m nu este mai mare ca n, atunci E_m este definibil în Z_{s_n}; dacă m-1 este mai mare ca n, atunci E_m nu este definibil în Z_{s_n};

(e) Dacă m-1 este mai mare ca n, atunci Z_{s_m} nu este traductibil în Z_{s_n} și, în consecință, de exemplu, orice sistem din șirul Z, Z_{s_1}, Z_{s_3}, Z_{s_6}, ..., este mai tare decît toți precedenții săi.

Demonstrație.

(a) Conform lui 4.3.

(b) Conform teoremei 6, orice S_i este traductibil în Z_{s_i}. Dar orice S_i conține Z și $Con(S_{s-1})$ ca teoremă. Așadar, $Z_{s_{i-1}}$ este traductibil în S_i.

(c) Întrucît m-1 este mai mare ca n, Z_{s_n} este, conform lui (b), traductibil în S_{m-1}. Drept urmare, dacă S_m ar fi traductibil în Z_{s_n}, S_m ar fi traductibil în S_{m-1}.

(d) Prin definiția 5, (b), și (c).

(e) Conform cu (b) și (c).

Două chestiuni rămîn fără răspuns: Este Z_{s_n} traductibil în S_n? Este $Z_{s_{n+1}}$ traductibil în Z_{s_n}? Știm numai că Z_{s_n} este traductibil în S_n pentru orice n, dacă și numai dacă, pentru orice n, $Z_{s_{n+1}}$ nu este traductibil în Z_{s_n}.

Din (d) și (e) de la 4.7 rezultă următorul corolar:

4.8. Există un șir de sisteme $L_0(=Z)$, L_1, L_2, ..., toate de aceeași notație, astfel încît dacă ele sînt toate consistente, atunci fiecare în parte este mai tare decît predecesorii săi și , prin urmare, nu este traductibil în nici unul dintre aceștia. Există totodată un șir de predicate P_1, P_2, ..., astfel încît P_m este definibil în L_n, atunci și numai atunci cînd m nu este mai mare ca n.

Folosind noțiunea de traducere, teorema lui Gödel asupra incompletitudinii sistemelor se poate enunța și ea:

4.9. Nu există un sistem consistent S, astfel încît să existe o traducere a teoriei numerelor Z în S în conformitate cu care, pentru fiecare enunț A din Z sau A, sau — A să fie tradus într-o teoremă a lui S.

Recent, Kreisel a obținut rezultate privitor la traductibilitate (a se vedea *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, 1955, pp. 26—50; „Journal of Symbolic Logic", 23, pp. 108—110), printre care și următorul:

4.10. Dacă S și S' sînt sisteme cu predicate demonstrație primitiv recursive, S conține Z și $Cons(S) \supset Cons(S')$ este teoremă a lui S', atunci există o S — traducere slabă a lui S' în S.

S. Feferman a făcut un studiu cuprinzător al modelelor interioare și traducerilor în dizertația sa (1957, Berkeley, California). Printre alte lucruri, el întreprinde un studiu exact al formulelor posibile care exprimă consistența unui sistem dat S, adică a formulelor care pot fi considerate în mod corect ca $Con(S)$.

Pentru a ilustra aplicațiile teoremei 6, vom considera două sisteme speciale N și N', astfel încît N' este o extindere predicativă a lui N.

N este un sistem slab de teoria mulțimilor, formulat în maniera lui Quine și aparținînd acelei specii de teorii ale mulțimilor, în care distincția între elemente (sau mulțimi) și clase (non-elemente) este de așa natură, încît toate clasele sînt clase de elemente. Axiomele lui N ne asigură doar de faptul că clasa nulă este un element și clasele cu unul sau două elemente sînt elemente. Ca atare, N admite un model care conține o mulțime numerabilă de elemente plus clase de aceste elemente. Un asemenea model arată limpede, după cum se pare, că N este aproximativ de aceeași tărie ca un calcul de ordin 2 al predicatelor fundat pe numerele naturale.

N mai poate fi caracterizat, de asemenea, ca sistem obținut din sistemul desvoltat de Quine în *Mathematical Logic* prin înlocuirea tuturor axiomelor acestuia privitoare la elemente printr-o singură axiomă care afirmă că perechile sînt elemente. Sistemul este formulat în cadrul teoriei cuantificării Q, în forma ei uzuală, cu un singur predicat special notat prin $\in$.

În N, variabilele de elemente a, b, c, și așa mai departe sînt introduse prin următoarele definiții contextuale:

4.11. $(a)\ A(a)$ pentru $(x)\ ((\exists y)(x \in y) \supset A(x))$.

4.12. $(\exists a)$ pentru — (a) —.

Și identitatea se definește în modul obișnuit:

4.13. $x = y$ pentru $(z)\ (z \in x \equiv z \in y)$.

Axiomele speciale ale lui N sînt date în C1 — C3.

*C*1. $x = y \supset (x \in z \supset y \in z)$.

*C*2. $(\exists a)\,(b)\,(b \in a \equiv (b = x \vee b = y))$.

*C*3. Dacă A este o formulă din N în care y nu este liberă, atunci $(\exists y)\,(a)\,(a \in y \equiv A)$.

Se știe că teoria numerelor Z este traductibilă în N. Una dintre modalitățile de efectuare a traducerii este următoarea. Să identificăm 0 cu clasa nulă, iar succesorul unui număr natural cu clasa unitate a acestuia. În acest mod, toate numerele naturale sînt identificate cu elemente ale lui N. Să definim atunci clasa Nn de numere naturale ca intersecția tuturor claselor x din N astfel încît x conține 0 și, pentru fiecare n, dacă x conține n, el conține și succesorul lui n. Principiul inducției rezultă imediat: Fiecare clasă care conține 0 și conține succesorul lui n de îndată ce conține pe n conține și Nn. Variabilele m, n și așa mai departe, care iau ca valori numere naturale, precum și μ — operatorii μ_m, μ_n și așa mai departe se pot introduce în N prin definiții contextuale. Sînt demonstrabile următoarele metateoreme ale lui N.

4.14. Dacă y nu este liberă în A, atunci $(\exists y)\ (m)(m \in y \equiv A)$.

4.15. $(\exists m)\ A(m) \supset A(\mu_m A(m))$.

4.16. $(n)(A(n) \equiv B(n)) \supset \mu_n A(n) = \mu_n B(n)$.

Sistemul N' este o extindere a lui N, notațiile primitive ale acestuia fiind cele din N plus un nou gen de variabile X, Y, și așa mai departe și un nou predicat diadic η. Formulele atomice din N' sînt $x \in y$ și așa mai departe, și $x\,\eta\,y$ și așa mai departe, pornind de la care construim toate formulele lui N' cu ajutorul conectivelor din domeniul funcțiilor de adevăr și al cuantorilor. N' conține teoria cuantificării pentru variabilele x, y și așa mai departe, și cea pentru variabilele x, y și așa mai departe. Axiomele speciale din N' sînt *C*1 — *C*3, precum și următoarele axiome suplimentare (*C*1 fiind acum redundant):

*C*4. Dacă A este o formulă din N' în care Y nu este liberă, atunci $(\exists\, Y)(x)\ (x\,\eta\,Y \equiv A)$.

*C*5. $(x)\,(x \in y \equiv x \in z) \supset (y\,\eta\,X \supset z\,\eta\,X)$.

Să admitem că sintaxa lui N și cea a lui N' au fost amîndouă aritmetizate în maniera obișnuită. Întrucît N este o parte a lui N', să admitem că aritmetizarea sintaxei lui N coincide cu o parte a aritmetizării lui N'. Cu asemenea aritmetizări, vom avea două enunțuri aritmetice *Con(N)* și *Con(N')*, care exprimă faptul că N este consistent, respectiv că N' este consistent. Fie $N\,\#$ sistemul obținut din N prin adăugarea ca nouă axiomă a lui *Con(N)*. Atunci putem obține totodată o aritmetizare a sintaxei lui $N\,\#$ din cea a lui N și deci există un enunț aritmetic *Con*($N\,\#$), care exprimă faptul că $N\,\#$ este consistent. Vrem să demonstrăm în teoria numerelor Z: Dacă *Con*($N\,\#$) atunci *Con(N')*.

Facem aceasta în modul următor. Conform teoremei 6, N este traductibil în sistemul Z_N, obținut din teoria numerelor prin adăugarea lui *Con(N)*

în calitate de axiomă nouă. Mai precis, știm că în Z_N se pot demonstra teoreme care sînt similare axiomelor lui N date la $C1-C3$ (imaginîndu-ne că toate simbolurile definite $=$, a, b, și așa mai departe au fost eliminate cu ajutorul definițiilor 4.11—4.13), cu excepția faptului că conțin un predicat aritmetic $\in^*$ (să zicem) din Z_N în locul lui $\in$, și variabilele m, n și așa mai departe în locul variabilelor x, y și așa mai departe. Întrucît N conține Z, $N\#$ conține Z_N. În consecință, toate aceste traduceri aritmetice ale axiomelor $C1-C3$ din N și N' sînt demonstrabile în $N\#$. De exemplu, corespunzător lui $C1$, putem demonstra în $N\#$:

$C1'$. $(m)\,(m \in^* k \equiv m \in^* j) \supset (k \in^* n \supset j \in^* n)$.

Să utilizăm m^*, k^* și așa mai departe ca abrevieri:

4.17. m^* pentru $\mu_n(j)\,(j \in^* n \equiv j \in^* m)$ și așa mai departe.

Atunci avem în $N\#$:

4.18. $j \in^* m^* \equiv j \in^* m$.

Demonstrație. Întrucît $(j)\,(j \in^* m \equiv j \in^* m^*)$, avem atunci $(\exists n)\,(j)\,(j \in^* n \equiv j \in^* m)$. Conform 4.15 și 4.17, teorema rezultă imediat.

Fie A o formulă arbitrară din $N\#$, construită exclusiv din formule de formele $n \in^* m$ și $m^* \in y$ prin intermediul cuantorilor și al conectivelor pentru funcțiile de adevăr. Conform cu 4.14 și 4.18 avem:

4.19. Dacă y nu este liberă în A, atunci $(\exists y)\,(m)\,(m^* \in y \equiv A)$ este teoremă în $N\#$.

O altă teoremă utilă din $N\#$ este următoarea:

4.20. $(j)(j \in^* k \equiv j \in^* m) \supset (k^* \in y \supset m^* \in y)$.

Demonstrație. Să presupunem: $(j)\,(j \in^* k \equiv j \in^* m)$. În consecință, $(j)\,(j \in^* n \equiv j \in^* k) \equiv (j)(j \in^* n \equiv j \in^* m)$. Deci, conform cu 4.16 și 4.17, $k^* = m^*$. Deci $k^* \in y \supset m^* \in y$, și 4.20 este demonstrat.

Pentru a arăta că întregul sistem N' este traductibil în sistemul $N\#$, facem uz de o traducere potrivit căreia traducerea în $N\#$ a unui enunț A din N' se obține din A prin următoarele transformări: (1) Orice formulă din N' de forma $x \in y$ se înlocuiește printr-o formulă din $N\#$ de forma $m \in^* k$, iar cuantorii asociați (x) și (y) se înlocuiesc prin cuantorii (m) și (k); (2) Orice formulă din N' de forma $x \eta Y$ se înlocuiește printr-o formulă din $N\#$ de forma $m^* \in y$ iar cuantorii asociați (x) și (Y) se înlocuiesc prin (m) și (y); (3) Toate conectivele funcții de adevăr rămîn neschimbate.

Ar fi ușor de văzut că traducerea satisface toate condițiile din definiția 2 și definiția 4. Singurul punct care necesită cîteva comentarii pare să fie 4.15, care cere ca toate teoremele din N' să se traducă în teoreme din $N\#$.

Așa cum s-a menționat mai sus, toate traducerile axiomelor $C1-C3$ sînt teoreme în $N\#$. Totodată, traducerile lui $C4$ și $C5$ sînt tocmai 4.19 și 4.20, care fuseseră demonstrate pentru $N\#$. În plus, putem obține în $N\#$ teoria cuantificării pentru variabilele x, y și așa mai departe, și teoria cuantificării pentru variabilele m, n și așa mai departe. Deci toate teoremele din N' se transformă în teoreme din $N\#$, conform traducerii descrise mai sus.

Teorema 7. N' este traductibil în $N\#$.

Prin urmare, conform cu 4.1, avem:

4.21. *$Con(N')$* este derivabil din *$Con(N\#)$* în teoria numerelor; *$Con(N')$* este derivabil din *$Con(N\#)$* în *N'*.

În consecință, avem:

4.22. Dacă N' este consistent, atunci $Con(N\#)$ nu este teoremă a lui N'. Cu alte cuvinte, dacă $Con(N\#)$ este teoremă în N', atunci N' este inconsistent.

O conexiune interesantă ce are loc între N și $N\#$ este formulată în teorema ce urmează.

Teorema 8. Dacă N este ω — consistent, atunci $N\#$ este consistent.

Demonstrație. Să presupunem că $N\#$ este inconsistent. Atunci orice enunț din $N\#$, inclusiv — $Con(N)$, este demonstrabil în $N\#$. Fie A conjuncția axiomelor din N utilizate în cadrul demonstrației pentru — $Con(N)$. Atunci, întrucît $Con(N)$ este unica axiomă din $N\#$ care nu este totodată o axiomă a lui N, avem o demonstrație pentru — $Con(N)$ în $N\#$ care utilizează conjuncția $(A \,\&\, Con(N))$. Deci, conform teoremei deducției, putem demonstra $(A \,\&\, Con(N)) \supset - Con(N)$ în teoria cuantificării din N. În consecință, prin transformări de logică a propozițiilor, $(A \supset - Con(N))$ este și ea o teoremă a teoriei cuantificării. Așadar, $- Con(N)$ este o teoremă a lui N.

Prin urmare, dacă $Pc(n)$ este predicatul aritmetic care exprimă faptul că n reprezintă o demonstrație în N pentru enunțul (să spunem) $0 = 1$, atunci $(\exists n)\ Pc(n)$ este o teoremă în N. Dacă N este inconsistent, atunci *a fortiori* el este și ω — inconsistent. Pe de altă parte, dacă N este consistent, atunci, pentru orice n dat, — $Pc(n)$ este adevărat și deci demonstrabil în N, deoarece este un enunț obținut dintr-un predicat primitiv recursiv prin substituirea unui numeral constant în locul argumentului, iar fiecare enunț adevărat de această formă este demonstrabil în cadrul teoriei numerelor. Dar $(\exists n)\ Pc(n)$ este și ea o teoremă în N. Așadar, N este ω-inconsistent. Combinînd ambele cazuri avem: dacă N este ω-consistent, atunci $N\#$ este consistent.

În consecință, conform cu 4.21, avem:

4.23. Dacă N este ω-consistent, atunci N' este consistent.

Metoda demonstrării consistenței lui N' relativ la $N\#$ se poate aplica și la alte sisteme. Fie S acea parte din teoria mulțimilor a lui Zermelo care este alcătuită din *Aussonderungsaxiom*, axioma de extensionalitate, axioma infinitului și axioma mulțimii putere; fie S' o teorie simplă a tipurilor cu S în calitate de teorie a indivizilor. Dat fiind că, potrivit unui rezultat cunoscut, teoria simplă a tipurilor fundată pe teoria numerelor naturale este traductibilă în S, putem aplica metoda demonstrării consistenței lui N' relativ la $N\#$ demonstrînd:

4.24. Dacă S este ω-consistent, atunci S' este consistent.

Se pot da și alte exemple. Să considerăm, de exemplu, teoria simplă a tipurilor în formularea dată de Gödel. Acest sistem T este fundat pe teoria

numerelor naturale și conține, în plus față de axiomele lui Peano și axioma extensionalității, doar axioma comprehensiunii: Dacă n este un întreg pozitiv și A este o formulă arbitrară din T în care y_{n+1} nu este liberă, atunci $(\exists y_{n+1})\ (x_n)\ (x_n \in y_{n+1} \equiv A)$ este o axiomă a lui T. Este ușor de văzut că această axiomă poate fi înlocuită prin următoarele două principii care, la prima vedere, par să fie mai slabe: (1) Dacă A nu conține nici o variabilă de un tip superior lui $n+1$, atunci $(\exists y_{n+1})\ (x_n)\,(x_n \in y_{n+1} \equiv A)$; (2) Dacă A este o formulă arbitrară din T, în care y_2 nu este liberă, atunci $(\exists y_2)$ $(x_1)(x_1 \in y_2 \equiv A)$. Fie T' sistemul care rezultă din T prin omiterea principiului (2), și să numim acest sistem teoria simplă monotonică a tipurilor. Atunci, putem spune că partea T'_n din T' care nu conține nimic de un tip mai înalt ca n este calculul predicatelor *monotonice* de ordin n, spre deosebire de partea corespunzătoare T_n din T, care formează calculul predicatelor de ordin n. Utilizînd metoda pentru N' și N putem demonstra:

Teorema 9. Dacă T'_2 este ω-consistent, atunci T'_3 este consistent; dacă T'_3 este ω-consistent, atunci T'_5 este consistent; dacă T'_4 este ω-consistent, atunci T'_7 este consistent și așa mai departe.

Numind un sistem regulat atunci cînd știm că el este sau inconsistent, sau ω-consistent, însă că nu poate fi consistent fiind în același timp ω-inconsistent, obținem teorema următoare.

4.25. Dacă T'_2 este consistent și T'_2, T'_3, ..., sînt regulate, atunci T'_3, T'_4, ..., precum și T', sînt consistente.

Prin urmare, într-un anumit sens putem spune că ceea ce face ca un calcul al predicatelor (fundat pe teoria numerelor naturale) de un ordin mai înalt să fie mai tare decît un calcul de un ordin mai coborît este prezența principiului (2) care ne permite să formăm noi clase de numere naturale în calculul predicatelor de ordin mai înalt.

Această metodă nu pare a fi aplicabilă la sistemele T_3, T_4, ... de calcule ale predicatelor în nici o manieră analogă. Într-adevăr, principiul (2) pare a fi mult diferit.

O altă demonstrație a consistenței lui N' relativ la N, precum și a consistenței unor sisteme aflate într-o relație similară, va fi dată în § 5 din cap. XVI. Potrivit unui rezultat al lui McNaughton („Journal of Symbolic Logic", **18**, 1953, pp. 136—144), aceste demonstrații sînt formalizabile în T_3. Rezultă că:

4.26. Pentru orice n, $Con(T'_n)$ este demonstrabil în T_3.

4.27. $Con(T')$ este demonstrabil în T_4 prin inducție asupra lui n în $Con(T'_n)$.

CAPITOLUL XIV
DEMONSTRAŢIA DE CONSISTENŢĂ A LUI ACKERMANN

§ 1. SISTEMUL Z_a

În afara renumitei demonstraţii de consistenţă pentru sistemul Z pe care o dă Gentzen, împreună cu formularea sa specială a calculului predicatelor („Math. Annalen", **112,** 1936, pp. 493—565 şi „Forschungen zur Logik und etc.", nr. 4, 1938, pp. 19—44) mai există alte demonstraţii date de Ackermann („Math Annalen", **117,** 1940, pp. 162—194) şi Schütte („Math. Annalen", **122,** 1951, pp. 369—389). În acest capitol dăm o expunere a demonstraţiei lui Ackermann care cunoaşte anumite aplicaţii interesante.

Formularea lui Ackermann este în mai multe privinţe foarte elegantă. O vom cita in extenso.

Simboluri de bază: 0, $'$, $\dot{-}$, 1, $+$, $\cdot$, $=$, $\sim$, $\supset$, variabilele x, y, etc., ε — operatorii εx, εy etc.

Formule şi termeni: 0 este un termen, o variabilă este un termen, dacă a şi b sînt termeni, atunci a', $a \dot{-} 1$, $a + b$, ab sînt termeni; dacă $A(a)$ este o formulă, $\varepsilon_x A(x)$ etc. sînt termeni; dacă a, b sînt termeni, $a = b$ este o formulă, dacă A, B sînt formule atunci $\sim A$, $A \supset B$ sînt formule.

Există trei grupe de scheme de axiome cu *modus ponens* ca unică regulă de inferenţă. Nici o variabilă liberă nu are permisiunea să apară în axiome sau demonstraţii. În particular, nici o variabilă liberă nu figurează în A şi B în cadrul regulii *modus ponens* (respectiv regula: B în cazul cînd A şi $A \supset B$). Vom spune că un termen sau o formulă sînt închise, dacă nu conţin nici o variabilă liberă; în caz contrar, termenul este deschis (formula este deschisă).

I. Calculul propoziţional.

I1 $p \supset (q \supset p)$.

I2 $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$.

I3 $(\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p)$.

II. Teoria numerelor. Dacă a, b, c, sînt termeni închişi, atunci

II1. $a = a$.

II2. $a' = b' \supset a = b$.

II3. $a \neq 0 \supset (a \dot{-} 1)' = a$.

II4. $a + 0 = a'$.

II5. $a + b' = (a + b)'$.

II6. $a0 = 0$.

II7. $ab' = ab + a$.

II8. $a = b \supset a' = b'$.

II9. $a = b \supset a \dot{-} 1 = b \dot{-} 1$.

II10. $a = b \supset a + c = b + c$.

II11. $a = b \supset c + a = c + b$.

II12. $a = b \supset ac = bc$.

II13. $a = b \supset ca = cb$.

III. ε — operatorul.

III1. $A(a) \supset A(\varepsilon_x A(x))$.

III2. $A(a) \supset \varepsilon_x A(x) \neq a'$.

III3. $\sim A(\varepsilon_x A(x)) \supset \varepsilon_x A(x) = 0$.

III4. $a = b \supset \varepsilon_x A(x, a) = \varepsilon_x A(x, b)$.

Echivalența acestui sistem cu Z are loc în sensul că o teoremă care nu conține simbolul ε este demonstrabilă în Z, dacă și numai dacă este demonstrabilă în Z_a. În ce privește jumătatea „dacă", este suficent să reamintim eliminabilitatea μ — operatorului în Z, precum și posibilitatea identificării lui ε cu μ. În ce privește jumătatea „numai dacă", este necesar doar să deducem principiul inducției matematice din II3, III1 și III2 (Hilbert-Bernays, vol. II, p. 85) și să deducem $(x)(x' \neq 0)$ din definiția lui (x) cu ajutorul simbolului ε prin III2 și III3.

Demonstrația de consistență urmărește să elimine simbolul ε în scopul corelării fiecărei demonstrații cu o succesiune de formule numerice adevărate. Pentru aceasta avem nevoie de un număr de concepte.

1.1. Un ε — termen este un termen care începe cu ε.

1.2. Variabila principală a unui ε — termen $\varepsilon_x A(x)$ este x.

1.3. Un termen b se zice că este subordonat unui termen a, dacă a este un ε — termen, b este o parte proprie a lui a și variabila principală a lui a figurează în b. Rezultă că b este un termen deschis.

1.4. Un termen b se zice că rezidă într-un termen a, dacă b este o parte proprie a lui a, dar nu este subordonat lui a.

Din 1.3 și 1.4 rezultă:

1.5. Dacă a nu este un ε — termen iar b este o parte proprie a lui a, atunci b rezidă în a; dacă a este un ε — termen, și b este o parte proprie a lui a, atunci b sau rezidă în a sau este subordonat lui a, dar nu amîndouă.

1.6. O intrare a unui termen b se zice a fi un constituent direct al unui ε -termen a, dacă (i) el rezidă în a; (ii) nu este subordonat niciunui ε-termen conținut în a; (iii) nu este o parte proprie a nici unui termen care rezidă în a.

De exemplu, dacă a este $\varepsilon_y(x + 2 = \varepsilon_x(y + 1 = z))$, atunci $\varepsilon_z(y + 1 = z)$ și $y + 1$ nu satisfac (i), z nu satisface (ii), x și z nu satisfac (iii). Dar $x + 2$ satisface toate aceste condiții.

1.7. ε-categoria unui ε-termen a, închis sau deschis, se obține din acest termen, substituind variabile libere distincte ce nu apar în a pentru toți constituenții direcți ai lui a. Dacă a nu are nici un constituent direct, el este propria sa ε -categorie. O variantă alfabetică este privită ca aceeași ε-categorie.

De exemplu, $\varepsilon_z(z + \varepsilon_y(y = 3) = z'')$ este propria sa ε-categorie, $\varepsilon_y(u = \varepsilon_z(y + 1 = z))$ este ε-categoria termenului a dat mai sus, precum și a lui $\varepsilon_y(\varepsilon_w(w = 2) + 3 = \varepsilon_z(y + \varepsilon_v(v = 2) = z))$. Aceste ε-categorii ar putea fi tratate ca funcții de variabilele lor libere.

Într-un constituent direct se caută o unitate completă maximă, care poate fi substituită fără a afecta alte părți ale ε-termenului.

1.8. O ε -substituție a unei mulțimi de ε -categorii este o atribuire a unui număr către fiecare ε-categorie închisă a mulțimii și a unei funcții către fiecare ε-categorie deschisă. Numărul sau funcția astfel atribuită unei ε-categorii se spune a fi substituentul acesteia în cadrul ε-substituției respective.

Numărul argumentelor fiecărei funcții este același cu numărul variabilelor libere din ε-categoria inițială. Funcțiile utilizate sînt întotdeauna recursive și de un gen într-adevăr foarte simplu, astfel încît fiecare dintre ele ia valoarea 0, cu excepția unui număr finit de valori ale argumentelor.

1.9. Rezolventul unei mulțimi de formule închise relativ la o ε-substituție a ε -categoriilor sale este rezultatul obținut din aceste formule prin înlocuirea tuturor ε -termenilor prin substituenții lor. Rezolventul relativ la un șir finit de ε -substituții este rezolventul la ultima ε-substituție din șir.

Scopul final este să găsim pentru fiecare demonstrație un șir finit de ε -substituții, astfel încît rezolventul mulțimii de formule din cadrul demonstrației să fie adevărat, adică toate formulele mulțimii rezolvente să fie adevărate. Posibilitatea de a vorbi despre adevărul și falsul formulelor rezolvente rezultă din faptul că întrucît formulele inițiale nu conțin variabile libere, și întrucît toți ε-termenii sînt înlocuiți prin substituenții lor, rezultatele vor fi formule numerice care nu conțin nici un ε-termen (adică nici un cuantor).

În obținerea rezolvenților adevărați, sarcina principală rezidă în obținerea unor substituenți pentru fiecare $\varepsilon_x A(x)$ sau $\varepsilon_x B(x, a)$, astfel încît rezolventul lui $A(\varepsilon_x A(x))$ sau $B(\varepsilon_x B(x, a), a)$ să fie adevărat. Asta înseamnă a face adevărate cazurile lui III 1.

Fiind dată o mulțime finită de formule închise, în particular o demonstrație, considerăm toți ε-termenii care figurează în ea și aranjăm ε-categoriile lor într-un șir, astfel încît dacă un ε-termen a este subordonat unui ε-termen b, atunci ε-categoria lui a precede pe cea a lui b.

1.10. Proprietatea P. O ε-substituție G a unei mulțimi de formule se bucură de proprietatea P, dacă pentru orice ε-categorie din cadrul șirului, să zicem

$\varepsilon_x B(x, y)$ și pentru fiecare numeral n, substituentul lui $\varepsilon_x B(x, n)$ este sau 0 sau un număr pozitiv m, astfel încît $B(m, n)$ este adevărat, însă pentru nici un k, $k < m$, $B(k, n)$ nu este adevărat.

Cu alte cuvinte, dacă G are proprietatea P, atunci rezolventul lui $A(\varepsilon_x A(x))$ poate fi fals numai în cazul cînd substituentul lui $\varepsilon_x A(x)$ este 0.

În treacăt, orice ε-substituție dă substituenți pentru toți ε-termenii în număr infinit care cad sub o ε-categorie a mulțimii, deși numai un număr finit de ε-termeni survin într-o demonstrație.

1.11. Substituentul unei ε-categorii este nul, dacă este 0 sau este o funcție care ia întotdeauna valoarea 0. ε-substituția nulă atribuie fiecărei categorii substituentul nul. Un membru al unui șir de ε-categorii se zice a fi un rînd într-o ε-substituție dacă atît el, cît și toate ε-categoriile următoare obțin substituenți nuli.

Acum vom defini prin inducție un șir de ε-substituții care se bucură toate de proprietatea P, în speranța că putem termina întotdeauna, efectuînd un număr finit de pași, printr-o ε-substituție în care toți rezolvenții formulelor demonstrației inițiale sînt adevărate.

Vom lua în calitate de ε-substituție inițială substituția nulă. Aceasta din urmă se bucură, desigur, în mod banal, de proprietatea P.

Să admitem dată o ε-substituție G, care are proprietatea P, dar rezolventul unei formule din cadrul demonstrației nu este adevărat. Întrucît G are proprietatea P, rezolventul unei axiome poate fi fals numai atunci cînd el este de forma III 1. Să considerăm prima formulă a demonstrației al cărei rezolvent nu este adevărat, să spunem:

$$A(a, b) \supset A(\varepsilon_x A(x, b), b). \tag{1}$$

Să admitem că valoarea lui b, în cadrul lui G, este n, iar cea a lui a este k. Atunci $A(k, n)$ este adevărat, dar $A(0, n)$ este fals, 0 fiind valoarea lui $\varepsilon_x A(x, n)$ în cadrul lui G. Să determinăm primul m, $m \leqslant k$, astfel încît $A(m, n)$ este adevărat în ordinea apariției.

Acum vom defini următoarea ε-substituție. În primul rînd să schimbăm într-un loc substituentul ε-categoriei $\varepsilon_x A(x, y)$, și anume $\varepsilon_x A(x, n)$ este acum m în locul lui 0. Prin aceasta (1) nu devine cu necesitate adevărat, deoarece ε-categoria $\varepsilon_x A(x, y)$ poate fi subordonată celei a lui b, astfel încît, ca urmare a modificării efectuate, b poate obține o valoare diferită de n. Noi însă nu vom face uz de o concluzie atît de tare. Pur și simplu, vom atribui tuturor ε-categoriilor care urmează în șirul inițial lui $\varepsilon_x A(x, y)$ substituentul nul; desigur, această modificare nu este necesară în cazul cînd aceste ε-categorii au obținut deja substituentul nul în G.

Noua ε-substituție are la rîndul ei proprietatea P.

Așadar, întrucît $\varepsilon_x A(x, y)$ nu este subordonat nici unei ε-categorii anterioare, substituenții acestora rămîn neschimbați. Toate ε-categoriile următoare, avînd substituenți nuli, se bucură, în mod banal, de proprietatea P. În ce privește $\varepsilon_x A(x, y)$ însuși, dacă b obține valoarea n ca mai sus, rezolventul lui (1) în noua ε-substituție este adevărat. În caz contrar, dacă de exemplu el capătă acum valoarea j, atunci $\varepsilon_x A(x, j)$ are aceeași valoare ca în G și deci este sau 0 sau cel mai mic număr i, astfel încît $A(i, j)$. În orice caz, noua ε-substituție își mai păstrează proprietatea P.

Problema constă acum în a introduce măsuri adecvate ale ε-substituenților pentru a arăta că progresăm spre scopul final, pe măsură ce continuăm să-i modificăm.

§ 2. DEMONSTRAȚIA DE FINITUDINE

În acest scop ordonăm toți ε-termenii închiși care apar în demonstrația inițială sau în orice mulțime finită de formule, în așa fel încît dacă a rezidă în b atunci a precede b. Să admitem că avem $k+1$ atare termeni: a_0, a_1, ..., a_k.

2.1. Ordinul unei ε-substituții G relativ la mulțimea finită inițială de formule este dată de $2^k\varphi(0) + 2^{k-1}\varphi(1) + \ldots + \varphi(k)$, unde $\varphi(i)$ este 1 sau 0 după cum a_i capătă sau nu substituentul nul în G.

Întrucît substituenții care nu sînt nuli sînt buni în conformitate cu proprietatea P, este de dorit, în general, ca să avem ordine mai coborîte.

2.2. Gradul unei ε-substituții G relativ la o mulțime finită de formule este ordinul acesteia relativ la mulțimea de formule:

$$A(0, n), \ldots, A(k, n). \tag{2}$$

Aici A provine din (1) iar (1) este prima formulă din demonstrația inițială care capătă un rezolvent fals, pe baza lui G, iar a capătă valoarea k în G. Atunci cînd toate formulele obțin prin G rezolvenți adevărați, gradul lui G se consideră că este 0.

2.3. Indexul unei ε-substituții G relativ la o demonstrație este $\omega m + n$ unde m este ordinul iar n este gradul ei.

2.4. O ε-substituție G_j a unei mulțimi finite de ε -categorii este nu mai puțin avansată ca G_i, dacă pentru fiecare substituent pozitiv (adică nenul) al unui ε-termen închis atribuit conform cu G_i, același substituent (pozitiv) este atribuit prin G_j. Dacă mai avem în plus un ε-termen închis care capătă un substituent pozitiv prin G_j, dar un zero substituent prin G_i, atunci G_j este mai avansat decît G_i.

Teorema 1. Dacă G_j nu este mai puțin avansat ca G_i, ambele făcînd parte dintr-o mulțime de ε-categorii care le includ toate acelea ale ε-termenilor dintr-o mulțime finită de formule (nu neapărat o demonstrație), atunci: sau ordinul lui G_j relativ la mulțimea de formule este mai mic decît cel al lui G_i sau substituenții tuturor ε-termenilor închiși din formulele mulțimii sînt aceiași în G_i și G_j.

Demonstrație. Să presupunem că nu toți substituenții sînt aceiași în G_i și G_j. Fie $\varepsilon_x A(x, b)$ primul din ordonarea ε-termenilor închiși definiți mai sus în 2.1. Întrucît b îl precede, substituenții săi în G_i și G_j sînt aceiași, să spunem n. Așadar, $\varepsilon_x A(x, n)$ trebuie să obțină valori diferite prin G_i și prin G_j. Întrucît G_j nu este mai puțin avansat decît G_i, aceasta este posibil numai dacă este 0 prin G_i însă pozitiv prin G_j. Dar atunci, conform 2.1, ordinul lui G_j trebuie să fie mai mic ca cel al lui G_i.

Teorema 2. Dacă G_j nu este mai puțin avansat ca G_i, atunci sau indexul lui G_j relativ la demonstrație este mai mic ca cel al lui G_i, sau G_{j+1} (adică ε-substituția imediat următoare lui G_j prin construcția de mai sus) nu este mai puțin avansată decît G_{i+1} și ele se obțin din G_j și G_i adăugînd aceiași substituenți pozitivi pentru aceiași ε-termeni închiși.

Demonstrație. Dacă ordinul lui G_j este mai mic, aceasta se demonstrează prin 2.3. Altfel, prin T1, toți ε-termenii închiși din cadrul demonstrației obțin aceiași substituenți în G_i și G_j. Să considerăm acum mulțimea de formule (2) de la 2.2 pentru G_i și G_j. Întrucît G_j este de asemenea nu mai puțin avansat ca G_i relativ la această mulțime, urmează că sau ordinul lui G_j relativ la această mulțime — adică gradul său relativ la demonstrația inițială — este mai mic ca cel al lui G_i, sau, conform cu T1, $\varepsilon_x A(x, n)$ trebuie să obțină aceeași valoare pozitivă în G_{i+1} și în G_{j+1}.

2.5. Fiind date o demonstrație, precum și șirul său finit de ε-categorii, rangul unei ε-substituții G relativ la acest șir este numărul de ε-categorii în G, care sînt rînduri (cf. 1.11). Cînd ultima ε-categorie nu este un rînd, atunci rangul este 0. Dacă g este numărul de ε-categorii pentru o demonstrație, atunci rangurile sînt întotdeauna $\leqslant g$.

Dacă ar fi adevărat că G_{i+1} este întotdeauna nu mai puțin avansat ca G_i, astfel încît rangul lui G_{i+1} să nu fie mai mare ca cel al lui G_i, am fi în stare să stabilim consistența destul de simplu; întrucît fiecare ε-substituție nouă corectează cel puțin un substituent am ajunge curînd la un capăt. Dar, așa cum am menționat mai sus, am putea altera ε-categoria lui a, schimbînd substituentul lui $\varepsilon_x B(x, a)$, dacă $\varepsilon_x B(x, y)$, este subordonat la ε-categoria lui a. G_{i+1} poate avea deci un rang mai înalt decît G_i.

Este însă adevărat că în orice șir de ε-substituții definite într-o demonstrație în maniera din § 1, sau rangul lui G_{i+1} este întotdeauna nu mai mare ca cel al lui G_i, sau există un G_i de rang m urmat de un număr finit de ε- substituții de rang $< m$, și atunci un G_{i+k} care este și el de rang $\geqslant m$.

2.6. O m — secțiune de ε-substituții relativ la o demonstrație este un șir de ε-substituții $G_i, \ldots, G_{i+x} (k \geqslant 0)$ astfel încît G_i este de rang $\geqslant m$, $G_{i+1}, \ldots, \ldots, G_{i+k}$ sînt de ranguri $< m$ și sau G_{i+k} este ultima ε-substituție (făcînd adevărați toți rezolvenții) sau G_{i+k+1} este de rang $\geqslant m$.

Întrucît nu avem niciodată o ε-substituție de rang mai mic ca 0, o 0-secțiune are numai un singur termen. Întrucît rangul cel mai înalt este g, numărul de ε-categorii pentru demonstrația respectivă, ε-substituția nulă are rangul g și toate ε-substituțiile ulterioare au ranguri $< g$. Prin urmare, nu trebuie să considerăm decît m-secțiunile pentru $m < g$.

Teorema 3. Dacă $G_1, \ldots, G_k$ și $H_1, \ldots, H_j$ sînt două m-secțiuni consecutive cu indici $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_j$ și H_1 are rangul m, $m < g$, atunci: (i) *H_1 este mai avansat ca G_1*; (ii) *există un număr p, $1 \leqslant p \leqslant k$, $1 \leqslant p \leqslant j$, astfel încît $a_p > b_p$, și pentru toți i, dacă $i < p$ atunci $a_i = b_i$, dacă $1 < i \leqslant p$ atunci G_i și H_i au același rang.*

Demonstrație. Fie $\varepsilon_x A(x, y)$ a $(g - m)$-a ε-categorie, adică a $(m + 1)$-a de la sfîrșit, din șirul inițial. Întrucît $G_2, \ldots, G_k$ sînt de ranguri mai mici

ca m, ei reţin substituenţii în G_1 ai lui $\varepsilon_x A(x, y)$ şi toate ε-categoriile precedente. În consecinţă, H_1 fiind de rang m, trebuie să se obţină din G_k prin acordarea unui nou substituent pozitiv lui $\varepsilon_x A(x, n)$ pentru un numeral n. Deci (i) este demonstrat cînd $1 < k$. Aceasta, în treacăt fie spus, nu înseamnă neapărat că H_1 are un index mai mic decît cel al lui G_1 sau că un nou ε-termen închis obţine un substituent pozitiv. Se poate întîmpla ca exact acelaşi ε-termen închis $\varepsilon_x A(x, b)$ care obţinuse un substituent pozitiv în G_1 să necesite acum un substituent pozitiv diferit, avînd în vedere modificările efectuate în $G_1, \ldots, G_k$.

Dacă H_1 urmează direct lui G_1 atunci, întrucît rangul lui H_1 nu este mai mare ca cel al lui G_1, (i) este din nou adevărat. Deci (i) este demonstrat.

Pentru demonstrarea lui (ii), notăm că dacă $a_1 > b_1$, $p = 1$. Dacă $a_1 = b_1$, atunci trebuie să existe un p, cu $a_p \neq b_p$. Vom admite că nu există un atare p şi vom considera două cazuri diferite. Să presupunem $k > j$. Mai întîi, H_j nu poate fi ultima ε-substituţie, căci în caz contrar, întrucît ea are acelaşi index ca G_j, am fi opriţi la G_j. Dar, conform cu (i), H_j nu este mai puţin avansat ca G_j. Deci, conform T.2, H_{j+1} trebuie să fie nu mai puţin avansat ca G_{j+1}. Dar aceasta este imposibil, întrucît G_{j+1} are un rang mai mic ca m, în timp ce H_{j+1} are un rang nu mai mic ca m.

Să presupunem $k \leqslant j$. Prin ipoteză, G_k şi H_k au acelaşi index. Aşadar, H_1 şi H_{k+1} trebuie să primească acelaşi substituent pozitiv nou. Dar aceasta este imposibil, întrucît H_k, fiind de rang mai mic ca m, îşi păstrează încă constituentul pozitiv introdus la H_1.

Prin urmare, în ambele cazuri, există un p, cu $a_p \neq b_p$. Să luăm primul asemenea p; atunci, toate ε-substituţiile precedente din ambele m-secţiuni dau aceiaşi rezolvenţi şi (ii) este demonstrată.

Extindem acum definiţia indexului la m-secţiuni.

2.7. Indexul unei 0-secţiuni este acelaşi ca indexul unicei ε-substituţii pe care o conţine; indexul unei $(m + 1)$-secţiuni este $\omega^{a_1} + \ldots + \omega^{a_k}$, unde $a_1, \ldots, a_k$ sînt indecşii unui număr finit de m-secţiuni, care la un loc alcătuiesc a $(m + 1)$-a secţiune considerată.

Teorema 4. Fie date două m-secţiuni consecutive, $m < g$, astfel încît prima ε-substituţie a celei de a doua m-secţiuni este de rang m. Fie p un număr oarecare, $0 \leqslant p \leqslant m$, şi fie $a_1, \ldots, a_j$; $b_1, \ldots b_k$ indecşii p-secţiunilor din care sînt alcătuite cele două m-secţiuni, j, $k \geqslant 1$. Atunci există un număr q, astfel încît $a_q > b_q$ şi pentru toţi i, cu $i < q$, $a_i = b_i$.

Demonstraţie. Conform T.3, această teoremă este adevărată, cînd p este 0 şi m este arbitrar. Să admitem că ea este adevărată pentru toţi m mai mici şi pentru toţi p mai mici.

Conform T.3, avem două ε-substituţii corespunzătoare anterioare în cadrul celor două m-secţiuni, astfel încît indexul primei este mai mare ca indexul celeilalte. Întrucît indexul unei ε-substituţii determină rangul acesteia, ele trebuie să aparţină la două p-secţiuni corespunzătoare cu indecşi a_q şi b_q. Dar fiecare dintre aceste două p-secţiuni este alcătuită din una sau mai multe $(p - 1)$-secţiuni. Prin ipoteza inducţiei, $a_q = \omega^{c_1} + \ldots + \omega^{c_v}$, $b_q = \omega^{d_1} + \ldots + \omega^{d_v}$, şi există un cel mai mic c_t, $c_t > d_t$. Aşadar, $a_q > b_q$.

Din această teoremă rezultă consistența lui Z_a, întrucît, fiind dată orice demonstrație, putem scrie toate ε-categoriile ei și putem construi ε-substituțiile în modul descris mai sus. Dacă avem g ε-categorii, atunci ε-substituția inițială G_1 este de rang g. Întrucît toate ε-substituțiile anterioare, dacă în genere există, sînt de rang mai mic, urmează că există o g-secțiune. Întrucît a doua dintre cele două p-secțiuni consecutive într-o $(p+1)$-secțiune are întotdeauna un index mai mic ca prima, nu putem avea decît un număr finit de $(g-1)$-secțiuni. În fiecare $(g-1)$-secțiune putem avea numai un număr finit de $(g-2)$-secțiuni. Deci pentru fiecare demonstrație avem un șir finit de ε-substituții care dă rezolvenți numerici adevărați pentru toate formulele din cadrul demonstrației. Prin urmare, $0 = 1$, de exemplu, nu este o formulă demonstrabilă.

Pentru formalizarea acestei demonstrații am avea nevoie de o inducție transfinită pînă la primul ε-număr cantorian. Prin urmare, dacă considerăm toate demonstrațiile care conțin, fiecare în parte, g ε-categorii sau mai puține, am avea nevoie cel mult de o inducție transfinită pînă la $\omega(g+1)$, unde $\omega(0) = \omega$, $\omega(n+1) = \omega^{\omega(n)}$. Întrucît o ε-substituție izolată are un index de forma $\omega m + n$, o 0-secțiune are un index mai mic decît $\omega(1)$, și în fapt mai mic decît ω^2. Dacă o p-secțiune are un index mai mic decît $\omega(p+1)$, atunci o $(p+1)$-secțiune are un index mai mic decît $\omega(p+2)$. Deci g-secțiunea individuală are un index mai mic decît $\omega(g+1)$. Pentru formalizarea acestui fapt, demonstrăm că orice șir descrescător de numere ordinale mai mici ca $\omega(g+1)$ este finit. Dacă considerăm toate demonstrațiile din Z_a, atunci g nu este mărginit și ne trebuie o inducție prin toate $\omega(0)$, $\omega(1)$ etc., pînă la primul ε-număr. Potrivit celei de a doua teoreme a lui Gödel, o asemenea inducție nu poate fi formalizată în Z_a. Gentzen dă o demonstrație directă a acestui fapt în legătură cu propria sa demonstrație de consistență (vezi „Math. Annalen", **119,** 1943, pp. 140—161).

§ 3. ESTIMĂRI ALE SUBSTITUENȚILOR

Pentru a reproduce în Z_a cît mai mult din acest raționament, reprezentăm numerele ordinale prin numere naturale. Pentru orice $\omega(n)$ se definește prin inducție o bineordonare R_n a numerelor naturale. Astfel, R_0 este ordonarea naturală obișnuită, $R_1(2^a(2b+1)-1, 2^c(2d+1)-1)$ dacă și numai dacă sau $a < c$, sau $a = c$ dar $b < d$. Fiind dat R_p, $p > 0$, dacă $R_p(b_i, b_{i+1})$ și $R_p(c_i, c_{i+1})$, atunci $R_{p+1}(2^{b_1} + \ldots + 2^{b_i} - 1, 2^{c_1} + \ldots + 2^{c_k} - 1)$, dacă și numai dacă $R_p(b_1, c_1)$ sau etc. sau $b_1 = c_1, \ldots, b_j = c_j$, însă $j < k$.

Dar indexul fiecărei m-secțiuni poate fi reprezentat printr-un număr natural; dacă indexul unei m-secțiuni este reprezentat prin a, atunci numărul total de ε-substituții în cadrul m-secțiunii poate fi definit printr-o simplă funcție ordinal recursivă $f(a, m)$:

3.1. $f(a, 0) = 1$, $f(2^{a_1} + \ldots + 2^{a_k} - 1, p+1) = f(a_1, p) + \ldots + f(a_k, p)$.

Am definit gradul, ordinul, rangul unei ε-substituții. Definim acum gradul, ordinul, rangul unei demonstrații într-un alt mod.

3.2. Ordinul unei demonstrații este numărul de ε-termeni închiși pe care îi conține.

3.3. Gradul unui termen închis este 0, dacă acest termen este 0 sau un ε-termen; el este $n + 1$, dacă termenul este de forma a', $a \dot{-} 1$, $a + b$ sau ab, unde a are gradul n sau cel mai mare dintre gradele lui a și b este n. Gradul unei demonstrații este maximul gradelor termenilor închiși în ea.

3.4. Rangul unei demonstrații este numărul de ε-categorii în șirul asociat ei.

Să presupunem dată o demonstrație de grad d și o ε-substituție G. Dacă m este valoarea maximă pe care o poate lua un ε-termen închis pentru G, atunci $b(d, m)$ este valoarea maximă pe care o poate lua orice termen închis:

3.5. $b(0, m) = m$, $b(d + 1, m) = (b(d, m))^2 + 1$.

Aceasta, deoarece cu fiecare mărire în grad nu facem decît să trecem de la $b(d, m)$ la $(b(d, m))'$, $b(d, m) \dot{-} 1$, $b(d, m) + b(d, m)$, $b(d, m) \cdot b(d, m)$, toate fiind mai mici ca sau egal cu $(b(d, m))^2 + 1$.

Întrucît pentru ε-substituția inițială G_1, $m = 0$, valoarea cea mai mare nu depășește $b(d, 0)$. Din modul în care obținem G_{i+1} fiind dat G_i, valoarea maximă la orice substituție G_i este $c(d, i)$ definită de:

3.6. $c(d, 0) = b(d, 0)$, $c(d, i + 1) = b(d, c, (d, i))$.

Rezultă deci că dîndu-se o margine numărului de ε-substituții, se poate obține totodată o margine pentru valorile numerice.

Dacă gradul demonstrației este k, atunci gradul ε-substituției G_i nu este mai mare ca:

3.7. $e(d, i, k) = 2^{(c(d, i) + 1)k}$.

Aceasta, întrucît în șirul $A(0, n)$, ..., $A(j, n)$ de la 2.2, j nu este mai mare ca $c(d, i)$ și fiecare formulă nu conține mai mult decît k termeni.

Partea dificilă constă în a defini o funcție $g(p, i, a)$, care să dea o margine superioară notației ordinale mai mici ca a, care este indexul unei p-secțiuni începînd cu G_i. Să admitem dată funcția g; atunci putem defini $h(p, i, a)$ care dă o margine superioară indexului unei $(p + 1)$ — secțiuni, care începe cu o p-secțiune al cărei prim termen este G_i cu indexul a:

3.8. $h(p, i, a) = 2^a + h(p, i + f(a, p), g(p, i + f(a, p), a))$.

Atît g cît și h sînt de asemenea funcții de d și k (gradul și ordinul demonstrației), deși nu scriem explicit aceste argumente. În fapt, funcțiile g și h sînt definite simultan.

(i) $g(p, i, 0) = 0$. (ii) $g(0, i, 2^b(2c + 1) - 1)$ este $2^b(2c - 1) - 1$, dacă $c \neq 0$ și $2^{b-1}(2e(d, i, k) + 1) - 1$, dacă $c = 0$, $b \neq 0$. (iii) cînd $p > 0$, $a > 0$: (iii a) dacă a este par, $g(p, i, a) = a - 1$; (iii b) dacă a este impar și de forma $2^b - 1$, $g(p, i, a) = h(p - 1, i, g(p - 1, i, b))$; (iii c) dacă a este $2^j + 2^b + \ldots + 2^c - 1$, atunci $g(p, i, a) = 2^j + g(p, i + f(j, p - 1), 2^b + \ldots + 2^c - 1)$.

De îndată ce h este dat, putem uita funcția g și face uz din nou de litera g în calitate de rang al demonstrației și putem scrie din nou funcția h ca $h(d, k, g, i, a)$.

Atunci putem estima numărul total de ε-substituții, dintr-o demonstrație dată din Z_a al cărui grad, ordin, rang este d, repectiv k, g. Putem găsi efectiv șirul ei de ε-substituții și calcula deci indexul $2^a + \ldots + 2^b - 1$ din unica g-secțiune a șirului. Prin urmare, numărul total de ε-substituții $f(2^a + \ldots + 2^b - 1, g)$ nu este mai mare ca: $f(h(d, k, g - 1, 1, a), g)$.

Dar a satisface $R_g(a, t(g-1, k))$, unde $t(0, k) = 2^{k+1}$, $t(p+1, k) = 2^{c(p,k)} - 1$. Deci numărul total al ε-substituțiilor nu este mai mare ca:

3.9. $m(d, k, g) = f(h(d, k, g-1, 1, t(g-1, k)), g)$.

Combinînd aceasta cu 3.7, constatăm că pentru orice demonstrație cu grad, ordin, rang d, k, g date, valoarea numerică maximă utilizată în rezolvenții finali este:

3.10. $c(d, m(d, k, g))$.

Din această situație se pot trage unele consecințe surprinzătoare. În acest scop putem proceda mai direct, formulînd consecințele în notația sistemului echivalent Z.

Teorema 5. Fiind dată o teoremă oarecare de forma $(Ex) \ldots (Ey)\, A(x, \ldots, y)$, *unde* A *nu conține nici un cuantor, putem calcula pe baza demonstrației un număr* p, *astfel încît* $A(j, \ldots, n)$ *are loc pentru unii* $j, \ldots, n$ *dintre care nici unul nu este mai mare ca* p.

Teorema poate fi generalizată direct pentru sisteme care conțin mai multe funcții recursive în calitate de simboluri primitive. Aceasta arată că, în demonstrarea unei teoreme pure de existență, putem obține exemple efective, depunînd o cantitate finită de muncă ce are o margine predeterminată, condiționată de respectiva demonstrație.

O consecință apropiată este:

Teorema 6. Dacă o teoremă $(x)\,(Ey)\, A(x, y)$, A *neconținînd cuantori, este dată în* Z, *putem lua o funcție recursivă* $f(x)$ *de un tip definit (respectiv funcțiile folosite efectiv în definirea lui 3.10, funcțiile ordinal recursive ale lui Ackermann) astfel încît pentru toți* x, $R(x, f(x))$ *este adevărat.*

În acest scop, admitem că d este gradul demonstrației și considerăm demonstrațiile pentru $R(0, \varepsilon_y R(0, y))$, $R(1, \varepsilon_y R(1, y))$, ... Atunci constatăm că trebuie să aibă loc:

$$(x)\,(Ey)\,(y \leqslant c(x + d, b(d, k, g)) \,\&\, R(x, y)).$$

Teorema rezultă deci prin eliminarea cuantorului mărginit y.

Ne putem aștepta ca aceste teoreme să se generalizeze în teoreme mai complexe. Cu toate acestea, Kreisel a arătat că o generalizare directă nu este cu putință și a introdus un program de interpretare (vezi „Journal Symbolic Logic", **16**, pp. 241—267; **17**, pp. 43—58; **23**, pp. 155—182). În paragraful următor vom trece la expunerea unor rezultate obținute de Kreisel.

§ 4. INTEPRETAREA DEMONSTRAȚIILOR NEFINITISTE

Teorema 7. Există teoreme de forma $(x)\,(Ey)\,(z)\, R(x, y, z)$, *unde* R *nu conține cuantori, astfel încît* $(x)\,(z)\, R(x, f(x), z)$ *nu este adevărat pentru nici o funcție recursivă* $f(x)$.

Să considerăm teorema:

$$(3) \qquad (i)\,(Ey)(z)\,(B(y,\ s(i,\ i))\ \vee\ \sim B(z,\ s(i,\ i))).$$

Aici B și s sînt cei utilizați anterior în demonstrarea teoremelor lui Gödel.

Întrucît în Z avem o notație pentru fiecare funcție recursivă, putem lua fiecare funcție recursivă propusă f, demonstrînd că există pentru ea anumite valori ale lui x și z, astfel încît:

$$(4) \qquad B(f(i),\ s(i,i))\ \vee\ \sim B(z,\ s(i,\ i))$$

este fals. Să presupunem că numărul Gödel al formulei

$$(5) \qquad \sim B(f(i),\ s(i,i))$$

este $\bar{p}$. Atunci

$$(6) \qquad \sim B(f(\bar{p}),\ s(\bar{p},\ \bar{p}))$$

este adevărat, deoarece în caz contrar $f(\bar{p})$ ar da o demonstrație a formulei al cărei număr este $s(\bar{p}\cdot\bar{p})$, adică al lui (6) însuși. Pe de altă parte, întrucît (6) este o formulă numerică, ea, fiind adevărată, este demonstrabilă în Z printr-o demonstrație al cărei număr este $\bar{k}$. Deci

$$(7) \qquad B(\bar{k},\ s(\bar{p},\ \bar{p}))$$

este adevărat și demonstrabil în Z. Deci (4) este fals, dacă substituim $\bar{p}$ și $\bar{k}$ pentru i și z.

Un alt exemplu a fost utilizat de către Specker („Journal of Symbolic Logic" **14,** 1949, pp. 145—158). Din punct de vedere clasic, dacă $a(m)$ este un șir monoton mărginit de numere raționale, atunci, pentru toți x, există un y, astfel încît pentru toți z și w, $2^x \mid a(z)-a(w)\mid < 1$, pentru z, $w>y$. Demonstrația obișnuită nu ne permite să ne formăm o idee asupra modului în care y urmează a fi determinat pe baza lui x.

Specker dă atunci un șir recursiv monoton mărginit $a(m)$, astfel încît nu există nici o funcție recursivă f pentru care să aibă loc:

$$(x)\,(z)\,(w)\,(z,\ w > f(x) \supset 2^x \mid a(z) - a(w) \mid < 1).$$

Kreisel utilizează un formalism cu variabile libere F care se obține din Z prin eliminarea tuturor cuantorilor, însă prin adăugarea tuturor funcțiilor ordinal recursive de ordinul k, pentru fiecare k. Cu alte cuvinte, toate funcțiile definibile pe bază de funcții primitiv recursive prin adăugarea unor recursii ordinale de orice ordin k, unde

$$f(0,\ x) = g(x),\ f(m',\ x) = h(x,\ m,\ f(\varphi(m')\ ,x)),$$

g, h, φ sînt funcții date, astfel încît $R_k(\varphi\,(m),m)$, pentru toți m, conform ordonării R_k definită în § 3. Sistemul F conține, totodată, o regulă de inducție transfinită pentru orice ordin k, adică dacă există o funcție φ, atunci $R_k(\varphi\,(m),m)$. Atunci $A(n)$ rezultă din $A(0)$ iar $A(\varphi(m'))\supset A(m')$.

Fiecărei formule A din Z i se asociază efectiv un șir de formule A_1, A_2,... în F, astfel încît:

4.1. Pe o demonstrație pentru A în Z putem citi o demonstrație a unui A_i în F.

4.2. Pe o demonstrație pentru un A_i oarecare în F putem citi o demonstrație pentru A în Z; într-adevăr, întrucît A_i poate fi exprimat în Z, putem demonstra A_i în Z și putem deriva A din A_i în Z.

Teorema 6 poate fi generalizată și modificată cu ușurință, astfel încît să obținem:

4.3. Dacă $(x)(Ey)R(x,y)$ este demonstrabilă în Z, R fiind primitiv recursiv atunci există o funcție ordinal recursivă g de un ordin finit, astfel încît să putem demonstra în F:

$$R(n, g(n)) \,\&\, (m < g(n) \supset \sim R(n, m)). \tag{8}$$

Fie $t(n, x)$ funcția $t_n(x)$, unde t_n este a n-a funcție care este 0, exceptînd un număr finit de locuri de argument într-o enumerare simplă.

Fie formula A din Z, de exemplu, $(Ex)(y)(Ez)C(x, y, z)$.

Să enumerăm toate demonstrațiile din Z care duc la o concluzie începînd cu $(Ex)(y)(Ez)$ urmat de un predicat primitiv recursiv, și fie că a i-a demonstrație de acest fel duce la

$$(Ex)\,(y)\,(Ez)\,D_i(x,\ y,\ z).$$

Atunci putem demonstra, totodată, în Z:

$$(n)\,(Ex)\,(Ez)\,D_i(x,\ t\ (n,\ x),\ x).$$

Prin urmare, conform 4.3, există funcții ordinal recursive a_i, b_i în cadrul unei enumerări, astfel încît:

$$D_i(a_i(n),\ t(n,\ a_i(n)),\ b_i(n))$$

poate fi demonstrat în F.

Dar șirul de formule A_i asociat lui A este pur și simplu că A_i este, pentru $i = 1,\ 2,...$:

$$C(a_i(n),\ t(n,\ a_i\ (n)),\ b_i\ (n)). \tag{9}$$

Dacă A poate fi demonstrată în Z, C trebuie să coincidă cu un D_i și deci A_i, adică (9) este demonstrabil în F pentru un i.

Reciproc, dacă un A_i este demonstrabil în F, el este demonstrabil totodată în Z și putem deduce de aici, de asemenea, în Z, însăși formula A:

În (9), dacă alegem un termen adecvat s, ca la pp. 6—7 din „Math. Zeitschrift", **57**, 1952, putem face:

$$a_i(s) = \mu_x(y)(Ez)C(x,\ y,\ z),$$

$$(t(s,\ a_i(s)) = \mu_y(z) \sim C(a_i(s),\ y,\ z),$$

$$b_i(s) = \mu_z C(a_i(s),\ t(s,\ a_i(s)),\ z).$$

Atunci A rezultă din A_i în Z.

CAPITOLUL XV
SISTEME PARȚIALE DE TEORIA NUMERELOR

§ 1. MODELUL NON-STANDARD AL LUI SKOLEM PENTRU TEORIA NUMERELOR

În acest paragraf rezumăm lucrarea lui Skolem din „Fund. Math"., **23,** 1934, pp. 157—159, *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, 1955, pp 1—14 și rezultatele conexe ale lui Ryll-Nardzewski, „Fund. Math"., **39,** 1952, pp. 239—263.

Conform celebrei teoreme a lui Löwenheim, teoria mulțimilor admite și ea un model aritmetic. Skölem a scos în evidență faptul că aceasta duce la o relativizare a conceptului de mulțime pentru fiecare sistem formal. Dacă cineva vrea să dezvolte aritmetica ca o parte a teoriei mulțimilor, orice definiție a numerelor naturale într-o teorie formală a mulțimilor are o semnificație relativă, astfel încît o interpretare numerabilă (și deci non-standard) a întregului sistem ar oferi totodată o interpretare non-standard a teoriei numerelor naturale. Ținînd seama de aceasta, este firesc să ne așteptăm ca atunci cînd încercăm să caracterizăm șirul numerelor naturale în mod direct printr-un sistem formal, să nu obținem o caracterizare completă. Skolem a reușit să demonstreze că lucrurile stau într-adevăr așa.

Vom utiliza sistemul formal Z. Fiecare formulă este echivalentă cu o formă normală *prenex*, care începe printr-un șir de cuantori, urmați de combinații cu caracter de funcții de adevăr ale unor ecuații. În maniera uzuală, putem elimina conectivele din domeniul funcțiilor de adevăr, de exemplu, prin următoarele relații.

1.1. $a \neq b$ prin $(Ex)\,((a = x\ +b) \vee (b = a + x))$.

1.2. $(a = b) \vee (c = d)$ prin $ad + bc = ac + bd$.

Atunci, putem înlătura toți cuantorii și înlocui toate variabilele atașate unor anumiți cuantori prin funcții sau ε — termeni. Sistemul obținut nu mai conține cuantori, ci doar ecuații cu variabile libere. Să numim acest sistem Z_1.

Enumerăm toate funcțiile de un singur argument, adică toți termenii care conțin o variabilă liberă:

(1) $$f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots$$

Fie M_1, M_2, M_3 submulțimile respective ale mulțimii N a numerelor naturale pentru care

$$f_1(t) < f_2(t), \quad f_1(t) = f_2(t), \quad f_1(t) > f_2t).$$

Fie N_1 submulțimea M_i cu cel mai mic indice inferior care este infinit. Desigur, cel puțin una dintre submulțimile M_1, M_2, M_3 trebuie să fie infinită. Aceasta determină dacă

$$f_1 < f_2, \quad f_1 = f_2, \quad f_1 > f_2.$$

Printre infinitatea de membri ai mulțimii infinite N_1, trebuie să existe cel puțin o submulțime infinită pentru care fiecare membru are o aceeași relație între $f_1(t)$ și $f_3(t)$ și o aceeași relație între $f_2(t)$ și $f_3(t)$. De exemplu, dacă N_1 este M_1, atunci pentru fiecare t în N_1 are loc cel puțin una dintre următoarele relații:

$$f_3(t) < f_1(t) < f_2(t), \quad f_3(t) = f_1(t) < f_2(t), \quad f_1(t) < f_3(t) < f_2(t),$$
$$f_1(t) < f_3(t) = f_2(t), \quad f_1(t) < f_2(t) < f_3(t).$$

Sînt date astfel cinci submulțimi ale lui N_1 și alegem prima submulțime infinită în calitate de N_2.

Acest proces se continuă astfel, încît obținem un șir infinit de submulțimi infinite ale lui N de mărime monoton necrescătoare. În acest mod este definită o ordonare a funcțiilor din (1).

Fie $g(i)$ cel mai mic membru al lui N_i; avem atunci:

Teorema 1. Pentru orice pereche a, b, între $f_a(g(t))$ și $f_b(g(t))$ are loc aceeași relație $<$, $=$, sau $>$ pentru toți $t >$ $\max(a, b)$; *această relație fiind totodată relația de ordine dintre f_a și f_b. Funcția $g(t)$ este monoton nedescrescătore. În particular, dat fiind că în (1) apar toate constantele, respectiv funcțiile care au întotdeauna o aceeași valoare, $g(t)$ nu este mărginită.*

Este ușor de văzut că relațiile $=$ și $<$ astfel definite pe șirul (1) se bucură de proprietățile uzuale ale acestor relații. Considerăm acum orice clasă de echivalență drept un număr non-standard, iar relația de ordine definește un șir N^* de un tip de ordine mai înalt decît N. Printre aceste clase de echivalență, apar și numerele constante fiecare, în altă clasă de echivalență, relativ la relația de ordine corectă. Reinterpretînd toate variabilele libere ale lui Z_b ca definite pe N^* și nu pe N, putem vedea că toate teoremele lui Z_f ar fi adevărate în noua interpretare. Cu alte cuvinte, dacă în teoremele din Z înlocuim variabilele definite pe N^* cu variabile definite pe N rezultatele sînt adevărate. Aceasta se poate verifica, de exemplu, pentru 1.2 și pentru principiul inducției.

Teorema 2. Sistemul admite un model care nu este izomorf modelului standard, iar tipul de ordine al numerelor non-standard este mai mare ca ω.

Se poate observa că raționamentul este în egală măsură aplicabil la sisteme parțiale ale lui Z. Deși modelul definit mai sus nu este constructiv, aceeași metodă se poate aplica la fragmente slabe ale teoriei numerelor, în vederea obținerii unor modele non-standard efective transparente. Skolem însuși

a dat cîteva exemple simple. Probleme conexe mai sînt studiate și de către Hasenjaeger, în „Journal of Symbolic Logic", **17**, 1952, pp. 81—97.

O aplicare într-o direcție diferită a fost efectuată de către Ryll-Nardzewski. Acesta ia sistemul Z și elimină toate cazurile schemei inducției matematice, cu excepția unui număr finit de cazuri speciale. Pentru orice asemenea sistem parțial S, el demonstrează — recurgînd la modelul lui Skolem — că există un caz al schemei de inducție ce nu este deductibil în cadrul sistemului.

Teorema 3. Nu există nici o mulțime finită de teoreme ale lui Z (și în fapt, nici o mulțime finită de formule adevărate în cadrul modelului standard al lui Z), din care să putem deduce, pe baza calculului predicatelor, toate axiomele lui Z.

Să presupunem dat un atare sistem parțial S. Pentru ca acest sistem să fie în genere adecvat, el trebuie să cuprindă diversele chestiuni speciale luate din Z, de care vom face uz mai jos. Admitem că, la fel ca mai sus, cuantorii sînt îndepărtați.

Avem numai un număr finit de axiome pe lîngă cele ale calculului predicatelor, iar în aceste axiome figurează numai un număr finit de funcții $f_1, \ldots, f_k$. Acestea sînt luate ca funcții de bază.

În S putem defini pentru termenii arbitrari a și b din S un predicat care spune:

1.3. b este de ordin i relativ la a și $f_1, \ldots, f_k$ sau, pe scurt, b este un al i-ilea descendent al lui a: a este propriul său prim-descendent; b este un al $(n+1)$-lea descendent al lui a, dacă a este $f_i(c, \ldots, d)$ și cel puțin unul din $c \ldots, d$ este un al n-lea-descendent al lui a, dar nici unul dintre aceștia nu este de ordin mai mare ca n relativ la a și $f_1, \ldots, f_k$.

În plus, este ușor să definim o relație R, astfel încît:

1.4. $R(x, y, z)$ dacă și numai dacă x este cel mult de ordin y relativ la z și $f_1, \ldots, f_k$.

Fie $\varphi(y)$ formula că pentru fiecare z există un t, astfel încît pentru toți x, dacă x este de ordin nu mai mare ca y relativ la z și $f_1, \ldots f_k$, atunci $x \leqslant t$:

1.5. $\varphi(y)$ este $(z)(Et)(x)(R(x, y, z) \supset x \leqslant t)$.

Atunci se pot demonstra în S:

1.6. $\varphi(1)$.

1.7. $\varphi(y) \supset \varphi(y+1)$.

Totuși concluzia

1.8. $\varphi(y)$

nu este demonstrabilă în S.

Să presupunem dat un model Skolem N^* pentru S. Clasele de echivalență conținînd numerele naturale standard formează numai un segment inițial al lui N^*. Fie w un element arbitrar al lui N^* care nu se numără printre cele de mai sus. Atunci, toți descendenții lui w determină un model al lui S. Atunci pentru orice număr natural n, clasa de echivalență (n) satisface relația:

$$(n) < w.$$

Dacă $\varphi(w)$ este adevărat, atunci, conform 1.5, există un c,

(2) $$(d)\ (R(d,\ w,\ w) \supset d \leqslant c).$$

Dar succesorul c^* al lui c din model poate fi obținut din w, în calitate de descendent, să zicem în calitate de un al k-lea-descendent. Așadar, $R(c^*, w, w)$, ceea ce contrazice (2) . Deci teorema 2 este demonstrată.

Pare posibil să utilizăm același procedeu pentru demonstrarea unui rezultat ceva mai puternic, și anume că nu putem deriva toate axiomele lui Z din nici o mulțime consistentă finită de formule din Z. Prin urmare, fiind dată o atare mulțime pe care o putem scrie ca o singură formulă A, una din două: sau nu toate teoremele lui Z sînt derivabile din A sau, dacă nu, putem efectua construcția lui Ryll-Nardzewski, obținînd astfel un caz al schemei de inducție care este derivabil în Z, dar nu este derivabil din A, dacă A este o formulă consistentă. Prin urmare, dacă toate teoremele sînt derivabile din A, A trebuie să fie inconsistentă.

Între rezultatul lui Skolem și prima teoremă a lui Gödel se constată o anumită legătură. Conform teoremei lui Godel, putem obține un model non-standard al lui Z. Reciproc, putem totodată extinde procedeul lui Ryll-Nardzewski, spre a găsi o propoziție indecidabilă a lui Z prin modelul Skolem. Așadar, procedeul de mai sus depinde de posibilitatea enumerării tuturor termenilor lui S în cadrul lui Z. Dacă S este însuși Z, enumerarea nu mai poate fi efectuată direct în Z, dar putem efectua o enumerare indirectă pe baza predicatului demonstrație. Vezi și cap. II, § 5, mai sus.

§ 2. UNELE APLICAȚII ALE DEMONSTRAȚIILOR FORMALIZATE DE COMPATIBILITATE

În acest paragraf expunem articolul lui Kreisel și al autorului acestei cărți („Fund. math"., **42,** 1955, pp. 101—110; **45,** 1958, pp. 334—335).

Considerăm sisteme parțiale F ale lui Z și Z_a care se obțin din acestea din urmă prin suprimarea demonstrațiilor care sînt prea „complexe". Vom demonstra consistența unor atare sisteme F în Z și Z_a; s-ar putea demonstra că F este mai slab, deoarece o formulă care exprimă consistența lui nu poate fi demonstrată în cadrul lui F însuși. Vom desemna o atare formulă prin $Con(F)$: se subînțelege că formula aleasă satisface condiții suficiente pentru a asigura aplicarea celei de a doua teoreme a lui Gödel.

Pentru prima măsură a complexității, utilizăm rangul unei demonstrații în Z_a, adică numărul ε — categoriilor.

2.1. Sistemul Z_a^n: o demonstrație a lui Z_a a de rang $\leqslant n$ este o demonstrație în Z_a^n.

2.2. Pentru orice număr întreg n, $Con(Z_a^n)$ este o teoremă a lui Z_a.

Aceasta rezultă direct din demonstrația de consistență a lui Ackermann întrucît, oricare ar fi n, în Z_a, se poate demonstra inducția transfinită pînă la $\omega(n)$.

O a doua măsură a complexității se obține din definiția adevărului pentru Z, dată la Hilbert-Bernays, vol. II.

2.3. Sistemul $Z^{(n)}$: o demonstrație din Z ale cărei formule sînt toate de tip $\leqslant n$, (adică dacă construim în fiecare formulă un graf de cuantori guvernați de un cuantor dat, succesiunea maximă este întotdeauna de lungime $\leqslant n$), este o demonstrație în $Z^{(n)}$.

2.4. Pentru orice n, $Con(Z^{(n)})$ este teoremă a lui Z.

Pentru a demonstra aceasta trebuie să modificăm întrucîtva definiția adevărului.

Presupunem că am ales definiții „naturale" ale următorilor termeni și predicate sintactice.

$\eta_1^{(m)}(n), \ldots, \eta_m^{(m)}(n)$ ca la Hilbert-Bernays II, p. 235.

$\rho\ (m, a, n)$ este numărul formulei obținute din A (cu numărul a) prin înlocuirea în A a variabilei v_i unde $i \leqslant m$, cu $\eta_i^{(m)}(0^{(n)})$ și a variabilei v_j, cu $j > m$, cu 0. Nu se presupune că toți v_i, cu $i \leqslant m$, figurează în A. Toate variabilele ce le vom utiliza în cadrul demonstrațiilor vor fi v_1, v_2, v_3 etc. În mod banal, dacă A este o formulă închisă, $\rho(m, a, n) = \rho(0, a, 0)$. ($v_i$ sînt variabile libere).

$P(a, b)$, dacă și numai dacă a este o demonstrație numerică a formulei b (adică o demonstrație în calculul elementar, în care nu intervine nici o variabilă). Reamintim faptul că se poate demonstra în Z consistența aritmeticii numerice.

Dacă a și b sînt numere ale lui A și B, atunci $t(a, b)$ este numărul lui $A|B$.

$U(a)$, dacă și numai dacă a este numărul unei formule de forma $(x)B(x)$, și atunci $s[u(a), y]$ este numărul lui $B(0^{(y)})$.

În mod similar, $Q(a)$, dacă și numai dacă a este numărul unei formule de forma $(Ex)B(x)$, iar atunci $s\ [q(a), y]$ este numărul lui $B(0^{(y)})$.

Pentru fiecare k se poate da o definiție a adevărului $T_k(b)$ prin intermediul unei formule din Z ce satisface următoarele condiții (compară *ibidem* p. 334):

$$T_0[\rho(m, a, n)], \text{ dacă și numai dacă } (Ey)\ P[y, \rho(m, a, n)]$$

sau

$$(Ex)\,(Ey)\,\{x < \rho(m, a, n)\ \&\ y < \rho(m, a, n)\ \&\ \rho(m, a, n) = t(x, y)\ \&\ [T_0(x) \mid T_0(y)]\};$$

$$T_{k+1}[\rho(m, a, n)], \text{ dacă și numai dacă } T_k[\rho(m, a, n)]$$

sau

$$\{U[\rho(m, a, n)]\ \&\ (y)\ T_k[\rho(m, s(u(a), y), n)]\},$$

sau

$$\{Q[\rho(m, a, n)]\ \&\ (Ey)\,T_k[\rho(m, s(q(a), y), n)]\},$$

sau

$$(Ex)(Ey)\{x < \rho(m, a, n)\ \&\ y < \rho(m, a, n)\ \&$$
$$\&\ \rho(m, a, n) = t(x, y)\ \&\ [T_{k+1}(x) \mid T_{k+1}(y)]\}.$$

Se poate verifica în maniera uzuală că $T_k(b)$ este o definiție normală a adevărului și deci că în Z se poate demonstra $Con\,(Z^{(k)})$. Să observăm că $T_n(b)$ este o definiție a adevărului numai pentru sistemul $Z^{(n)}$ și nu și pentru Z în particular, n nu este o variabilă liberă.

Trebuie remarcat că demonstrația de consistență din 2.4 este susceptibilă de diverse extinderi; de exemplu, dacă 3 este o extindere a lui Z printr-un

principiu de inducție transfinită, obținem în 3 o demonstrație de considerații pentru $3^{(n)}$.

Fie F un sistem compus din calculul predicatelor și o singură formulă închisă A ca axiomă.

TEOREMA 4. Dacă F este consistent, există o teoremă a lui Z care nu poate fi demonstrată în cadrul lui F.

Fie k tipul lui A, în genere numărul cuantorilor distincți ai acestei formule. Dacă $\sim Con(F)$, există o demonstrație în calculul predicatelor pentru $\sim A$. Conform teoremei lui Herbrand, $\sim A$ poate fi demonstrată printr-o demonstrație în care fiecare formulă este de tip $\leqslant k$. Prin urmare, $\sim A$ poate fi demonstrată în $Z^{(k)}$. Așadar, conform definiției normale a adevărului pentru Z^k, putem demonstra în Z: $\sim Con(F) \supset \sim A$. În consecință, este teoremă a lui Z:

$$A \supset Con(F). \tag{1}$$

Dacă F conține toate teoremele lui Z, condițiile de deductibilitate în vederea aplicării celei de a doua teoreme a lui Gödel ar fi aplicabile la F, întrucît am presupus predicatul „natural" demonstrație al lui F; mai departe, formula (1) și deci $Con(F)$ ar fi teoreme în F și F ar fi inconsistent.

Pe baza acestei demonstrații este posibil să dăm efectiv pentru orice sistem consistent dat F o teoremă a lui Z care nu poate fi demonstrată în F.

Acest rezultat, precum și rezultatul din paragraful precedent arată că avem o infinitate de axiome care nu se pot reduce la un număr finit. Kleene demonstrează, în „Memoirs of Am. Math. Soc.", nr. 10, 1952, pp. 27—68, că dacă introducem simboluri de predicate auxiliare, este întotdeauna posibilă o asemenea reducere.

Aceste considerente se pot aplica și în analiza rezultatului obținut de Gödel privitor la lungimea demonstrațiilor. („Ergebnisse Math. Kolloquiums", **7**, 1936, pp 23—24). Așadar, întrucît $Con(Z^{(n)})$ este demonstrabil în Z, dar nu este demonstrabil în $Z^{(n)}$, există o formulă $(x)C(x)$, demonstrabilă în Z, dar nu în $Z^{(n)}$, deși $C(1)$, $C(2)$,..., sînt demonstrabile, fiecare în parte, în $Z^{(n)}$. Rezultă că pentru o constantă mare k am avea nevoie de o demonstrație de lungime nelimitată pentru a demonstra $C(k)$ în $Z^{(n)}$, cu toate că în Z această formulă este întotdeauna o consecință imediată din $(x)C(x)$.

Avînd în vedere 2.2. și 2.4, măsura lungimii sau complexității unei demonstrații ne este dată mult mai ușor prin rangul și tipul unei demonstrații, adică prin numărul ε — categoriilor sau prin numărul de cuantori distincți.

TEOREMA 5. Dacă lungimea unei demonstrații din Z_a se măsoară prin numărul ε — categorilor sale și dacă F' este o extindere a lui Z_a în care $Con(Z_a)$ este teoremă, atunci pentru orice n, $Con(Z_a^n)$ poate fi demonstrat în F' prin demonstrații de lungime mărginită, dar cea mai scurtă demonstrație a sa în Z_a este mai lungă ca n. Similar, dacă utilizăm tipul în calitate de măsură a lungimii, o teoremă analogă are loc pentru Z și teoremele $Con\ (Z^{(n)})$.

În sfîrșit, conform lemei lui Bernays, fiecare sistem S este traductibil în Z_a, respectiv Z plus o nouă axiomă $Con(S)$. Pentru sistemele cu un număr finit de axiome putem demonstra și reciproca:

Teorema 6. Dacă un sistem finit de axiome F este traductibil în Z, atunci Con (F) poate fi demonstrat în Z.

Să admitem că traducerea axiomei A din F este teorema B din Z. Dacă $\sim Con(F)$, ar exista o demonstrație a lui $\sim F$ în calculul predicatelor și deci o demonstrație a lui $\sim B$ în $Z^{(m)}$ pentru un număr fixat m, care este tipul lui A. Avem deci în Z, $\sim Con(F) \supset \sim T_m(b)$, b fiind numărul lui B.

Întrucît $T_m(a)$ este o definiție normală a adevărului, $\sim T_m(b) \supset \sim B$. Avem deci în Z: $B \supset Con(F)$. $Con(F)$ este deci o teoremă în Z.

partea a patra
TEORIA IMPREDICATIVĂ A MULȚIMILOR

CAPITOLUL XVI
DIFERITE SISTEME DE AXIOME

§ 1. PARADOXELE

În acest capitol vom descrie un număr de sisteme bine cunoscute de teoria mulțimilor ca bază generală pentru capitolele ulterioare și vom menționa un număr de rezultate standard în acest domeniu. Pentru expunerea sistematică a teoriei axiomatice a mulțimilor, lucrările standard sînt articolele lui Bernays în „Journal of Symbolic Logic" (pînă acum au apărut șapte părți — din 1939 pînă în 1954), monografia lui Gödel din 1940 asupra consistenței ipotezei continuului, precum și noua carte a lui Bernays *Axiomatic Set Theory* (1958, Amsterdam). Printre trecerile în revistă se numără un succint expozeu al lui Mc. Naughton și al autorului (*Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles*, 1953, Paris), și un expozeu mai detaliat al lui Fraenkel și Bar-Hillel (*Foundations of Set Theory*, 1958, Amsterdam).

Sistemele ce urmează să fie descrise sînt teoria ZF a lui Zermelo-Fraenkel, teoria NB a lui Bernays, teoria simplă a tipurilor T, sistemele lui Quine NF și ML (ultimul fiind corectat de către autor), un sistem de tipuri negative NT, sistemul lui Frege, sistemul lui Ackermann și mai multe subsisteme ale lui ZF și NB. Sistemul G, teoria mulțimilor finite (teoria generală a mulțimilor) se obține din ZF prin omiterea axiomei infinitului. Sistemul P, teoria predicativă a mulțimilor numerice, se obține din NB prin eliminarea axiomei infinitului. Sistemul Q, teoria impredicativă a mulțimilor numerice, se obține din ZF prin eliminarea axiomei mulțimii putere. Sistemul R, teoria predicativă a mulțimilor de numere reale, se obține din NB prin omiterea axiomei mulțimilor putere. Mai mult de jumătate din restul capitolelor acestei cărți tratează asemenea sisteme parțiale de teoria mulțimilor care sînt adesea descrise și denumite în moduri oarecum diferite.

În paragraful de față vom trece în revistă cîteva paradoxe binecunoscute care, din punct de vedere istoric, au apărut în strînsă legătură cu dezvoltarea teoriei axiomatice a mulțimilor. Pare indicat să spunem că există tendința generală de a se exagera consecințele acestor paradoxe. Uneori se trece cu vederea că în teoria clasică a mulțimilor există o cantitate de date intuitive care fac construcția sistemelor de teoria mulțimilor mai puțin arbitrare decît s-a pretins adesea. Problema nu este de a experimenta procedee care dau într-un fel sau altul un randament mare și totuși, după cum știm, nu generează contradicții. De exemplu, ZF și NB au modele intuitive care, deși nu oferă demonstrații formale de consistență, ne fac să ne simțim mai familiari în cazul lor decît în cazul sistemelor NF și ML.

Făcînd abstracție de succesiunea istorică a evenimentelor, putem dezvolta foarte bine teoria axiomatică a mulțimilor în cadrul lui ZF sau NB, fără a discuta antinomiile logico-matematice. Cu toate acestea, vom considera antinomiile datorită interesului intrinsec pe care-l prezintă și forței lor de sugestie.

În jurul anului 1900, s-a constatat că moduri de raționament aparent similare celor uzitate în demonstrațiile lui Cantor pentru existența unor mulțimi nenumărabile, duc la contradicții. În 1897, Burali-Forti a publicat paradoxul cunoscut de atunci sub numele său. Astfel, în teoria lui Cantor, dacă ordonăm după mărime toate numerele ordinale mai mici ca un număr ordinal dat α, atunci numărul ordinal al mulțimii bine ordonate care rezultă este α. Să considerăm acum mulțimea bine ordonată S a tuturor numerelor ordinale dispuse după mărime. Dacă numărul ei ordinal este W, atunci orice număr ordinal în cadrul mulțimii date este mai mic decît (și în consecință diferit de) W, fapt care contrazice ipoteza că S conține toate numerele ordinale. Așadar, avem o contradicție. Un paradox înrudit este cel al lui Cantor cu privire la cel mai mare număr cardinal. Un paradox mai surprinzător este cel al lui Russell asupra mulțimii tuturor mulțimilor care nu își aparțin, paradox descoperit în iunie 1901. Fie K acea mulțime. Dacă K nu aparține lui K atunci, conform definiției lui K, K aparține lui K; dacă K aparține lui K atunci, conform definiției lui K, K nu aparține lui K. Acest paradox a fost descoperit în mod independent și de către Zermelo înainte ca descoperirea lui Russell să fi fost publicată în 1903 (a se vedea articolul lui Zermelo din 1908 despre axioma alegerii).

Descoperirea acestor paradoxe este considerată uneori ca un eveniment major, care a dus la criza modernă în matematică. Într-adevăr, așa cum se remarcă adesea, Frege a admis că paradoxul lui Russell subminează fundamentele operei sale de o viață de construire a aritmeticii pe baza teoriei mulțimilor (a se vedea *Appendix* la Frege, *Grundgesetze*, vol. II, 1903, datat octombrie 1902). Dedekind s-a abținut să scoată o nouă ediție a lucrării sale în care abordează conceptele și principiile aritmeticii din punctul de vedere al teoriei clasice a mulțimilor (Dedekind, 1888), iar cînd în 1911 a publicat, în sfîrșit, a treia ediție a cărții sale, el recunoaștea în noua prefață că evoluția înregistrată de la apariția ediției a doua (1893) pînă în clipa aceea punea întrucîtva sub semnul întrebării fundamentele teoriei sale. Pe de altă parte, numeroși matematicieni eminenți au jubilat (de exemplu, Poincaré, „La logistique n'est plus stérile; elle engendre la contradiction!") la apariția paradoxelor sau nu le-au acordat nici o atenție.

Cantor însuși care, în treacăt fie zis, spre deosebire de Frege și Dedekind, nu s-a interesat niciodată de problema justificării teoriei numerelor naturale pe baza teoriei mulțimilor, nu a părut să fie prea tulburat. El descoperise în 1895 un raționament similar celui folosit în paradoxul lui Burali-Forti și îl comunicase lui Hilbert în 1896 (a se vedea Bernstein 1905, „Math. Annalen", **60**) dar nu considera acest raționament ca un impediment serios pentru teoria mulțimilor pe care o construise. În scrisorile sale către Dedekind (1899), el făcea distincție între varietăți care sînt în același timp unități (mulțimile) și acelea care nu pot fi concepute necontradictoriu ca unități („varietățile contradictorii"). Ansamblul tuturor numerelor ordinale este un exemplu de al doilea gen (a se vedea Cantor, *Opere alese*, pp. 443—450). După cum se pare, el considera că această distincție

este intrinsecă teoriei mulțimilor și adecvată pentru rezolvarea paradoxelor; el blama pe acei care vorbesc despre paradoxe, trecînd cu vederea această distincție naturală. Potrivit lui Young (a se vedea Young, 1929, „*Math. Gazette*", **14**, 98), Cantor a atacat în 1907 articolul lui Burali-Forti, criticînd faptul că autorul nu a înțeles just conceptul de mulțime bine ordonată.

Aceste paradoxe au dus la încercări de axiomatizare a teoriei mulțimilor. Este destul de interesant faptul că în prezent există mai multe sisteme standard de teoria mulțimilor, care păstrează demonstrații analoge celor date de Cantor însă, după cîte știm, exclud contradicții în aparență similare. Cunoașterea noastră în această materie este atît de limitată, încît există o mare prăpastie între ceea ce știm că este consistent și ceea ce știm că este contradictoriu.

Această lipsă de informație este prețuită de cei ce adoptă un punct de vedere constructiv. Regiunea constructivului este cunoscută a fi consistentă și aceștia privesc domeniul exterior ei ca o fantezie străină înțelegerii științifice.

La Russell, în 1906, există o discuție interesantă a metodelor posibile de evitare a paradoxelor. Russell distinge trei căi posibile: (1) teoria zigzag; (2) teoria limitării volumului; (3) teoria fără clase. Russell însuși preferă să elaboreze teoria fără clase, care este înrudită îndeaproape cu abolirea mulțimilor impredicative. Sistemul lui Zermelo (1908) poate fi considerat ca o teorie a limitării volumului. Astfel, un termen de mulțime sau o funcție propozițională poate defini o mulțime, numai dacă extensiunea sa nu este „prea mare". Ulterior, von Neumann (1929) precizează această noțiune ca însemnînd: o extensiune nu este prea mare atunci și numai atunci cînd nu este echivalentă cu universul tuturor mulțimilor. Dacă dorim, putem considera și sistemul lui Quine NF ca un exemplu de teorie zigzag.

Ar fi interesant, poate, să comparăm în linii mari aceste metode, precum și alte metode propuse în vederea evitării paradoxelor.

Să considerăm din nou paradoxul lui Russell. Fie K mulțimea desemnată de expresia $\hat{x} \sim (x \in x)$. Prin însăși natura mulțimilor, avem:

$$(1) \qquad \begin{cases} x \in \hat{x} \sim x \in x \equiv \sim x \in x \\ x \in K \equiv \sim x \in x. \end{cases}$$

Dacă substituim K în locul lui x în cadrul lui (1), avem

$$(2) \qquad K \in K \equiv \sim K \in K.$$

Conform legii terțului exclus,

$$(3) \qquad K \in K \vee \sim K \in K.$$

Dacă $K \in K$ atunci $\sim K \in K$ conform lui (2); dacă $\sim K \in K$, atunci $K \in K$ conform lui (2). În orice caz, $K \in K \,\&\, \sim K \in K$. Așadar, conform lui (3), avem

$$(4) \qquad K \in K \,\&\, \sim K \in K,$$

ceea ce constituie o contradicție.

Pentru a evita acest paradox putem urma mai multe căi. Este interesant să notăm că fiecare cale a fost urmată de cineva.

În cadrul teoriei tipurilor simple, este lipsit de sens să spunem că o mulțime își aparține, astfel încît nu există nici o formulă deschisă (funcție propozițională) pentru exprimarea proprietății de neapartenență la sine. În teoria ZF a lui Zermelo sau în teoria NF a lui Quine avem o formulă deschisă cu sens '$\sim x \in x$', însă nu este permis s-o folosim pentru definirea unei mulțimi. În NB este posibil să demonstrăm că formula deschisă '$\sim x \in x$' definește colecția universală (cu alte cuvinte, '$(x) \sim x \in x$' este teoremă), însă colecția universală nu este o mulțime.

O metodă diferită constă în a permite o mulțime K definită prin $\hat{x} \sim (x \in x)$ și să admitem (1) și (2), refuzînd însă să admitem (3). Aceasta se înfăptuiește prin stipularea faptului că deși există o mulțime K, K este de un fel special, încît nici $K \in K$ nici $\sim K \in K$ nu trebuie să fie adevărate. Cu alte cuvinte, legea terțului exclus nu se aplică la propoziția '$K \in K$'. În consecință, derivarea contradicției (4) eșuează. Această abordare este folosită în Skolem 1929 (p. 20) pentru un sistem rudimentar și de asemenea de către Fitch în cartea sa din 1952, cu aplicare la un sistem formalizat în mod minuțios.

Recent, Shen a introdus mai multe alte paradoxe ale teoriei mulțimilor (*J. Symbolic Logic*, **18**, 1953, 114): paradoxul clasei tuturor claselor fundate, cel al clasei tuturor claselor necirculare, cel al clasei tuturor claselor nonnecirculare. Acesta din urmă constituie o generalizare a paradoxului lui Russell observată anterior și de către Quine (*Mathematical Logic*, p. 130).

O mulțime x pentru care există un șir infinit de mulțimi y, z etc. (nu neapărat distincte toate între ele), astfel încît $\ldots \in z \in y \in x$ se spune că este nefundată. Fie K mulțimea tuturor mulțimilor fundate, adică a tuturor mulțimilor care nu sînt nefundate. Dacă K este nefundată, atunci există un șir y, z etc., astfel încît $\ldots \in z \in y \in K$. Atunci y ar fi de asemenea nefundată. Însă $y \in K$, și ca atare este fundată. În consecință, K trebuie să fie fundată. Dar atunci $K \in K$ și avem $\ldots \in K \in K \in K$. Așadar, K este, la rîndul său, nefundată.

După cum vom vedea în paragraful următor, în ZF există o axiomă care exclude asemenea mulțimi, încît K ar fi mulțimea universală, dacă în ZF ar exista o mulțime universală. Sau, altfel spus, K este un nonelement (o clasă) dar nu un element (o mulțime) în NB.

O mulțime x_1 este n-circulară, dacă există mulțimi $x_2, \ldots, x_n$ astfel încît $x_1 \in x_n \in \ldots x_2 \in x_1$, iar o mulțime este circulară dacă există un n astfel, încît ea să fie n-circulară. Este evident că prin raționamente similare celui de mai sus obținem celelalte paradoxe ale lui Shen.

În 1926, Ramsey a introdus o distincție între paradoxele logice (matematice) și semantice (epistemologice). Paradoxele considerate pînă acum sînt logice, pe cînd cele semantice implică noțiunile de adevăr, desemnare, exprimabilitate etc. Distincția nu este absolut precisă. De exemplu, paradoxele lui Shen asupra demonstrabilității ar părea un caz limită. În orice caz, prin intermediul aritmetizării metamatematicii, paradoxele semantice pot fi oglindite în mod uzual în sisteme formale și pot să sugereze de multe ori rezultate mai precise care nu mai sînt paradoxe.

Paradoxul mincinosului și paradoxul lui Richard sînt cele mai cunoscute paradoxe semantice. Ele au, de asemenea, mai multe variante. Vom enumera cîteva.

1.1. Mincinosul: această propoziție este falsă; ceea ce spun este fals; sau, dacă facem să vorbească o propoziție: eu sînt falsă.

1.2. Propoziția scrisă pe tablă la 1 mai 1955 la teatrul Sheldon este falsă, cu condiția de a fi unica propoziție scrisă pe unica tablă din acel teatru în acea zi.

1.3. O carte care începe cu: prima propoziție a acestei cărți este falsă.

1.4. „nu produce un enunț adevărat cînd este atașat propriei sale citări" produce un enunț adevărat cînd este atașat propriei sale citări.

1.5. Dacă 1.5. este adevărat, atunci mîine va ninge.

În conformitate cu *modus ponens*, dacă se dă 1.5. și antecedentul acestuia, consecința este adevărată. Întrucît antecedentul lui 1.5. este echivalent cu 1.5., putem aserta în mod necondiționat 1.5. Atunci vom avea „1.5. este adevărat". Conform, încă o dată, lui *modus ponens* am demonstrat: mîine va ninge (Geach, „Analysis", 1955; Löb, „Journal of Symbolic Logic", 1955).

1.6. Nu sînt demonstrabilă.

1.7. Sînt infirmabilă.

1.8. Se poate demonstra că se poate infirma 1.8.

1.9. Nu putem demonstra enunțul la care ajungem prin substituirea lui 1.9. în locul variabilei din forma de enunț x.

1.10. Pe o față a unei cartele este scris „propoziția scrisă pe cealaltă față este falsă", iar pe cealaltă față este scris „propoziția scrisă pe cealaltă față este adevărată" (Specker).

1.11. (a) b este falsă. (b) a și c sînt adevărate. (c) a este falsă.

1.12. (a) b este falsă. (b) c este adevărată. (c) d este falsă. (d) a este adevărată. Unele variante ale paradoxului lui Russell sînt:

1.13. Bărbierul unui sat care îi rade pe toți acei și numai pe acei oameni din sat care nu se bărbieresc singuri. S-ar spune că nu a existat niciodată un asemenea bărbier.

1.14. O carte care menționează toate cărțile care nu se menționează în bibliografie. (Gonseth).

1.15. Relația dintre două relații care nu au loc între ele.

Dacă modificăm raționamentul lui Cantor despre nenumărabilitate pentru ca el să se refere la șirurile denumibile de numere naturale într-o limbă dată, de exemplu, engleza, obținem paradoxul lui Richard din 1905.

Astfel, putem enumera toate expresiile din engleză care denumesc asemenea șiruri. Putem avea, de asemenea, expresia „șirul în care al n-lea membru este cu 1 mai mare decît al n-lea membru al celui de al n-lea șir din cadrul enumerării". Această expresie trebuie să figureze în enumerare și totuși diferă de orice șir care figurează în enumerare.

O versiune mai simplă este expresia lui Berry: cel mai mic număr natural care nu este denumibil cu mai puțin decît trei sute de litere.

O altă formă este cel mai mic număr transfinit ordinal indefinibil (König, 1905).

Paradoxul „heterologicului" al lui Grelling poate fi considerat și el ca o formă a paradoxului lui Richard, dacă enumerăm vocabularul. Astfel, „englez" este englez, „polisilabic" este polisilabic; dar „francez" nu este francez, „roșu" nu este roșu. Aceste din urmă cuvinte se numesc heterologice. Atunci „heterologic" este heterologic, dacă și numai dacă nu este heterologic.

§ 2. TEORIA MULȚIMILOR A LUI ZERMELO

În §1 am menționat distincția lui Cantor dintre mulțimi și varietăți contradictorii. Ideea principală este că avem anumite varietăți, îndeosebi cele ce sînt „prea mari", care, dacă sînt considerate ca mulțimi, ar duce la contradicții. Pe acestea, Cantor le numește varietăți inconsistente contradictorii. Fără îndoială, este inadecvat să afirmăm, pur și simplu, că aceste varietăți trebuie înlăturate. Avem nevoie de un anumit procedeu definit pentru a distinge mulțimile de varietățile contradictorii. În fapt, Cantor a dat indicații asupra modului în care am putea construi asemenea procedee. Astfel, potrivit lui Cantor (1899, *Opere alese*, p. 444), două varietăți echivalente sînt sau amîndouă mulțimi sau sînt amîndouă contradictorii, orice submulțime a unei mulțimi este o mulțime, mulțimea sumă a unei mulțimi (adică mulțimea alcătuită de toate elementele elementelor mulțimii respective) este o mulțime. Dacă putem specifica în mod explicit toate principiile în conformitate cu care vor fi construite mulțimile, atunci am fi, desigur, în posesia unei metode definite de distingere a mulțimilor de varietățile contradictorii. Cu toate acestea, Cantor nu a făcut eforturi speciale pentru a enunța, în mod exhaustiv, principiile de construcție a mulțimilor, principii pe care și el, și alții le-au adoptat în mod tacit. (Unele principii sînt formulate și în primele pagini din Dedekind, 1888). Enumerarea sistematică a acestor principii s-a dovedit ulterior a fi mult mai dificilă decît s-ar fi putut crede inițial. De exemplu, enunțarea explicită, în 1904, de către Zermelo, a axiomei alegerii, care fusese adoptată în mod general de către matematicienii dinaintea lui, a stîrnit numeroase discuții și controverse.

Sistemul axiomatic al lui Zermelo din 1908 este o teorie a limitării volumului și, probabil, este sistemul axiomatic cel mai apropiat posibil de concepția personală a lui Cantor asupra teoriei mulțimilor.

În sistemul formal ZF al lui Zermelo avem o singură specie de variabile $x, y, z, \ldots$ care variază în domeniul mulțimilor și un singur predicat primitiv $\in$ pentru relația de apartenență. Propozițiile se obțin din $x \in y$, $z \in w$ etc. prin aplicarea conectivelor de funcții de adevăr și a cuantorilor. Sistemul ZF conține teoria cuantificării (calculul predicatelor), de exemplu, L_q sau L_h, precum și axiome speciale numerotate $Z1$—$Z9$ după cum urmează. Formula $x = y$ se definește ca prescurtare pentru $(z)\,(z \in x \equiv z \in y)$.

$Z1$. Axioma extensionalității. Dacă $x = y$, atunci $(w)\,(x \in w \supset y \in w)$.

Z2. Axioma perechii. $(\exists\, w)\,(x)\,[x \in w \equiv (x = y \vee x = z)]$.

Z3. Axioma separării. (Aussonderungsaxiom). Dacă y nu figurează în Fx, atunci $(\exists y)(x)[x \in y \equiv (x \in z \,\&\, Fx)]$ (axioma formării submulțimilor).

Z4. Axioma mulțimii putere. $(\exists y)(x)[x \in y \equiv (w)(w \in x \supset w \in z)]$.

Z5. Axioma mulțimii sumă. $(\exists y)(x)[x \in y \equiv (\exists w)(x \in w \,\&\, w \in z)]$.

Z6. Axioma alegerii. $(y)(z)\{(y \in x \,\&\, z \in x) \supset [(\exists w)\, w \in y \,\&\, \sim (\exists w)(w \in y \,\&\, w \in z)]\} \supset (\exists u)(y)\{y \in x \supset (\underset{v}{\exists})(t)[t = v \equiv (t \in u \,\&\, t \in y)]\}$.

Z7. Axioma infinitului. Fie e mulțimea vidă, atunci $(\exists z)[e \in z \,\&\, (x)(x \in z) \supset \{x\} \in z)]$.

Z8. Axioma fundării (Fundierungsaxiom). $(\exists x) Fx \supset (\exists y)[Fy \,\&\, (z) \sim (z \in y \,\&\, Fz)]$ (axioma restrîngerii, axioma de regularitate, axioma întemeierii).

Z9. Axioma înlocuirii (Ersetzungsaxiom). Dacă $(x)(y)(z)(w)[Fxz \,\&\, Fyw) \supset \supset (x = y \equiv z = w)]$ și $(\exists x)(u)(u \in x \equiv (\exists v) Fuv)$, atunci $(\exists y)(v)(v \in y \equiv \equiv (\exists u) Fuv)$.

Sistemul de axiome ZF înfățișat astfel diferă de teoria inițială a lui Zermelo într-o serie de privințe.

Următoarele trei modificări sînt datorate în mare măsură lui Fraenkel (în special, Fraenkel 1922, „Math. Annalen", **86**, pp. 230—237).

(a) Inițial, Zermelo admitea entități care nu sînt mulțimi (așa-numitele „*Urelementen*") deși în ZF sînt admise numai mulțimi. Eliminarea acestor non-mulțimi ne permite simplificarea considerabilă a sistemului formal și concordă cu scopul utilizării teoriei mulțimilor în vederea dezvoltării matematicii.

(b) În locul axiomei perechii $Z2$, Zermelo a aplicat o axiomă care conține trei părți: (1) există o mulțime vidă, (2) există mulțimea unitate a fiecărei mulțimi date și (3) există mulțimea pereche a două mulțimi date arbitrare. Posibilitatea omiterii lui (1) și (2) reiese în felul următor. Partea (1) este o consecință a lui $Z3$: vom lua $\neg\, x \in z$ ca Fx. Partea (2) este consecință imediată a părții (3).

(c) În locul lui $Z1$, Zermelo a luat identitatea $=$ ca simbol primitiv separat și a adoptat ca axiomă: dacă două mulțimi x și y au aceleași elemente, atunci $x = y$. Adoptînd acest procedeu, el presupune, desigur, în mod tacit, ca axiome toate principiile primitive asupra identității. Procedeul de față care ia axioma lui Zermelo ca definiție se dispensează de primitivul adițional al identității și de orice axiome adiționale care, în caz contrar, ar fi necesare. Un alt procedeu echivalent, pe care ni-l sugerează teoria tipurilor, ar consta în definirea lui $x = y$ ca $(w)(x \in w \equiv y \in w)$ sau $(w)(x \in w \supset y \in w)$ și în adoptarea axiomei inițiale a lui Zermelo:

$$(z)(z \in x \equiv z \in y) \supset x = y.$$

Abaterea cea mai importantă a sistemului ZF de la sistemul inițial al lui Zermelo constă în forma mai precisă a lui $Z3$, în opoziție cu axioma de separare pe care o dă Zermelo însuși. În loc de a tolera orice propoziție Fx ca în $Z3$, axioma inițială a lui Zermelo admite numai proprietăți „determinate" sau propoziții pentru separarea submulțimilor dintr-o mulțime dată. După Zermelo (a se vedea: Zermelo 1908, „Math. Annalen", **65**, p. 263), „o întrebare sau propoziție E se numește *determinată*, dacă relațiile fundamentale ale domeniului (Bereich) considerat, în virtutea axiomelor și a legilor logice generale, determină fără putință de arbitrar dacă E este sau nu validă". Această noțiune

este destul de imprecisă și forma lui $Z3$ pe care o dă Zermelo încalcă, desigur, exigența modernă ca orice sistem de axiome să permită verificarea automată a faptului dacă o propoziție arbitrară a sistemului este sau nu axiomă. În fapt, s-au adus critici la adresa axiomei după cum s-au făcut și încercări de îmbunătățire a ei. În forma lui $Z3$, axioma a fost formulată, în esență, de către Skolem, care a propus-o încă în 1922 (a se vedea observațiile sale în „Fund. Math.", **15**). Cu toate acestea, chiar și după propunerea lui Skolem, forme rivale ale axiomei, care utilizează noțiuni de funcție, au continuat să fie folosite timp de mai mulți ani, în special de către Fraenkel. Forma dată de Skolem pentru axioma separării a fost adoptată pentru prima dată de către Zermelo în 1930, iar apoi de către Quine în 1936, de către Ackermann în 1937. Astăzi ea pare să fie acceptată în mod general.

Axioma $Z8$ exclude ceea ce Mirimanoff numea mulțimi extraordinare (a se vedea p. 42 din: Mirimanoff, 1917, *L'enseignement math.*, **19**). Se spune că o mulțime y este extraordinară, dacă există un șir infinit de mulțimi 1^x, 2^x, 3^x etc., astfel încît $1^x \in y$, $2^x \in 1^x$, $3^x \in 2^x$ etc. Astfel, dacă există o asemenea mulțime y, atunci $Z8$ nu are loc, deoarece dacă luăm propoziția Fx ca fiind valabilă pentru y, 1^x, 2^x, 3^x etc. și numai pentru acestea, atunci, pentru orice x astfel încît Fx, există un element z al lui x astfel încît Fz. Reciproc, dacă $Z8$ nu are loc, atunci există o mulțime extraordinară. Astfel, să presupunem că Fx încalcă $Z8$ și fie y o mulțime pentru care are loc Fy. Atunci, întrucît orice y de acest fel conține un element care satisface Fx, există un element 1^x al lui y, astfel încît Fy. În mod similar, există un element 2^x al lui 1^x, astfel încît $F(2^x)$. Și așa mai departe. Prin urmare, y este o mulțime extraordinară.

Axiomele $Z1$—$Z7$ nu conțin nimic de natură să excludă posibilitatea unor asemenea mulțimi. Cu alte cuvinte, este posibil să construim modele pentru $Z1$—$Z7$ în care $Z8$ nu este valabilă. Inițial, Zermelo nu a inclus $Z8$ în sistemul său. Cîțiva ani după Mirimanoff, Fraenkel a examinat aceste mulțimi (Fraenkel 1922, *op. cit.*, p. 233) și a propus o axiomă de limitare care specifică faptul că nu admitem alte mulțimi, cu excepția celor a căror existență este recunoscută prin axiomele $Z1$—$Z7$. Atunci ar urma că nu există mulțimi extraordinare, deoarece ele nu sînt cerute (cu toate că nu sînt nici excluse) de către $Z1$—$Z7$. Este însă greu de văzut în mod direct cum s-ar putea enunța formal, în mod riguros, o atare axiomă puternică de limitare. (În ce privește dificultățile legate de forma dată de Fraenkel axiomei limitării, a se vedea von Neumann, 1925, *Crelle's*, **154**, pp. 230—231.)

În loc de a încerca să excludă mulțimile extraordinare printr-o astfel de axiomă, Neumann a introdus (*ibidem* p. 239, axioma VI4) o axiomă care enunță explicit faptul că nu sînt permise asemenea mulțimi. Ulterior, el a prezentat axioma în aceeași formă ca $Z8$ (Neumann, 1929, *ibidem* **160**, p. 231). Zermelo a introdus în mod independent în 1930, această axiomă.

Axioma $Z9$ nu figura în sistemul inițial al lui Zermelo. Faptul este destul de surprinzător, deoarece, așa cum am menționat mai sus, în 1899 Cantor stipulase deja că o multiplicitate echivalentă cu o mulțime este, la rîndul său, o mulțime. De exemplu, conform $Z9$ și $Z7$ se poate demonstra că există o mulțime alcătuită din toate mulțimile finite ale mulțimii infinite date prin $Z7$ sau o mulțime care conține ca element mulțimea infinită a lui $Z7$ și mulțimea putere a fiecărui element al acesteia; se pare însă că existența lor nu

este demonstrabilă în cazul cînd nu avem $Z9$. Pentru a remedia acest defect, Fraenkel a propus următoarea axiomă (Fraenkel 1922, a se vedea și postulatul 3 la pag. 49 din Mirimanoff 1917, nr. 4 din Skolem 1923, *Vorträge 5 Kongress Skandinav. Math.*): dacă x este o mulțime și orice element al lui x este înlocuit printr-o mulțime, atunci rezultatul este de asemenea o mulțime. Problema formalizării mai exacte a acestei axiome este similară cu cea ridicată de axioma separării. Forma dată mai sus pentru $Z9$ este formularea acceptată în prezent în mod curent.

Uneori $Z3$ și $Z9$ sînt înlocuite prin următoarea axiomă: Pentru orice propoziție $F(uv)$, dacă $(x)\,(y)\,(z)\,\{[F(x, z)\,\&\,F(y, z)]\supset x = y\}$ și $(\exists\, x)\,(u)\,[u\in x \equiv (\exists\, v)\,F(u, v)]$ atunci $(\exists\, y)\,(v)\,[v\in y \equiv (\exists\, u)\,F(u, v)]$. În cadrul lui ZF, această axiomă este demonstrabilă. Reciproc fiind dată această axiomă, $Z3$ și $Z9$ se pot deriva din celelalte axiome ale sistemului ZF (a se vedea Bernays 1941, *Journal Symbolic Logic*, **6**, p. 3).

Dacă eliminăm axioma infinitului $Z7$ din ZF, sistemul G, de teoria generală a mulțimilor, care rezultă admite un model foarte simplu în teoria numerelor naturale (a se vedea Ackermann, „Math. Annalen", **114**). Pentru aceasta, este suficient să luăm ca domeniu de valori pentru variabilele x, y etc. mulțimea numerelor naturale, să luăm mulțimea vidă ca numărul 0, iar relația de apartenență $x\in y$ ca relația: cîtul împărțirii lui y prin a x-a putere a lui 2 este număr impar. Atunci, așa cum se poate verifica ușor, toate axiomele lui ZF (cu excepția axiomei $Z7$) devin simple teoreme ale teoriei elementare a numerelor.

Dacă omitem axioma de înlocuire $Z9$, axiomele rămase $Z1$—$Z8$ posedă un model intuitiv interesant, descris la Bernays 1948 (*Journal of Symbolic Logic*, **13**). Fie e mulțimea vidă, fie $p(0)$ mulțimea e, fie $p(n + 1)$ mulțimea putere a lui $p(n)$, fie $p(\omega)$ mulțimea tuturor mulțimilor care aparțin unui $p(k)$, unde k este finit, și fie $p(\omega + k + 1)$ mulțimea putere a lui $p(\omega + k)$. Acum vom afirma că domeniul compus din toate mulțimile care revin unui $p(g)$, unde g este un număr ordinal $<\omega.2$, constituie acest model.

Vom numi toate mulțimile de acest fel d-mulțimi. Putem demonstra următoarele cu privire la d-mulțimi:

(1) Pentru orice $g(g < \omega.2)$, orice element al lui $p(g)$ este submulțime al lui $p(g)$.

Demonstrație. Dacă g este 0 sau ω, (1) este adevărat conform definițiilor date lui $p(0)$ și $p(\omega)$. Să presupunem că (1) este adevărat, cînd g este g_1; vrem să demonstrăm că (1) este adevărat și în cazul cînd g este $g_1 + 1$. Fie x un element al lui $p(g_1 + 1)$; atunci x este o submulțime a lui $p(g_1)$ conform definiției date lui $p(g_1 + 1)$. În consecință, dacă y este element al lui x, y este element al lui $p(g_1)$. Așadar, pe baza ipotezei inducției, y este o submulțime a lui $p(g_1)$. Conform definiției lui $p(g_1 + 1)$, încă o dată, y este un element al lui $p(g_1 + 1)$. În consecință, x este o submulțime a lui $p(g_1 + 1)$. În consecință (1) este demonstrat.

(2) Pentru un g oarecare, $p(g)$ include orice $p(h)$, unde g nu este mai mic decît h.

Demonstrație. Dacă g este 0 sau ω, (2) este adevărat conform definiției lui $p(0)$ și $p(\omega)$. Să admitem că (2) este adevărat, cînd g este g_1; vrem să demonstrăm că (2) este adevărat și cînd g este $g_1 + 1$. Conform lui (1), orice element

al lui $p(g_1)$ este un element al lui $p(g_1 + 1)$. Dar dacă h nu este mai mare decît $g_1 + 1$, atunci h este $g_1 + 1$ sau h nu este mai mare ca g_1. Aşadar, conform ipotezei inducţiei, (2) este demonstrat pentru cazul cînd g este $g_1 + 1$. În consecinţă, (2) este demonstrat.

(3) Orice submulţime a unei d-mulţimi este o d-mulţime.

Demonstraţie. Să admitem că x este o d-mulţime care aparţine lui $p(g)$. Conform cu (1) x este o submulţime a lui $p(g)$. Deci, orice submulţime a lui x este, de asemenea, o submulţime a lui $p(g)$ şi, în consecinţă, un element al lui $p(g + 1)$. Prin urmare, (3) este demonstrat.

(4) Mulţimea putere a unei d-mulţimi este, de asemenea, o d-mulţime.

Demonstraţie. Să admitem că x este o d-mulţime aparţinînd lui $p(g)$. Raţionînd la fel ca în demonstraţia lui (3), orice submulţime a lui x este un element al lui $p(g + 1)$. Deci, mulţimea putere a lui x este un element al lui $p(g + 2)$, şi, în consecinţă, o d-mulţime.

(5) Orice element al unei d-mulţimi este, de asemenea, o d-mulţime.

Demonstraţie. Dacă y este element al unei d-mulţimi x care aparţine lui $p(g)$ atunci, conform cu (1), x este o submulţime a lui $p(g)$ şi ca atare y aparţine lui $p(g)$.

(6) Mulţimea sumă a unei d-mulţimi este, de asemenea, o d-mulţime.

Demonstraţie. Fie y mulţimea sumă a unei d-mulţimi x aparţinînd lui $p(g)$, fie z un element al lui y şi fie w un element al lui z. Raţionînd ca în cazul lui (5), conchidem că z aparţine lui $p(g)$. Aşadar, y este o submulţime a lui $p(g)$ şi un element al lui $p(g + 1)$.

(7) Dacă x şi y sînt d-mulţimi, atunci mulţimea $\{x, y\}$ este şi ea o d-mulţime.

Demonstraţie. Să admitem că x aparţine la $p(g)$ şi y aparţine la $p(h)$. Dacă g este mai mare ca h, atunci, conform lui (2), y aparţine şi ea lui $p(g)$. Aşadar, putem admite că g este acelaşi cu h. Dar atunci $\{x, y\}$ este o submulţime a lui $p(g)$ şi un element al lui $p(g + 1)$.

(8) d-mulţimea $p(\omega)$ este o mulţime infinită.

(9) Mulţimea infinită $\{e, \{e,\} \{\{e\}\} \{\{\{e\}\}\}, ...\}$ este o d-mulţime.

Demonstraţie. Mulţimea în cauză este evident o submulţime a lui $p(\omega)$ şi, ca atare, un element al mulţimii $p(\omega + 1)$.

(10) Fiind dată o colecţie nevidă oarecare de d-mulţimi, există o d-mulţime x în colecţie, astfel încît nici un element al lui x nu aparţine colecţiei date.

Demonstraţie. Printre d-mulţimile colecţiei există una (să zicem x) care aparţine unei $p(g)$ astfel, încît pentru orice h mai mic ca g, nici o d-mulţime a colecţiei nu aparţine lui $p(h)$. Nici un element al acestei d-mulţimi x nu aparţine colecţiei, deoarece fiecare element al lui x aparţine unui $p(h)$ cu h mai mic ca g.

(11) Colecția tuturor d-mulțimilor oferă un model pentru teoria simplă a tipurilor (sistemul T), care va fi descris în §4.

Demonstrație. Să luăm toate d-mulțimile care aparțin lui $p(\omega)$ ca indivizi (entități de tipul 1) și toate d-mulțimile aparținînd lui $p(\omega + k + 1)$, dar nu lui $p(\omega + k)$ ca fiind clasele de tip $k + 2$. Atunci este ușor de văzut că toate axiomele teoriei simple a tipurilor sînt satisfăcute.

(12) Mulțimea $E = \{p(\omega), p(\omega + 1), ...\}$ nu este o d-mulțime.

Demonstrație. Dacă E ar aparține lui $p(\omega + k)$ atunci, conform lui (1), E ar fi o submulțime a lui $p(\omega + k)$ și, întrucît $p(\omega + k)$ aparține lui E, $p(\omega + k)$ ar fi propriul său element, contrar construcțiilor noastre.

Pentru a constata că axiomele $Z1$—$Z8$ sînt satisfăcute de colecția de d-mulțimi descrisă mai sus, notăm că $Z1$ este adoptat implicit în construcția d-mulțimilor și că $Z2$, $Z3$, $Z4$, $Z5$, $Z7$, $Z8$ sînt satisfăcute prin intermediul teoremelor corespunzătoare (7), (3), (4), (6), (9), (10). $Z6$ este de asemenea satisfăcut. Astfel, dacă x este o d-mulțime, conform lui (6), mulțimea sumă y a lui x este și ea o d-mulțime, care aparține (să zicem) lui $p(g)$. Întrucît, prin definiție, $p(g)$ conține ca elemente toate submulțimile fiecăruia din elementele sale, ea trebuie să conțină și submulțimea u a lui y, care posedă proprietatea de a avea un element și numai unul în comun cu orice element al lui x.

Trebuie observat că acest model presupune posibilitatea construirii de submulțimi prin intermediul definițiilor impredicative de orice fel și că el nu dă o demonstrație de consistență, atîta timp cît nu am obținut o demonstrație de cosistență pentru mulțimile impredicative în general.

Un model înrudit pentru teoria tipurilor T este prezentat în mod mai amănunțit în articolul lui Rosser și al autorului („Journal of Symbolic Logic", **15**, 1950, pp. 113—129). Se observă, de asemenea, că dacă admitem ipoteza generalizată a continuului, putem adopta ca model toate numerele ordinale mai mici decît ω_ω.

§ 3. TEORIA MULȚIMILOR A LUI BERNAYS

Sistemul NB al lui Bernays, bazat în parte pe lucrările lui von Neumann, este o extindere predicativă a sistemului ZF. Axiomele lui ZF sînt în număr infinit, deoarece $Z3$, $Z8$ și $Z9$ sînt scheme axiomatice. Dacă introducem acum variabile care variază pe domeniul claselor definite de predicate în aceste scheme, putem reformula schemele ca axiome individuale. Mai mult, este posibil să enumerăm aceste clase printr-un număr finit de axiome în sistem. În acest mod obținem NB ca o extindere a lui ZF, care conține doar un număr finit de axiome cu două specii de variabile: variabile mici care iau ca valori mulțimi (elemente) și variabile mari care iau ca valori clase (proprii) (non-elemente).

ZF poate fi extins cu ușurință pînă la NB în modul următor; în fapt am putea folosi, dacă dorim, o singură specie de variabile (a se vedea „Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.," **35**, 1949, pp. 150—155). Vom adăuga variabilele X, Y, Z

etc. și noi formule atomice $x \in X$, $z \in Y$ etc. În locul definiției inițiale a lui $x = y$ vom folosi acum:

3.1. Dacă a, b sînt variabile (ambele mici, ambele mari sau una mică și alta mare), atunci $a = b$ este o abreviere pentru $(z)\ (z \in a \equiv z \in b)$.

3.2. $X \in Y$ este o abreviere pentru $(Ez)\ (z = X\ \&\ z \in Y)$.

3.3. $X \in y$ este o abreviere pentru $(Ez)\ (z = X\ \&\ z \in y)$.

Logica subiacentă este un calcul al predicatelor cu două sorturi. Pentru a enunța axiomele, am putea folosi în schimb ca idee primitivă noțiunea de pereche ordonată, dînd proprietatea sa caracteristică

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \supset (a = c\ \&\ b = d)$$

ca axiomă sau introducînd-o prin definiții. În cele de față vom adopta al doilea procedeu și vom defini numai contextele în care perechile figurează înaintea lui $\in$, celelalte contexte fiind considerate abrevieri eliminabile prin definiții ca cele de la 3.1. la 3.3.:

3.4. $u \in \{x, y\} \equiv (u = x \vee u = y)$.

3.5. $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

3.6. $\langle x, y, z\rangle = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$.

Axiomele lui NB sînt $B1$—$B16$.

$B1$. Dacă a, b, c sînt variabile, atunci $a = b \supset (a \in c \supset b \in c)$.
$B2$. La fel ca $Z2$.
$B3$. Înlocuim Fx prin $x \in X$ în $Z3$.
$B4$-$B7$. La fel ca $Z4$—$Z7$.
$B8$. La fel ca $Z8$, cu Fa înlocuit prin $a \in X$.
$B9$. La fel ca $Z9$, cu Fab înlocuit prin $\langle a, b\rangle \in X$.
$B10$. $(EY)\ (x)\ (y)\ (\langle x, y\rangle \in Y \equiv x \in y)$.
$B11$. $(EY)\ (x)\ (x \in Y \equiv (x \in X \mid x \in Z))$.
$B12$. $(EY)\ (x)\ (x \in Y \equiv (Ey)\ \langle y, x\rangle \in X)$.
$B13$. $(EY)\ (x)\ (y)\ (\langle x, y\rangle \in Y \equiv y \in X)$.
$B14$. $(EY)\ (x)\ (y)\ (z)\ (\langle x, y, z\rangle \in Y \equiv \langle y, z, x\rangle \in X)$.
$B15$. $(EY)\ (x)\ (y)\ (z)\ (\langle x, y, z\rangle \in Y \equiv \langle y, x, z\rangle \in X)$.
$B16$. $(EY)\ (x)\ (x \in Y \equiv x \in y)$.

Este bine cunoscut faptul că din cele două permutări în $B14$ și $B15$ putem obține toate permutările lui x, y, z. Așa cum observă Markov (Известия Академии Наук СССР *Сер. Мат.* **12**, 1948, pp. 569—570), axioma schimbării reciproce a lui x și y poate fi obținută. Astfel, pe baza axiomei $B13$ și a calculului predicatelor, obținem din $\langle x, y\rangle$ domeniul lui $\langle z, x, y\rangle$; pe baza lui $B14$ și $B15$, obținem atunci domeniul lui $\langle z, y, x\rangle$ din $\langle x, y\rangle$. Pe baza lui $B12$, obținem $\langle y, x\rangle$.

Folosind metoda din articolul lui Bernays din 1937 sau din cel al lui Gödel din 1940, putem demonstra atunci principiul general căutat:

BP. Pentru orice formulă Fx în NB care nu conține nici o variabilă de clase legată, $(EY)\,(x)\,(x \in Y \equiv Fx)$.

Acest principiu nu coincide întocmai cu concluzia căutată că orice predicat în ZF corespunde unei clase în NB, deoarece F poate conține variabile de clase libere. Dacă însă vom considera clasele ca fiind introduse pas cu pas, atunci de fiecare dată putem obține o nouă clasă, definită numai atunci cînd variabilele de clase libere sînt înlocuite prin clase definite. În acest mod este intuitiv clar că variabilele de clase sînt, în esență, un procedeu de abreviere care nu sporește tăria lui ZF în mare măsură.

Într-adevăr, s-au dat diferite demonstrații de consistență relativă pe baza cărora se poate infera că dacă o formulă a lui ZF este teoremă a lui NB, atunci ea este totodată o teoremă a lui ZF (a se vedea „Fund. Math.", **37**, 1950, pp. 87—110; „Journal Symbolic Logic", **15**, 1950, pp. 113—129). Mai recent, prin extinderea ε — teoremelor lui Hilbert și Bernays, Shoenfield a demonstrat un rezultat încă și mai puternic:

Teorema 1. Există un procedeu primitiv recursiv, astfel încît fiind dată o demonstrație în NB pentru o formulă A din ZF putem găsi o demonstrație a lui A în ZF.

Ideile pe care se bazează demonstrațiile de consistență relativă sînt destul de simple. De exemplu, dacă ZF este consistent, atunci el admite un model numărabil. Atunci avem un univers numărabil fixat de mulțimi pentru NB, iar axiomele $B10$—$B16$ pot fi considerate ca principii care produc o clasă inițială (conform axiomei $B10$) și generează apoi clase noi din clase în prealabil date (conform celorlalte axiome).

Astfel, am obține o mulțime numărabilă de clase fără ca domeniul inițial de mulțimi să fie afectat. Mai mult, structura acestor clase poate fi determinată integral pe baza domeniului mulțimilor.

Alternativ, am putea crede că dacă ni se dă o demonstrație în NB a unei concluzii A, care nu conține variabile de clase, atunci am fi capabili să eliminăm toate variabilele de clase din demonstrație, întorcîndu-ne înapoi și să obținem o demonstrație în ZF. Demonstrația lui Shoenfield arată că lucrurile stau într-adevăr așa. Însă variabilele de clase legate în calculul predicatelor necesită considerente extrem de complexe. Recent, Bernays a reformulat NB în „Axiomatic Set Theory", folosind numai variabile de clasă libere. Într-o asemenea formulare, teorema 1 ar decurge imediat.

O extindere naturală a lui NB ar consta în înlocuirea lui BP sau a axiomelor $B10$—$B15$ prin principiul mai tare:

BQ. Dacă Fx este o formulă a lui NB, atunci $(EY)\,(x)\,(x \in Y \equiv Fx)$.

Sistemul NQ care rezultă ar fi o extindere impredicativă a lui ZF și el este — după cum se poate demonstra — mai tare decît NB, în măsura în care $Con(NB)$ poate fi demonstrată în NQ ca teoremă.

Dacă eliminăm din NB axioma infinitului, sistemul P care rezultă este teoria predicativă a mulțimilor numerice. Dacă eliminăm din NQ axioma infinitului, sistemul care rezultă este teoria impredicativă a mulțimilor numerice, care este echivalent, de asemenea, cu rezultatul obținut prin eliminarea axio-

mei mulțimii putere din ZF. Dacă eliminăm din NB axioma mulțimii putere obținem teoria predicativă a mulțimilor de numere reale, sistemul R.

Un mod de a folosi numai variabile de clasă libere constă în introducerea unei clase constante E pentru $B10$, precum și a șase operatori pentru axiomele $B11-B16$. Atunci obținem integral calculul predicatelor pentru variabilele mici și o singură regulă pentru variabilele de clasă: dacă FX atunci Fa, unde a poate fi o variabilă mică sau un termen oarecare obținut în mod adecvat din variabile și constanta E.

Axiomele $B10-B16$ devin acum:

$$NB10.\ \langle x, y\rangle \in E \equiv x \in y.$$

$$NB11.\ x \in X \mid Y \equiv (x \in X \mid x \in Y).$$

$$NB12.\ x \in D(X) \equiv (Ey)\ \langle y, x\rangle \in X.$$

$$NB13.\ \langle x, y\rangle \in V \times X \equiv y \in X.$$

$$NB14.\ \langle x, y, z\rangle \in \mathrm{Cyc}(X) \equiv \langle y, z, x\rangle \in X.$$

$$NB15.\ \langle x, y, z\rangle \in \mathrm{Per}\,(X) \equiv \langle y, x, z\rangle \in X.$$

$$NB16.\ x \in C(y) \equiv x \in y.$$

Pentru o asemenea formulare a sistemului NB este foarte ușor să demonstrăm teorema 1; fiind dată o demonstrație oarecare a unei concluzii care nu conține variabile de clase, putem elimina toate variabilele (libere) de clasă într-un mod sistematic. De fiecare dată cînd este aplicată singura regulă pentru variabilele de clasă, înlocuim în premisă variabila X printr-un termen a în concluzie Procedăm astfel, mergînd de la concluzie înapoi la toate liniile precedente ale demonstrației. Rezultatul trebuie să rămînă o demonstrație în cadrul lui NB. Dacă rămîn variabile de clasă libere, atunci le înlocuim pe toate, să spunem, prin E. Atunci rezultatul este, la rîndul său, o demonstrație care nu mai conține variabile de clasă, deși el mai poate conține constante de clasă, cum sînt E și $D(E)$. Dar acestea pot fi eliminate pas cu pas, aplicînd în mod repetat $NB10-NB16$. În cele din urmă obținem o demonstrație în cadrul sistemului ZF.

Argumentul poate fi formalizat pentru a da:

Teorema 2. Putem demonstra în Z: $Con\,(ZF) \supset Con(NB)$.

Trebuie observat că raționamentul de mai sus nu dă o traducere a lui NB în ZF, deoarece fiecare formulă din NB care conține variabile de clasă libere nu capătă o traducere unică în ZF, ci o infinitate de traduceri diferite în funcție de termenii constanți care sînt substituiți în locul variabilelor. Se poate demonstra exact că nu există o traducere a lui NB în ZF (a se vedea „Fund. Math.", **42**, 1955, pp. 101—110).

Teorema 3. NB nu este traductibil în ZF, P nu este traductibil în G și nici în Z.

Aceasta este o consecință a teoremei 5 din capitolul XV. În primul rînd putem reformula, în modul cunoscut, NB și P cu o singură specie de varia-

bile. În al doilea rînd, putem dezvolta Z în P (și de asemenea în G), așa cum se demonstrează în articolele lui Bernays, astfel încît Z este traductibil în P (și în G). Pe baza modelului pentru G dat de Ackermann, este posibil, de asemenea, să traducem pe G în Z. Așadar, avem:

Teorema 4. G și Z sînt traductibile unul în altul, Z este traductibil în P; putem demonstra în Z: $Con(Z) \equiv Con(G)$; $Con(P) \supset Con(Z)$.

Conform teoremei 5 din cap. XV — dat fiind că P are numai un număr finit de axiome —, dacă P ar fi traductibil în Z sau în G, am fi capabili să demonstrăm $Con(P)$ în Z și deci $Con(Z)$ în Z. Pentru ca să demonstrăm partea privitoare la NB și ZF, vom observa (a se vedea capitolul următor) că o teoremă similară teoremei 5 din cap. XV se poate demonstra pentru ZF, astfel încît concluzia se obține prin același raționament.

În treacăt fie spus, este posibil de asemenea să demonstrăm consistența relativă a lui NQ față de ZF (a se vedea §5 mai jos, precum și § 4 al capitolului XIII mai sus).

Privitor la sistemele ZF și NB avem diverse rezultate importante, dintre care vom cita numai cîteva. Este mai convenabil să formulăm aceste rezultate în legătură cu NB.

Există trei axiome care prezintă un interes central în fundarea teoriei mulțimilor: axioma alegerii, ipoteza continuului și axioma de categoricitate a lui Gödel (axioma mulțimilor constructibile). În formularea acestor axiome vom urma monografia lui Gödel din 1940, unde aceste axiome sînt formulate exact, în notația sistemului NB. Mai mult, vom regrupa axiomele în maniera cunoscută a lui Gödel. Grupul A conține axiomele $B16$, $B1$, $B2$; grupul B conține axiomele $B10$—$B15$; grupul C conține axiomele $B7$, $B4$, $B5$, $B3$, $B9$; grupul D conține axioma fundării $B8$; E este o axiomă a alegerii mai tare ca $B6$.

E. Axioma alegerii. Există o funcție de alegere X (o clasă de perechi ordonate) astfel încît pentru orice mulțime nevidă x,

$$(Ey)\ (y \in x\ \&\ \&\ \langle y,\ x\rangle \in X).$$

G. Ipoteza generalizată a continuului.

H. Axioma de categoricitate. Toate mulțimile sînt constructibile, sau $V = L$.

O altă axiomă interesantă care nu este discutată în mod frecvent a fost introdusă pentru prima oară de către von Neumann.

F. Axioma limitării volumului. O clasă nu este mulțime (adică este o clasă proprie), dacă și numai dacă există o corespondență biunivocă între ea și clasa universală V (adică clasa tuturor mulțimilor).

Dacă permitem în modelul pentru $Z1$—$Z8$ din paragraful precedent numere ordinale arbitrare care se pot obține în ZF, vom obține un model Π pentru întregul sistem ZF. Să definim în NB o funcție p, pe clasa proprie a tuturor numerelor ordinale, astfel încît $p(o)$ este mulțimea vidă, $p(\alpha + 1)$ este mulțimea putere a lui $p(\alpha)$, iar pentru un număr ordinal limită, valoarea lui p este reuniunea tuturor valorilor anterioare ale lui p. Reuniunea tuturor valorilor funcției P, dacă este luată în calitate de clasă universală, dă modelul Π. Un asemenea model se poate construi pe baza axiomelor lui NB numai din grupele A, B, C. Întrucît D satisface acest model Π, von Neumann dă în acest mod o demonstrație că dacă axiomele A, B, C sînt consistente, atunci axiomele A, B, C, D sînt consistente (*Crelle's*, **160**, p. 277):

TEOREMA 5. Dacă axiomele A, B, C sînt consistente, atunci ele rămîn consistente, dacă adăugăm axioma fundării D; mai departe, dacă axiomele A, B, C E sînt consistente (adică dacă mulțimile și clasele inițiale determinate prin axiomele A, B, C satisfac axioma alegerii), atunci întregul sistem NB, incluzînd axiomele A-E este consistent (adică modelul care satisface întotdeauna axioma alegerii satisface totodată și axioma fundării).

În rezumat, dacă teoria mulțimilor, cu sau fără axioma alegerii, este consistentă, ea rămîne consistentă dacă adăugăm axioma fundării. Acest fapt însă nu spune nimic despre consistența relativă a axiomei alegerii.

Axioma fundării are însă drept consecință faptul că toate mulțimile aparțin modelului intuitiv Π. Dacă axioma alegerii este adevărată în Π, atunci axioma F este adevărată în Π; pe această bază, von Neumann a demonstrat:

TEOREMA 6. Putem deriva axioma F în NB, adică axiomele A-E; mai mult, dacă axiomele A, B, C, E, sînt consistente, atunci sistemul lor rămîne consistent dacă adăugăm atît axioma fundării D cît și axioma de limitare a volumului F.

În fapt, von Neumann a luat axioma F ca axiomă care constituie *Aussonderungsaxiom* și axioma alegerii E și *Ersetzungsaxiom* ca redundante (derivabile).

Axioma F oferă, desigur, un criteriu precis de distingere a mulțimilor (elementelor) de clase proprii (non-elemente). Dacă există o corespondență biunivocă între o mulțime x și o clasă Y, iar Y nu este o mulțime, atunci există o corespondență biunivocă între Y și clasa universală V; așadar, există și o corespondență biunivocă între x și V. Dar atunci x ar fi și el un nonelement. În consecință, Y trebuie să fie un element. În mod similar, fiind date x și Y dacă $\hat{u}(u \in x \ \& \ u \in Y)$ este un non-element atunci există o corespondență biunivocă între acesta și V astfel încît V poate fi aplicat biunivoc la o submulțime a lui x; dar, desigur, x poate fi aplicat biunivoc la o subclasă a lui V; prin urmare, există o corespondență biunivocă între x și V și x trebuie să fie un non-element. Cu alte cuvinte, dacă x este o mulțime, atunci și $\hat{u}(u \in x \& \ \& \ u \in Y)$ este o mulțime.

Pentru a demonstra axioma alegerii, luăm clasa proprie O a tuturor numerelor ordinale. Aceasta nu poate fi o mulțime, căci în caz contrar am obține paradoxul lui Burali-Forti. Așadar, între aceasta și V trebuie să existe o corespondență A biunivocă. Așadar, întrucît O este bine-ordonată, putem introduce următoarele definiții:

$$y = Od(x) \equiv (\langle y, \ x \rangle \in A \ \& \ (x) \ (z < y \supset \langle z, \ x \rangle \notin A))$$

$$\langle y, \ x \rangle \in As \equiv (y \in x \ \& \ (z) \ (Od(z) < Od(y) \supset z \notin x)).$$

Atunci, As este un operator de selecție universală pentru toate mulțimile și obținem axioma E a lui Gödel. Desigur, acestea sînt numai schițe ale demonstrațiilor care pot fi lucrate în detaliu, ca în unele articole ale lui von Neumann.

Modelul Π (precum și funcția p) de mai sus pot fi utilizate și ele în anumite studii ale lui Zermelo și Shepherdson. Să numim supercomplet un model care satisface axiomele A, B, C iar toate clasele modelului sînt conținute în V_m, ε_m, unde ε_m coincide cu ε pentru clasele modelului. Un număr inaccesibil (în sens

restrîns) este un număr ordinal, astfel încît (1) el este regulat, adică orice şir crescător de numere ordinale cu tipul ordinal al şirului mai mic decît el are o limită mai mică decît el (cu alte cuvinte, numărul nu poate fi atins folosind numai numere ordinale mai mici), (2) pentru toţi α, dacă ω_α îl precede, 2^{ω_α} îl precede de asemenea, (3) el este mai mare decît ω. Atunci există un singur model supercomplet (modelul obişnuit), care satisface A, B, C, D, precum şi $On = On_m$. Fiind dat un i inaccesibil oarecare, A, B, C, D, E şi $On_m = i$ determină unicul model supercomplet al cărui univers este $p(i)$ pentru funcţia lui Neumann p.

Monografia lui Gödel conţine o demonstraţie exactă a următorului rezultat remarcabil:

Teorema 7. Dacă axiomele A, B, C, cu sau fără D, sînt consistente, atunci prin adăugarea axiomei de categoricitate H, sistemul rămîne consistent; mai mult, din A, B, C şi H putem deriva axioma alegerii E şi ipoteza generalizată a continuului. Aşadar, dacă sistemul compus din A, B, C este consistent, sistemul compus din A, B, C, D, E, G, H este consistent şi, în fapt, acest din urmă sistem este traductibil în primul.

Mai mult, din construcţia lui Gödel rezultă, de asemenea, ca o consecinţă imediată:

Teorema 8. Putem adăuga, în mod consistent, la ZF ca axiomă nouă $V = L$, care nu conţine nici o variabilă de clase iar în sistemul ZF astfel extins, există o formulă $A(x, y)$ astfel încît: (i) dacă $A(x, y)$ atunci $x \in y$; (ii) pentru toţi y, există un x astfel încît $A(x, y)$, cu condiţia că y nu este vid; (iii) dacă $A(x, y)$ şi $A(z, y)$ atunci $x = z$.

Ideea intuitivă a demonstraţiei lui Gödel este expusă mai precis în rezumatul său („Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.", **25**, 1939, pp. 220—224). Modelul său Δ este similar modelului Π, cu excepţia faptului că la fiecare număr ordinal este considerată o extindere predicativă în locul mulţimii putere impredicative. Acest fapt are efectul imediat că toate mulţimile în cadrul modelului pot fi enumerate relativ la clasa tuturor numerelor ordinale care poate fi definită şi bine-ordonată fără a apela la axioma alegerii. Aşadar, urmează consistenţa relativă a axiomei alegerii. Existenţa unui asemenea model decurge din raţionamentul familiar că dacă o formulă admite un model, ea admite un model enumerabil pe baza funcţiilor Skolem.

În obţinerea ipotezei generalizate a continuului se pare că pasul crucial îl constituie faptul că pentru orice număr cardinal infinit dat c, dacă considerăm numai numere ordinale a căror cardinalitate nu este mai mare ca c, atunci nu avem nevoie niciodată de o mulţime în cadrul modelului al cărui ordin să fie un număr ordinal de o cardinalitate superioară lui c, pentru a satisface *Aussonderungsaxiom*. Dacă eliminăm axioma mulţimii putere din NB şi considerăm numai ipoteza iniţială a continuului, un rezumat succint al raţionamentului lui Gödel ar putea fi următorul:

Fie mulţimea vidă unica mulţime de ordin 0. Pentru orice număr ordinal a din a doua clasă de numere a lui Cantor, dacă a este un succesor, atunci toate mulţimile de ordin a sînt submulţimi predicative ale mulţimii tuturor

mulțimilor de ordin $a - 1$, dacă a este un număr ordinal limită, atunci mulțimile de ordin a sînt toate mulțimi de ordine mai mici. Dacă considerăm acum toate mulțimile numărabile de mulțimi cerute de Aussonderungsaxiom, vom găsi că, într-o condiție impredicativă $F(x)$, care conține cuantori definiți pe toate aceste mulțimi, nu avem totuși nevoie să trecem dincolo de domeniul respectiv pentru a satisface cuantorii în cauză prin valori ale funcțiilor Skolem cerute, care merg întotdeauna de la numărabil la numărabil.

Rămîn nesoluționate problemele dacă axioma alegerii E este independentă de axiomele A-D, dacă axioma de categoricitate H este independentă de A-D, dacă ipoteza generalizată a continuului este independentă de A-E. În fiecare caz în parte se cere un model pentru axiomele inițiale, în care negația axiomei adiționale să fie adevărată.

Un rezultat parțial este acela că ipoteza generalizată a continuului implică axioma alegerii. Așadar, dacă E este independentă de A-D, G este și ea independentă de A-D. Aceasta nu are nimic de a face cu problema mai interesantă și mai dificilă dacă G este independentă de A-E.

Un rezultat parțial, împreună cu diverse extinderi, privitor la independența axiomei alegerii a fost stabilit de către Fraenkel, Mostowski, Specker, Shoenfield și Mendelson. (A se vedea: Specker, Habilitationsschrift, 1951, *Zeitschrift f. Math. Logik u. Grundlagen d. Math.*, **3**, 1957, pp. 173—210). Rezultatul fundamental este:

Teorema 9. Axioma alegerii este independentă de axiomele A, B, C; există un model pentru A, B, C în care atît D, cît și E sînt false.

§ 4. TEORIA TIPURILOR, TIPURI NEGATIVE ȘI „NEW FOUNDATIONS"

În „Proc. London Math. Soc"., **4**, 1906, p. 34, Russell a propus cuvîntul „predicativ", pentru a desemna toate normele capabile să definească clase și cuvîntul „impredicativ" (sau „nepredicativ") pentru a desemna toate normele care nu sînt capabile de aceasta; într-adevăr, argumenta el, paradoxele ne arată limpede că trebuie să existe norme incapabile să definească clase. După aceea, el a observat că problema principală era de a decide care sînt normele predicative și care cele impredicative. Discutînd propunerea lui Russell, Poincaré a sugerat, în „Rev. de métaph. mor.," **14**, 1906, p. 307, să identificăm definiția impredicativă cu definiția unei entități e, în care se face referire la o totalitate care conține pe e ca element. O definiție impredicativă în acest sens era considerată că conține un cerc vicios și trebuia, prin urmare, să fie evitată cu orice preț. Să-l citățm pe Poincaré: „Sans quoi la définition de E contiendrait un cercle vicieux; on ne peut pas définir E par l'ensemble E lui-même... Ainsi *les définitions qui doivent être regardées comme non prédicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux*". Ideea soluționării paradoxelor prin abolirea acestor definiții impredicative a fost atribuită parțial de către Poincaré scrisorii lui Richard din anul precedent (Richard, 1905).

Răspunzînd prompt, Russell a aprobat soluția propusă pentru paradoxe, dar a observat inadecvarea unei simple enunțări a faptului că definițiile impredicative trebuie să fie respinse. După el, un asemenea enunț dădea doar un cri-

teriu negativ, în timp ce se cere o teorie pozitivă a ceea ce sînt definițiile predicative. După aceea, el schița teoria sa fără clase (sau, cum e cunoscută astăzi, de către toți, teoria sa ramificată a tipurilor) și afirma că această teorie ne oferă răspunsul dorit. Acest sistem a fost prezentat ulterior, în mod mai detaliat, în „Am. Journ. Math.", **30**, 1908, și a format baza operei sale masive *Principia Mathematica* (Whitehead și Russell) publicată între anii 1910 și 1913. Dar miezul sistemului este complicat și rămîne greu de înțeles în ciuda dezvoltărilor ample și a edificiului impresionant construit pe baza lui. Într-adevăr, în primul rînd, el era menit să fie un remediu nu numai al paradoxelor matematice despre clase și numere, menționate mai sus, ci în același timp și pentru paradoxele semantice (paradoxele lui Epimenide, Grelling, Richard), care implică noțiunile de adevăr, denumire și definire. O altă dificultate serioasă o constituie folosirea sau folosirile criptice ale termenului de funcție propozițională. Un al treilea obstacol în calea înțelegerii este legătura intimă cu axioma reductibilității.

Dacă însă folosim diversele distincții și procedee care au devenit uzuale în prezent, teoria ramificată a tipurilor poate fi identificată cu următorul sistem:

Admitem că există o infinitate de constante 0, 1, 2, ... care desemnează indivizi și variabile x, y ... care iau ca valori indivizi. Aceste constante și variabile se spun că sînt termenii de ordin **1**. Să presupunem un predicat P, astfel încît $P(a, b)$ este o propoziție atomică, dacă a și b sînt termeni de ordinul 1. Aceste propoziții împreună cu toate propozițiile obținute din ele prin folosirea conectivelor propoziționale (ale negației $\neg$ și conjuncției $\&$ de exemplu) precum și cuantorii generali (x) (pentru toți x) etc., și cuantorii particulari $(\exists x)$ (pentru un x) etc., sînt propozițiile de ordin 2. Termenii de ordin 2 sînt formați, în primul rînd, din acele propoziții de ordin 2 care conțin variabile libere, prin abstracție: de exemplu, $\hat{x}P(x, x)$, $\hat{y}\hat{z}(\exists x)[P(x, 0) \& \neg P(y, x) \& P(x, z)]$ etc. În general, dacă $F(x, ..., z)$ este o propoziție care conține (să zicem) numai m variabile libere, și anume x, ..., z, atunci $\hat{x} ... \hat{z}(F(x, ..., z))$ este o abstracție (o expresie de clasă) de ordin 2 și grad m definind o relație m—adică de indivizi (sau o clasă, atunci cînd m este 1). Semnificația acestor abstracții sînt determinate prin aserțiuni de forma următoare: $F(x, ..., z)$, dacă și numai dacă $(\hat{x}, ... \hat{z}F(x, ..., z))(x, ..., z)$. Introducem apoi variabilele ${}_1x^2$, ${}_1y^2$ etc., pentru clasele de ordin 2; ${}_2x^2$, ${}_2y^2$ etc., pentru relațiile diadice de ordin 2 etc. Toate abstracțiile și variabilele de ordin 2 se numesc termeni de ordin 2. Orice termen de ordin 2 urmat de un număr adecvat de termen de ordin 1 dă o altă propoziție atomică a sistemului: de ex. ${}_2x^2(1, x)$, $(\hat{x}P(x, x))(0)$ etc. Propozițiile obținute din acestea plus propozițiile de ordin 2 cu ajutorul conectivelor propoziționale și cuantorilor (x), $({}_1x^2)$, $(\exists {}_2y^2)$ etc. sînt de ordin 3. Propozițiile de ordin 3 includ pe cele de ordin 2 și sînt mai complexe numai atunci cînd figurează în ele variabile de ordin 2. Dintr-o propoziție de ordin 3 care conține variabile libere putem obține o abstracție de ordin 3 prin operația de abstracție: de exemplu, $\hat{x}[{}_2x^2(1, x)]$, $\hat{y}{}_3\hat{x}^2[({}_3x^2(0, y, 2) \& P(1, y)]$ etc. Atunci putem introduce din nou diversele specii de variabile de ordin 3 și genera propozițiile de ordin 4. Și așa mai departe.

Aceasta este, în fapt, teoria ramificată a tipurilor elaborată de Russell (fără axioma de reductibilitate care va fi discutată mai jos). Dacă dăm

constantelor individuale 0, 1, 2, ... și predicatului P o interpretare simplă (de exemplu, interpretîndu-le ca numere naturale și relația mai mic de) putem formaliza teoria într-un sistem axiomatic și demonstra consistența ei (a se vedea Fitch, „Journal of Symbolic Logic", 3, 1938). Datorită modului în care am construit sistemul în paragraful precedent, putem realiza o bine-ordonare a mulțimii tuturor propozițiilor sale în așa fel, încît negația unei propoziții p să figureze după p, conjuncția lui p și q să vină după p și q, și fiecare propoziție generală să vină după toate cazurile ei. La fel, după ce sistemul de axiome a fost prezentat, este ușor să dăm o definiție a adevărului conform căreia toate axiomele sînt adevărate și nici o negație a unei propoziții adevărate nu este adevărată. Consistența sistemului ar decurge imediat. Totuși noi nu vom examina detaliile axiomatizării și ale demonstrației de consistență, deoarece în orice caz nu este greu de văzut că teoria ne permite să evităm paradoxele cunoscute (a se vedea Russell 1908).

Mai serioasă este problema dacă această teorie este adecvată pentru derivarea teoriei mulțimilor și a ceea ce se poate construi în cadrul teoriei mulțimilor. În mod evident, demonstrația teoremei lui Cantor eșuează, deoarece nu se mai poate demonstra că există mulțimea N a tuturor mulțimilor k, care nu aparțin la $f(k)$ din cadrul demonstrației. Apar chiar și dificultăți în definiția identității. Mai mult, în derivarea teoriei numerelor naturale din teoria mulțimilor întîmpinăm obstacole, de îndată ce ajungem la demonstrarea principiului inducției matematice.

Russell a recunoscut (a se vedea: Russell, 1908, sau *Principia Mathematica*) aceste dificultăți și a propus să adoptăm în plus, ceea ce numește axioma de reductibilitate. Astfel, ordinul oricărei abstracții este, evident, cel puțin cu unu mai mare ca ordinul fiecărui argument al său. Dacă abstracția este de ordinul imediat superior (ordinului) celui mai înalt dintre argumentele sale, îl vom numi o abstracție *predicativă* a argumentelor sale. De exemplu, dacă ${}_1\hat{x}^2F({}_1x^2)$ este de ordinul 3, atunci el este o abstracție predicativă a argumentului său ${}_1x^2$, care este de ordinul 2. Axioma de reductibilitate este pur și simplu aceasta: Orice abstracție este echivalentă, pentru toate valorile sale, cu o (clasă definită printr-o) abstracție predicativă cu aceleași argumente. Cu ajutorul acestei axiome, enunțuri despre „toate abstracțiile predicative de x" dau rezultatele care ar fi necesitat, în caz contrar, „toate abstracțiile de x". Astfel, inducția matematică, de exemplu, nu trebuie să fie enunțată acum decît pentru toate abstracțiile predicative de numere; urmează atunci din axioma de reductibilitate că ea este valabilă pentru orice abstracție.

De la bun început, se pare că Russell se simțea stînjenit în ceea ce privește adevărul sau validitatea axiomei de reductibilitate. De cele mai multe ori, se pare că nu revendică pentru ea decît justificarea pragmatică — faptul că rezultatele la care duce sînt toate valide sau par astfel (a se vedea *Principia*, vol. 1, pp. 59—60 și ed. 2-a, p. XIV). În articolul său din 1908 (p. 242), el pretinde însă că axioma este implicată în admiterea de către bunul-simț a claselor care ne face să conchidem pentru o propoziție oarecare $F(e)$ de ordin arbitrar că ea este echivalentă, pentru toate valorile lui e, cu un enunț de forma „e aparține clasei A". Dar dacă echivalența are loc, atunci axioma de reductibilitate este justificată. După Russell, presupunerea că există în mod real asemenea lucruri cum sînt clasele nu prezintă nici un avantaj, iar

contradicțiile indică lipsa de claritate a noțiunii de clasă. El era convins de faptul că scopul principal pentru care servesc clasele și motivul principal care le face convenabile din punct de vedere lingvistic rezidă în faptul că ele oferă o metodă de reducere a ordinului unei propoziții sau abstracții.

Convingerea de atunci a lui Russell ar putea fi justă și se pare că este rezonabil să justificăm axioma de reductibilitate făcînd apel la ceea ce realizează bunul-simț prin admiterea claselor. Este limpede totuși că despre o teorie care cuprinde o axiomă justificată numai în acest fel nu se poate pretinde că este constructivă sau că este o „teorie fără clase".

În 1909, Poincaré a criticat dintr-un alt punct de vedere axioma de reductibilitate — și anume pe motivul că ea este mai chestionabilă și mai puțin clară decît principiul inducției matematice care, după Russell, urma să fie demonstrat pe baza axiomei de reductibilitate. Trei ani mai tîrziu, Chwistek a pus sub semnul întrebării în mod serios axioma respectivă și a propus să reținem teoria ramificată a tipurilor, dar să respingem axioma. Abia în anii 1920, Chwistek a început să ducă la îndeplinire, în mod amănunțit și formal, proiectul său de dezvoltare a teoriei ramificate a tipurilor fără axioma de reductibilitate. (În treacăt fie spus, multe dintre lucrările sale de mai tîrziu examinează problema diferită a construirii sistemelor formale care includ notații atît pentru conceptele matematice, cît și pentru cele semantice).

În 1921 îl vedem pe Chwistek făcînd prima propunere a noii simplificări, acceptate pe scară largă, a teoriei russelliene a tipurilor. Cinci ani mai tîrziu, Ramsey a făcut o distincție precisă (în „Proc. London Math. Soc.", **25**, 1926) între paradoxele matematice și cele semantice și a făcut o prezentare foarte clară a formei simplificate a teoriei tipurilor.

În teoria inițială a tipurilor, în afară de ordine, mai putem distinge așa cum a făcut Russell, și tipuri de diverși termeni. Tipul sau indexul-tip al termenilor de ordin 1 este 1, iar tipul unei abstracții este determinat de tipurile argumentelor sale. De exemplu, tipul unei abstracții $\hat{x}\hat{y}F(x, y)$ este (11) indiferent cît de complicat ar fi $F(x, y)$, iar tipul lui $\hat{x}_2\hat{y}^2G(x, {}_2y^2)$ este (1(11)) și așa mai departe. Indexul tip (sau pur și simplu tipul, atunci cînd nu există putință de confuzie) al unei abstracții este cu unu mai mare decît cel mai înalt index tip al argumentelor sale: de exemplu, $\hat{x}\hat{y}F(x, y)$ este de tip 2, iar $\hat{x}_2\hat{y}^2G(x, {}_2y^2)$ este de tip 3, deoarece ${}_2y^2$ este de tip 2 (a se vedea Carnap, 1929, „Abriss der Logistik", § 9 și § 13). Evident, două abstracții de același tip pot fi de ordine diferite, deoarece tipurile depind numai de argumente, pe cînd ordinele depind de gradul de complexitate al propozițiilor definitorii. De exemplu, $\hat{x}\hat{y}\,P(x, y)$ este de ordinul 2, dar $\hat{x}\hat{y}(\exists_1 x^2)({}_1x^2(x) \,\&\, \neg_1 x^2(y))$ este de ordinul 3; cu toate acestea, ambele expresii sînt de același tip. Spre deosebire de ordin, care este determinat prin modul în care este introdusă o abstracție, tipul unei abstracții este determinat complet prin extensiunea acesteia.

Pe baza analizei lui Chwistek și Ramsey, în măsura în care este vorba de conceptele matematice de clasă, apartenență etc., rezultatul obținut prin expulzarea axiomei de reductibilitate și totodată a distincției între ordine din teoria ramificată a tipurilor este, în esență, de aceeași putere ca sistemul inițial care păstrează atît axioma, cît și ordinele. Rezultatul astfel obținut

care depinde numai de distincția dintre indivizi, clase (și relații) de indivizi, clase (și relații) de acestea și așa mai departe este teoria simplă a tipurilor. Deoarece nu ne interesează paradoxele semantice, putem afirma, pur și simplu, că teoria ramificată a tipurilor cu axioma de reductibilitate este aceeași cu teoria simplă a tipurilor.

Acest lucru poate fi constatat în mod direct în felul următor (a se vedea Quine, „Mind", **45**, 1936). Conform axiomei de reductibilitate, orice abstracție este echivalentă cu o abstracție predicativă și orice variabilă are același domeniu cu variabila care are cel mai mic ordin compatibil cu tipul ei. Să înlocuim, în cadrul propozițiilor teoriei ramificate a tipurilor, toate variabilele și abstracțiile prin variabilele și abstracțiile lor echivalente de ordinele cele mai mici. Atunci, propozițiile și teoremele teoriei ramificate a tipurilor ar fi indiscernabile de cele ale teoriei simple a tipurilor, cu excepția unor abateri de notație minore.

O altă ameliorare remarcabilă a teoriei tipurilor este reducerea de către Wiener a relațiilor la clase („Proc. Cambridge Philos. Soc., **17**, 1914). Acesta a identificat o relație cu o clasă de perechi ordonate (sau o clasă de triplete etc.) și a arătat că perechea ordonată (sau tripletul ordonat etc.) ar putea fi definit înăuntrul teoriei claselor. Drept urmare, putem simplifica mai departe teoria tipurilor și să nu mai considerăm relații, ci numai indivizi, clase de indivizi și clase de clase de indivizi și așa mai departe. Șapte ani mai tîrziu, Kuratowski a prezentat (Kuratowski, „Fund. Math.", **2**, 1921) o definiție oarecum diferită, astăzi mai des folosită, a perechilor ordonate.

În majoritatea prezentărilor teoriei tipurilor, începînd cam din 1930, sînt adoptate cele două simplificări de mai sus privitor la ordine și relații. Două formulări standard, întrucîtva diferite, au fost date de către Gödel (Gödel, „Monatsh. Math. Phys.", **38**, 1931, pp. 176—178) și Tarski (Tarski, în *loc. cit.* **40**, 1933, pp. 97—103). Astăzi, cînd menționăm teoria tipurilor, avem în vedere, de regulă, un sistem de felul acestora. În aparență, ele diferă într-adevăr foarte mult de teoria lui Russell din 1908.

Să luăm formularea lui Gödel care se va numi sistemul T.

În linii mari, T conține ca primitivi operatorii funcții de adevăr, cuantorii, predicatul de apartenență $\in$, simbolul 0 pentru zero, simbolul f pentru funcția succesor și o infinitate de specii de variabile: $x_1, y_1, \ldots, x_2, y_2 \ldots$; ... Predicatul $\in$ intră numai în contexte de forma $x_n \in y_{n+1}$ etc. ($n = 1, 2 \ldots$). Axiomele și regulile de inferență ale sistemului T pot fi enunțate după cum urmează ($x_n = y_n$ desemnînd $(z_{n+1})(x_n \in z_{n+1} \equiv y_n \in z_{n+1})$).

A. Axiomele și regulile unei teorii a cuantificării (calcul al predicatelor) cu mai multe sorturi de variabile.

B. Axiome pentru indivizi.

1. $fx_1 \neq 0$.

2. $fx_1 = fy_1 \supset x_1 = y_1$.

3. $[0 \in x_2 \,\&\, (x_1)(x_1 \in x_2 \supset fx_1 \in x_2)] \supset y_1 \in x_2$.

C. Axiomele de extensionalitate ($n = 1, 2, \ldots$).

$$(z_n)(z_n \in x_{n+1} \equiv z_n \in y_{n+1}) \supset x_{n+1} = y_{n+1}.$$

D. Axioma de existență a mulțimilor (axioma comprehensiunii). Fie A o formulă oarecare, în care y_{n+1} nu figurează; atunci $(Ey_{n+1})(x_n)(x_n \in y_{n+1} \equiv \equiv A)$, $n = 1, 2$ etc.

E. Axioma alegerii. Dacă elementele x_{n+1} ale mulțimii x_{n+2} nu sînt vide și se exclud reciproc, atunci există o mulțime z_{n+1} care conține un element și numai unul din fiecare x_{n+1} în x_{n+2}.

Sistemul poate fi formulat în mod echivalent în diferite forme. Putem înlocui axiomele din grupul B, fie prin teoria mulțimilor finite G, astfel încît mulțimile finite să fie indivizii, fie prin întreaga teorie a numerelor Z, adică prin adăugarea definițiilor recursive pentru adunări și înmulțiri.

Este binecunoscut că:

TEOREMA 10. Sistemul T este traductibil în sistemul ZS obținut din ZF prin eliminarea axiomei de înlocuire Z9.

De exemplu, se poate folosi următoarea traducere. Să definim $x = y$ în modul alternativ prin $(z)(x \in z \equiv y \in z)$; vom defini:

$t_1(x)$, dacă și numai dacă $x = 0 \vee (Ey)(x = fy)$

$t_{n+1}(x)$, dacă și numai dacă $(y)(y \in x \supset t_n(y)) \& \sim t_1(x)$

$(x_n) Fx_n$, dacă și numai dacă $(x)(t_n(x) \supset Fx)$.

Totuși nu este adevărat că ZS este traductibil în T, chiar dacă aceste sisteme par să posede același model intuitiv. Aceasta, deoarece variabilele din ZS pot lua ca valori orice mulțime de tipuri diferite în același timp, pe cînd în T putem cel mult să facem ca o variabilă să ia ca valori mulțimi de un număr finit de tipuri. Acest fapt face plauzibilă posibilitatea de a caracteriza T în mod extern înăuntrul sistemului ZS. Într-adevăr, Kemeny a anunțat următorul rezultat („Journal of Symbolic Logic", **15**, 1950, p. 78, rezumat):

TEOREMA 11. O definiție normală a adevărului în T poate fi obținută în ZS, Con(T) se poate demonstra în ZS, ZS nu este traductibil în T.

O demonstrație amănunțită a teoremei ar cere precauții speciale datorită faptului că avem nu numai o infinitate de axiome, ci și o infinitate de specii de variabile.

Dacă slăbim întrucîtva ZS, adică ZF minus $Z9$, putem obține un sistem de aceeași tărie ca T.

TEOREMA 12. Dacă punem cerința ca în Aussonderungsaxiom Z3 orice cuantor în predicatul Fx să fie restrîns printr-o variabilă liberă în Fx și distinctă de variabila x, de exemplu $(z)(z \in u \supset Gz)$, $(Ew)(w \in v \& Hw)$, atunci teoria slăbită ZS este de aceeași tărie ca T.

Intuitiv vorbind, deoarece în definirea noii mulțimi u, v sînt întotdeauna mulțimi date și deci de tipuri fixate, cuantorii iau ca valori numai mulțimi de tipuri fixate și nu pot lua ca valori toate mulțimile în același timp. Formalizarea unei asemenea demonstrații ar cere atenție în ce privește extinderea lui T, pentru ca să permită amestecul tipurilor, extindere care poate fi realizată cu un oarecare efort.

Cu titlul de curiozitate, citãm următoarele rezultate simple din „Math. Annalen", **125**, 1952, pp. 65—66.

Deoarece nu pare probabil să putem genera clase de o infinitate de tipuri plecînd numai de la un număr finit de axiome de clase, ne putem aștepta ca ireductibilitatea axiomei comprehensiunii pentru T la un număr finit oarecare de propoziții să poată fi demonstrată.

Vom demonstra următoarea teoremă:

4.01. Dacă T' este un sistem arbitrar obținut prin folosirea teoriilor cuantificării pentru toate tipurile de variabile și incluzînd ca axiome cazurile axiomei de extensionalitate (C) plus un număr finit de axiome adiționale, atunci sau T' este inconsistent, sau este imposibil să derivăm în T' toate cazurile axiomei de comprehensiune (D).

Demonstrație. În cadrul axiomelor adiționale în număr finit pot figura numai variabile mergînd pînă la un tip finit definit, să spunem n. Fie T'_n acea parte a lui T' în care figurează numai variabile de tip n sau de tip inferior lui n. Dacă T' este consistent, atunci T'_n este consistent și admite un model. Dacă extindem modelul, presupunînd (să spunem) în fiecare tip superior lui n o singură clasă care conține ca elemente toate clasele de tip imediat inferior, atunci obținem un model pentru T' care nu este satisfăcut de către axioma de comprehensiune (D). Cu alte cuvinte, putem face o traducere a lui T' în T'_n, astfel încît traducerile tuturor teoremelor lui T' sînt teoreme ale lui T'_n, dar există numeroase cazuri ale axiomei (D) ale căror traduceri nu sînt teoreme ale sistemului T'_n. De exemplu, putem folosi următoarea traducere. Fiecare propoziție sau parte a unei propoziții, de forma $x_m \in y_{m+1} (m > n)$ se înlocuiește printr-o tautologie, de exemplu, $(x_1)\,(x_1 = 0 \vee \sim x_1 = 0)$, iar una de forma $x_n \in y_{n+1}$ se înlocuiește $(x_{n+1})\,(x_{n-1} \in x_n \vee \sim x_{n-1} \in x_n)$ dacă $n > 1$, sau prin $(x_n = 0 \vee \sim x_n = 0)$, dacă n este 1; după ce am efectuat pretutindeni aceste înlocuiri, omitem cuantorii vizi care nu mai sînt atașați unor variabile (de tipuri superioare lui n) și numim rezultatele obținute traducerile în T'_n ale propozițiilor originale ale lui T'. Se poate verifica faptul că traducerile tuturor axiomelor și regulilor teoriilor cuantificării rămîn valide, traducerile tuturor cazurilor axiomei de extensionalitate sînt teoreme ale lui T'_n, iar traducerile axiomelor adiționale sînt aceleași cu propozițiile inițiale; dar, de exemplu, negația traducerii cazului $(\exists\, y_{n+1})\,(x_n)\,(x_n \in \in y_{n+1} \equiv \sim x_n = x_n)$ al lui (D) este de asemenea teoremă a lui T'_n, astfel încît propoziția în cauză trebuie să fie independentă de axiomele lui T'.

Deoarece această concluzie în 4.01 pare plauzibilă chiar fără demonstrația noastră, am dori eventual să găsim un rezultat mai puternic, de exemplu: nu există nici o mulțime infinită de propoziții dintre care numai un număr finit privesc fiecare tip în parte și din care să putem deriva toate axiomele lui T. Se constată că putem demonstra negația acestui fapt. Putem demonstra:

4.1. Putem găsi o submulțime S a mulțimii propozițiilor lui T care cad sub axioma comprehensiunii (D), astfel încît (1) pentru orice n numai un număr finit de propoziții de forma $(\exists\, y_{n+1})\,(x_n)\,(x_n \in y_{n+1} \equiv A)$ aparțin lui S și (2) prin substituirea elementelor lui S în locul tuturor cazurilor lui (D) din sistemul T, obținem un sistem în care putem deriva toate cazurile lui (D) și deci și toate axiomele lui T.

Demonstrație. Observăm că în T putem formula teoria uzuală a identității, fără a face apel la axioma comprehensiunii și că putem defini clasa unitate $\{x_n\}$ a unei clase sau a unui număr natural x_n într-un mod uzual. Să enumerăm toate propozițiile lui T, în care nu intră nici una dintre variabilele $y_2, y_3, y_4, \ldots$: $F_1, F_2, F_3 \ldots$ Este evident suficient să derivăm pentru orice n dat toate propozițiile $(\exists\, y_{n+1})\,(x_n)\,(x_n \in y_{n+1} \equiv F_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Afirmăm că următoarele cazuri ale axiomei (D) sînt suficiente pentru derivarea tuturor cazurilor lui (D), folosind celelalte axiome ale sistemului T.

4.1.1. $(\exists\, y_2)\,(x_1)\,(x_1 \in y_2 \equiv x_1 = w_1)$.

4.1.2. $(\exists\, y_2)\,(x_1)\,(x_1 \in y_2 \equiv \{x_1\} \in z_3)$.

4.1.3. $(\exists\, y_2)\,(x_1)\,(x_1 \in y_2 \equiv F_1)$.

4.2.1. $(\exists\, y_3)\,(x_2)\,(x_2 \in y_3 \equiv x_2 = w_2)$.

4.2.2. $(\exists\, y_3)\,(x_2)\,(x_2 \in y_3 \equiv \{x_2\} \in z_1)$.

4.2.3. $(\exists\, y_3)\,(x_2)\,(x_2 \in y_3 \equiv (\exists\, x_1)\,(x_2 = \{x_1\} \,\&\, F_2))$.

4.2.4. $(\exists\, y_3)\,(x_2)\,(x_2 \in y_3 \equiv F_1)$.

4.2.5. $(\exists\, y_3)\,(x_2)\,(x_2 \in y_3 \equiv F_2)$.

4.3.1. $(\exists\, y_4)\,(x_3)\,(x_3 \in y_4 \equiv x_3 = w_3)$.

4.3.2. $(\exists\, y_4)\,(x_3)\,(x_3 \in y_4 \equiv \{x_3\} \in z_4)$.

4.3.3. $(\exists\, y_4)\,(x_3)\,(x_3 \in y_4 \equiv (\exists\, x_2)\,(x_3 = \{x_2\} \,\&\, F_3))$.

4.3.4. $(\exists\, y_4)\,(x_3)\,(x_3 \in y_4 \equiv (\exists\, x_2)\,(x_3 = \{x_2\} \,\&\, (\exists\, x_1)\,(x_2 = \{x_1\} \,\&\, F_3)))$.

4.3.5. $(\exists\, y_4)\,(x_3)\,(x_3 \in y_4 \equiv F_1)$.

4.3.6. $(\exists\, y_4)\,(x_3)\,(x_3 \in y_4 \equiv F_2)$.

4.3.7. $(\exists\, y_4)\,(x_3)\,(x_3 \in y_4 \equiv F_3)$.

Și așa mai departe, și așa mai departe.

Astfel din 4.1.1, 4.1.2, și 4.2.3., putem deriva:

4.1.4. $(\exists\, y_2)\,(x_1)\,(x_1 \in y_2 \equiv F_2)$.

În mod similar, din 4.2.1, 4.2.2, și 4.3.3 putem deriva:

4.2.6. $(\exists\, y_3)\,(x_2)\,(x_2 \in y_3 \equiv F_3)$.

Din 4.2.1, 4.2.2 și 4.3.4 putem deriva:

4.2.7. $(\exists\, y_3)\,(x_2)\,(x_2 \in y_3 \equiv (\exists\, x_1)\,(x_2 = \{x_1\} \,\&\, F_3))$.

Din 4.1.1., 4.1.2., și 4.2.7 putem deriva:

4.1.5. $(\exists\, y_2)\,(x_1)\,(x_1 \in y_2 \equiv F_3)$.

În general, pentru orice n, sînt necesare $(2n + 1)$ axiome de forma $(\exists\, y_{n+1})\,(x_n)\,(x_n \in y_{n+1} \equiv A)$ și, fiind date toate axiomele de acest fel pentru tipurile

de la 1 la k, putem demonstra toate propozițiile $(\exists y_{n+1})(x_n)(x_n \in y_{n+1} \equiv F_i)$, unde n și i pot lua fiecare în parte orice valoare de la 1 la k. În consecință, fiind date asemenea axiome pentru toate tipurile, putem deriva toate cazurile axiomei comprehensiunii (D).

O extindere naturală a sistemului T constă, după cum se pare, în posibilitatea de a folosi tipuri negative. O asemenea teorie a fost sugerată într-o notă în „Mind", **61**, 1952, pp. 366—368. Vom cita integral această notă.

Teoria simplă a tipurilor T operează cu relația de apartenență între indivizi (entități de tip 0), clase de indivizi (entități de tip 1), clase de clase de indivizi (entități de tip 2) și așa mai departe, *ad infinitum*. Principiile fundamentale (axiomele) sînt trei: (1) axioma comprehensiunii — fiind dată o propoziție a teoriei cu privire la entitățile de tip $n-1$, există o clasă de tip n care conține toate entitățile, și numai acele entități pentru care propoziția este adevărată; (2) axioma extensionalității — două clase arbitrare de tip n sînt identice (adică pot fi puse una în locul celeilalte în cadrul fiecărei propoziții fără a afecta adevărul sau demonstrabilitatea acestora din urmă), dacă ele conțin aceleași elemente (de tip $n-1$); (3) axioma infinitului — există cel puțin o clasă infinită.

În această teorie, indivizii ocupă un loc aparte. În primul rînd, ei nu satisfac axioma extensionalității (2) așa cum este dată, deoarece nu există entități de tip inferior tipului indivizilor. Într-adevăr, se poate argumenta că în logică și matematică nu avem nici un motiv să luăm în discuție indivizii. Astfel, în abordarea concurentă a logicii în teoria claselor de tip zermelian este astăzi un lucru obișnuit să se omită orice referire la entitățile care nu sînt clase, entități care inițial au fost admise în mod explicit.

O problemă foarte controversată în legătură cu T o constituie statutul axiomei infinitului. Dacă nu adoptăm o asemenea axiomă specială, celelalte două principii nu garantează, după cum se pare, că trebuie să existe o clasă infinită. De exemplu, pe baza axiomei de comprehensiune, putem demonstra că există o clasă vidă E de tip 1, că există clasa unitate a acesteia $u(E)$, că există clasa unitate $u(u(E))$ a acesteia din urmă și așa mai departe. Dar totalitatea acestor clase nu este o clasă în T, întrucît ele sînt de tipuri diferite. În mod alternativ, am putea să raționăm după cum urmează. Dat fiind că există cel puțin o clasă de tip 1 (respectiv E), există cel puțin 2 clase de tip 2, 4 clase de tip 3, 16 de tip 4. În consecință, putem căpăta o clasă finită oricît de mare am dori. Totuși, așa cum subliniază Russell, aceasta nu ne este de nici un folos, deoarece nici o clasă infinită nu va fi generată vreodată printr-un asemenea procedeu.

Într-un fel sau altul, mulți înclină să creadă că axioma infinitului este mai chestionabilă decît celelalte principii ale sistemului T, că spre deosebire de axiomele (1) și (2), ea nu este, probabil, nici analitică, nici aprioric. Există cel puțin un argument puternic în favoarea acestei impresii. Consistența lui T fără axioma infinitului (3) este cunoscută, în timp ce, într-un sens cît se poate de definit, chestiunea consistenței lui T inclusiv (3) rămîne deschisă.

Cu titlul de curiozitate, vom considera o extensiune T' a teoriei T, care include și „tipuri negative". În loc de indivizi, vom vorbi despre clase de tip 0. În plus, vom introduce și clase de tip -1 (orice ar putea însemna ele), clase de tip -2 și așa mai departe. Axiomele de comprehensiune și de exten-

sionalitate vor fi reconstruite pentru a acoperi toate aceste clase (n luînd ca valoare orice număr întreg), iar axioma infinitului va fi eliminată.

În teoria T', care rezultă nu mai există indivizi și toate tipurile sînt pe picior de egalitate cel puțin prin faptul că pentru fiecare tip avem atît o infinitate de tipuri superioare, cît și o infinitate de tipuri inferioare. Mai mult, s-ar părea că în T' este posibil să argumentăm, fără a face apel la axioma infinitului, că există clase infinite.

Să considerăm, de exemplu, clasele de tip 2. Conform axiomei de comprehensiune în T', există o clasă vidă E_1 de tip 1; în consecință, există clasa $u(E_1)$ de tip 2, cu un singur element. În mod similar, există o clasă vidă E_0 de tip 0; în consecință există două clase E_1 și $u(E_0)$ de tip 1 și există o clasă de tip 2 care conține ca elemente pe acestea două. În mod similar există clasa vidă de tip — 1, există două clase de tip 0, 4 clase de tip 1 și, în consecință, 1 clasă de tip 2 cu 4 elemente. Și așa mai departe. Vedem că trebuie să existe o clasă infinită de tip 2. La fel, pentru fiecare tip k, trebuie să existe o clasă infinită de tip k.

Ca alt exemplu, să considerăm clasa universală V_1 de tip 1, care există conform axiomei de comprehensiune. Există, de asemenea, o clasă V_0 de tip 0, astfel încît V_1 conține toate subclasele și numai subclasele lui V_0. În mod similar există o clasă V_{-1} de tip — 1, astfel încît V_0 conține toate subclasele și numai subclasele lui V_{-1}. Și așa mai departe. Se poate demonstra cu ușurință, utilizînd raționamentele din paragraful precedent, că fiecare din aceste clase V_1, V_0, V_{-1} etc. conține mai mult decît un singur element. În consecință, clasele V_1, $u(V_0)$ și $u(u(V_{-1}))$ etc. sînt toate de tip 1 și distincte între ele. Așadar, clasa de tip 2, care le conține pe toate este o clasă infinită. La fel în cazul oricărui alt tip.

Se pune acum problema dacă putem formaliza unele raționamente de acest gen în T' și dacă putem demonstra o axiomă a infinitului pe baza celorlalte principii. A reieșit că o asemenea formalizare este în mod demonstrabil imposibilă. Dar motivele sînt mai puțin evidente ca în cazul sistemului inițial T.

Dacă am putea demonstra axioma infinitului în T', T' ar fi cel puțin tot atît de tare ca T, întrucît fiecare teoremă a lui T ar fi totodată o teoremă a lui T'. În consecință, o demonstrație de consistență pentru T' ar da o demonstrație similară pentru T. Conform unei teoreme stabilite de Gödel, consistența unui sistem destul de tare (cum ar fi T) nu poate fi demonstrată în cadrul sistemului însuși. Așadar, dacă axioma infinitului ar fi demonstrabilă în T', ar urma că nici o demonstrație de consistență pentru T' nu este formalizabilă în T. Dar acest lucru nu este adevărat, căci se demonstrează ușor consistența lui T' în felul următor. Dacă T' ar fi inconsistent, am fi capabili să derivăm o contradicție dintr-un număr finit de cazuri ale principiilor de comprehensiune și extensionalitate. Aceste propoziții în număr finit conțin numai variabile de un număr finit de tipuri. Să presupunem că n este cel mai mic tip al variabilelor care figurează în acele propoziții. Folosind raționamente binecunoscute, putem demonstra, în acest caz, consistența acestor propoziții prin construirea unui model în care unica entitate de tip n este clasa vidă E_n. Așadar, T' nu este inconsistent. Mai mult, raționamentul poate fi formalizat cu ușurință în T. În consecință, T' nu poate fi tot atît de tare ca T, iar axioma infinitului nu este demonstrabilă în T'.

Dacă examinăm mai îndeaproape raționamentele pentru generarea claselor infinite, vom constata că în fiecare caz în parte sînt implicate o infinitate de tipuri diferite. Pentru a formaliza aceste raționamente în T', s-ar părea că este necesar să facem o inducție după indicii tipurilor. Totuși, întrucît indicii servesc numai ca semne de comunicare din sintaxa lui T', această inducție poate fi efectuată numai în cadrul sintaxei lui T', însă nu în cadrul lui T' însuși. Așadar, chiar în absența demonstrației de indemonstrabilitate, ar fi rezonabil să presupunem că nu există o derivare a axiomei infinitului în T'. Ar fi interesant să cercetăm dacă prin combinarea sistemului T' cu sintaxa sa am putea obține un sistem consistent în care toate sau aproape toate teoremele lui T au imagini sau grafe.

Recent, Specker a dat („Dialectica", nr. 47/48, 1958, pp. 451—465) o relație interesantă între teoria tipurilor negative și binecunoscutul sistem NF al lui Quine („Am. Math. Monthly", **44**, 1937, pp. 70—80).

Sistemul NF conține, ca și ZF, o singură specie de variabile și un singur predicat primitiv, $\in$. Atunci, $x = y$ se definește prin $(z)(x \in z \equiv y \in z)$. Avem o singură axiomă și o singură schemă de axiome

N1. $(w)\,(w \in x \equiv w \in y) \supset x = y$.

N2. Dacă Fx este stratificat, adică dacă putem să atribuim indici variabilelor, în așa fel încît Fx să devină o formulă a teoriei tipurilor, atunci $(Ey)\,(x)\,(x \in y \equiv Fx)$.

Problema consistenței lui NF rămîne nesoluționată. Specker demonstrează însă:

Teorema 13. Teoria tipurilor negative admite un model astfel încît dacă A este adevărat atunci A^*, obținut din A prin mărirea cu 1 a fiecărui index de tip este adevărată, dacă și numai dacă NF este consistent.

Astfel, dacă NF este consistent, atunci el are un model M. Atunci putem defini un model pentru teoria tipurilor negative prin corelarea fiecărui a în M cu toți (a,k), $k = 0, -1, 1, \ldots$ și să definim $a_k \in b_{k+1}$, dacă și numai dacă $a \in b$ în M.

Reciproc, dacă teoria tipurilor negative admite un model de felul cerut, atunci, așa cum demonstrează Specker, există o corespondență biunivocă între mulțimile de tip k în model și mulțimile de tipul $k + 1$, pentru fiecare k. Dacă f este o funcție care este aplicația, atunci axiomele lui NF sînt satisfăcute la rîndul lor, dacă luăm obiectele în modelul pentru teoria tipurilor negative și interpretăm $a \in b$ pentru NF ca $a \in f(b)$ în modelul dat.

Un alt rezultat remarcabil cu privire la NF obținut de Specker este („Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.", **39**, 1953, pp. 972—975):

Teorema 14. Dacă la sistemul NF adăugăm axioma alegerii, atunci sistemul care rezultă este inconsistent; mai mult, întrucît axioma alegerii pentru mulțimi finite este demonstrabilă în NF, axioma infinitului este derivabilă în NF.

Intuitiv vorbind, NF are proprietatea uimitoare că dacă V este mulțimea universală, V_1 este mulțimea tuturor submulțimilor unitate ale lui V și așa mai departe, numerele cardinale ale lui V, V_1, V_2, ... formează un șir descrescător rapid și fiecare mulțime anterioară conține toate mulțimile ulterioare. O mulțime alcătuită din V, V_1, V_2, ... ar face să fie falsă axioma alegerii.

Totuși o asemenea mulțime nu poate fi definită în NF, condiția fiind nestratificată. Specker consideră fiecare număr cardinal m și definește un șir $g(m)$ care începe cu m și are 2^a ca succesor al fiecărui termen a. Pentru a garanta că ele au același tip, 2^a este luat ca puterea tuturor submulțimilor unei mulțimi A, astfel încît mulțimea tuturor mulțimilor unitate ale elementelor lui A are puterea a. Dacă există un șir infinit $g(m)$, atunci există o mulțime de numere cardinale care nu conține cel mai mic element și axioma alegerii este încălcată. Dacă $g(m)$ este finit pentru unii m, atunci, conform axiomei alegerii, există cel mai mic dintre acești m. În acest caz, Specker reușește să derive o contradicție, comparînd $g(m)$ cu șirul mulțimilor sale reprezentative.

Anterior, s-a făcut o încercare de a demonstra aceeași concluzie pe baza următorului raționament („Math. Zeitschr." **59**, 1953, pp. 47—56). Există o axiomatizare finită a lui NF (Hailperin, „J. Symbolic Logic", **9**, 1944, pp. 1—19). Cu ajutorul axiomei alegerii putem defini așadar în NF o formulă care ar enumera toate mulțimile cerute printr-un număr finit de axiome. Aceasta ne permite să enunțăm în NF o axiomă de enumerabilitate care cere ca să existe numai aceste mulțimi. Din punct de vedere intuitiv, această nouă axiomă ar fi compatibilă cu axiomele lui NF plus axioma alegerii. Dar atunci, pe baza raționamentului diagonalei, putem da în NF o mulțime distinctă de toate mulțimile construite. Așadar, sistemul obținut ar fi inconsistent. Întrucît este inconsistent relativ la NF plus axioma alegerii, axioma alegerii trebuie să fie falsă în NF, așadar obținem o altă demonstrație a teoremei de mai sus. Reciproc, fiind dată axioma de enumerare, axioma alegerii este demonstrabilă, astfel încît axioma de enumerare este falsă în NF. Acest raționament nu a fost dus pînă la capăt, deoarece, pentru a aplica argumentul diagonalei, este necesar să dispunem de mulțimea tuturor acelor m astfel încît m aparține celei de a m-a mulțime din cadrul enumerării. Această mulțime se definește printr-o condiție nestratificată și ca atare nu poate fi obținută direct în NF. Pentru a completa raționamentul, am trebui să ne străduim să demonstrăm că o atare mulțime intervine în cadrul modelului.

Un alt rezultat interesant cu privire la NF — desigur, fără axioma alegerii — este acela că, într-un anumit sens, NF nu admite modele standard, cu toate că inconsistența sistemului nu este cunoscută. Acest rezultat a fost demonstrat într-un articol al lui Rosser și al autorului („Journal of Symbolic Logic", 1950). Rezultatul este relativ la o dezvoltare naturală în NF de către Rosser a teoriei numerelor și a teoriei numerelor ordinale infinite.

Întrucît interpretarea căutată sau modelul standard al unei teorii a mulțimilor nu este numărabil și este „maximal", nu este ușor să stabilim condițiile suficiente care asigură că un model este standard. În orice caz, pentru a înțelege corect condițiile, ar trebui să presupunem modelul standard. Ceva mai ușor este să dăm condițiile necesare explicite pe care trebuie să le satisfacă un model standard. De exemplu, un model nu este standard, dacă este îndeplinită una dintre aceste condiții: (a) dacă relația care reprezintă relația de egalitate în cadrul sistemului formal nu este relația de egalitate pentru obiectele din cadrul modelului; (b) obiectele presupuse a reprezenta numerele naturale se pot obține din modelul pentru numărul inițial printr-un număr finit de aplicări ale operației succesor; (c) obiectele din cadrul modelului care sînt presupuse a reprezenta numerele ordinale nu sînt bine ordonate pe baza relației de ordine a modelului.

Pe baza lui (b) sau pe baza teoremei 14, axioma infinitului trebuie să aibă loc într-un model standard pentru *NF*. În consecință, teoria numerelor ordinale infinite poate fi dezvoltată în *NF* în mod similar celui în care o dezvoltă Rosser pentru un sistem înrudit („Journal of Symbolic Logic", 7, 1942, pp. 1—17). În consecință, în *NF* putem deriva paradoxul lui Burali-Forti, cu condiția ca principiul inducției transfinite să se poată demonstra pentru o anumită formulă particulară a lui *NF*. Dar, conform cu (c), dacă modelul este standard, principiul trebuie să fie adevărat în cadrul modelului. Așadar, sau *NF* este inconsistent, adică nu are nici un model, sau, dacă are un model, nu are un model standard.

Sistemul înrudit pe baza căruia Rosser a derivat paradoxul lui Burali-Forti este sistemul propus de Quine în 1940, în cartea sa *Mathematical Logic*. În 1950, autorul a refăcut sistemul astfel încît rezultatul este o extindere impredicativă a lui *NF*, raportată față de acest sistem la fel cum se raportează *NQ* la *ZF*, și a demonstrat consistența acestei extinderi relativ la *NF*. Acest sistem modificat a fost adoptat de către Quine în ediția revizuită a cărții sale și este cunoscut adesea în literatură sub denumirea de *ML*. În paragraful următor vom reproduce integral acest articol din 1950 („Journal of Symbolic Logic", **15**, pp. 25—32). Sistemul formal *P* în cadrul său este sistemul *ML*.

§ 5. UN SISTEM FORMAL DE LOGICĂ

Scopul principal al acestui paragraf este de a prezenta un sistem formal *P*, în care dispunem de un procedeu lesnicios și care conține un univers de clase simetric între mare și mic. Mai exact, *P* este un sistem care diferă de sistemul inconsistent din [1] numai prin introducerea unei condiții restrictive noi destul de firești asupra definirii formulelor pentru elemente (mulțimi, clase cu membri selecționabili). Se va demonstra că dacă sistemul mai slab din [2] este consistent, atunci *P* este și el consistent.

După cum se știe, după descoperirea paradoxelor, Russell și Zermelo au propus în același an două modalități diferite de salvgardare a logicii de contradicții. (A se vedea [3], [4]). De atunci, aceste sisteme au suferit numeroase simplificări și rafinări. Totuși, în cadrul sistemelor de teorie zermeliană a mulțimilor, generarea claselor continuă să rămînă laborioasă și nesigură; iar în sistemele teoriei russelliene a tipurilor persistă complicații în ce privește reduplicarea claselor și semnificanța formulelor. În [27], Quine a introdus un sistem care părea a fi scutit de toate aceste complicații. Ulterior însă s-a descoperit că acest sistem prezintă o dificultate de neînlăturat legată de inducția matematică. Într-adevăr, sîntem puși în fața situației curioase că, deși putem să demonstrăm în sistem existența unei clase V a tuturor claselor, și putem să demonstrăm de asemenea teoreme particulare de existență pentru fiecare clasă a acestei infinități, nimeni nu a reușit să demonstreze în sistem că V este o clasă infinită sau că există în genere o clasă infinită. În speță, pînă acum nu am fost capabili să demonstrăm în cadrul sistemului teorema că pentru fiecare număr natural n există o clasă cu n elemente. Cu alte cuvinte, nu am fost capabili să demonstrăm în el *axioma infinitului* cerută de regulă atunci cînd construim matematica pe baza teoriei tipurilor. Și, ca o conse-

cință, nu putem demonstra în sistem nici măcar axioma lui Peano — anume că dacă succesorii a două numere naturale m și n sînt identici, atunci m și n sînt identici — dacă nu admitem că există o clasă cu $m + 1$ elemente (Cf. [5] și [6], în special $T16$ din [5]).

Pentru a depăși această dificultate, Quine a fost obligat să adopte în [1] un mijloc folosit în teoriile mulțimilor în genul lui v. Neumann — Bernays — Gödel (A se vedea [7], [8], [9]). Ca și aceste sisteme, sistemul din [1] conține o bifurcare a claselor în elemente și nonelemente. El diferă de sistemul din [7], [8], [9] prin faptul că posedă un domeniu diferit de elemente. Conform lui Quine, elementele din [1], corespund claselor din [2] (a se vedea [1], p. 165, rîndul 8 de jos).

Acest sistem din [1] a fost preferat atît pentru ușurința de manipulare de care ne bucurăm în cazul său, cît și pentru universul simetric pe care ni-l oferă. Apoi, Rosser în [10] și Lyndon, în mod independent, au discreditat sistemul, arătînd că el admite paradoxul lui Burali-Forti. Pentru a face față acestei situații, Quine a propus în [11] o orientare în direcția unei economii accentuate în axiomele pentru elemente. El sugerează să aderăm la un minimum de axiome de acest fel, atunci cînd trebuie să trecem la ramuri superioare ale teoriei. În [11] sînt considerate două mulțimi de axiome slabe destinate să înlocuiască axioma supărătoare *200 de elementaritate și se arată că aceste mulțimi sînt adecvate ambele la scopurile urmărite în [1]. Recent, am propus în [12] un sistem cu axiome încă și mai slabe și am arătat că sistemul este adecvat în aceleași scopuri.

În opoziție cu procedeele de acest tip, s-au propus alte două tipuri de orientări. Pe de o parte, s-a formulat acuzația că programul de mai sus lasă, în mod perpetuu, sistemele logice în poziția precară de a putea da naștere unor contradicții neprevăzute. Așa, de exemplu, Fitch sugerează în [13] un procedeu alternativ de a ne menține în cadrul domeniului cert în care consistența este asigurată și să-l extindem pe cît de departe este posibil. Într-adevăr, orientarea în această direcție a dus la multe rezultate interesante. Atît articolele recent publicate de Fitch cu privire la logica lui de bază și extinderile acesteia, cît și contribuțiile lui Quine și Goodman în direcția nominalismului lor par să meargă în această direcție. Mai mult, considerăm că aceeași orietare este reprezentată și în lucrările de dată mai veche ale școlii intuiționiste a lui Brouwer și Weyl, precum și în cele ale școlii nominaliste a lui Chwistek.

Pe de altă parte, putem considera că această trăsătură a postulării fragmentare este nesatisfăcătoare, în care caz am dori să construim un sistem similar celui din [1], dar în care contradicțiile să nu mai fie derivabile. Pe această linie se înscrie sugestia făcută de Black în [14] de a încerca să modificăm sistemul din [1] foarte puțin, numai atît cît este necesar pentru a suprima demonstrația contradicțiilor. Eu însă nu cunosc sisteme recente construite în acest spirit; acest fapt se datorește probabil lecției scoase din inconsistența altor sisteme îndrăznețe. În articolul de față îndrăznesc să prezint un sistem P, care concordă, pare-se, destul de bine, cu programul lui Black.

Vom descrie mai întîi în mod succint sistemul din [1]. Dacă adoptăm teoria funcțiilor de adevăr (calculul propozițional) și teoria cuantorilor (calculul funcțional de ordinul 1) de la bun început, putem descrie sistemul ca înglobînd ca primitiv un singur predicat cu două locuri $\in$, pornind de la care putem construi formule (bine formate) la modul obișnuit. Vom spune că o formulă

este *stratificată* dacă este posibil să punem în locul variabilelor ei numerale în așa fel, încît $\in$ este flancat întotdeauna de numerale crescătoare în mod consecutiv; atunci putem enunța (cu modificări neesențiale) axiomele din [1] după cum urmează:

*200. Dacă φ este stratificat și nu are alte variabile libere în afară de $x, y_1, \ldots, y_n$ atunci $\vdash (\exists z_1)(y_1 \in z_1). \ldots . (\exists z_n)(y_n \in z_n). \supset (\exists y)(\hat{x}\varphi \in y)$.

*201. $(w)(w \in x \equiv w \in y) \supset . x \in z \supset y \in z$.

*202. Dacă y nu este liber în φ, $\vdash (\exists y)(x)(x \in y \equiv .(\exists z)(x \in z). \varphi)$.

Aici, $(\exists y)(x \in y)$, dacă și numai dacă x este un element, iar formula $(\exists y)(x \in y)$ înlocuiește formula $x \in V$ din [1]. (Pentru justificarea acestui procedeu a se vedea [15], p. 157). Formulele $\hat{x}\varphi \in y$ sînt abrevieri definite după cum urmează:

*Df*1. $x \in \hat{x}\varphi$ pentru $(\exists z)(x \in z). \varphi$.

*Df*2. $z = \hat{x}\varphi$ pentru $(x)(x \in z \equiv x \in \hat{x}\varphi)$.

*Df*3. $\hat{x}\varphi \in y$ pentru $(\exists z)(z = \hat{x}\varphi . z \in y)$.

*Df*1 acoperă cazurile speciale din *D*9′ din [16] care, așa cum se arată în [16], pot fi folosite pentru a înlocui *D*9 din [1].

Se spune că o formulă este *normală*, dacă toate variabilele legate din cadrul ei sînt variabile de element; sau, altfel spus, dacă toate cuantificările sînt de forma $(\exists z)(y \in z), (x)((\exists z)(x \in z) \supset \varphi)$ sau $(\exists x)((\exists z)(x \in z). \varphi)$, unde φ este o altă formulă. Atunci P poate fi caracterizat ca sistem ce diferă de sistemul din [1] numai prin faptul că în locul lui *200 conține următoarea:

**200. Dacă φ este normală și stratificată și (etc. ca în *200).

Înainte de a trece la discuția problemei consistenței sistemului P, vreau să subliniez că Quine se înșeală atunci cînd consideră că elementele din [1] corespund claselor din [2]. Sistemul din [2] poate fi caracterizat ca un sistem asemănător cu cel din [1], cu excepția faptului că în locul axiomelor *200—*202 conține următoarele două axiome:

*F*1. Dacă φ este stratificată și y nu este variabilă liberă în φ, $\vdash (\exists y)(x)(x \in y \equiv \varphi)$.

*F*2. $(w)(w \in x \equiv w \in y) \supset . x \in z \supset y \in z$.

Trebuie să fie evident că există elemente în sistemul din [1] care nu își au corespondenții lor printre clasele din [2], deoarece în formulele care definesc elementele din [1] pot intra variabile legate de clasă oarecare care, în interpretarea normală, nu au corespondent în [2]. Mai precis, elementele supărătoare $\mathrm{seg}_\alpha \leqslant$, $Nr(P), \leqslant$ din sistemul din [1] folosite în derivarea paradoxelor de către Rosser corespund direct elementelor care nu sînt clase din [2]. Pe de altă parte, este evident, de asemenea, că elementele lui P corespund în mod precis claselor din [2]. Într-adevăr, putem presupune chiar că P este sistemul pe care intenționa inițial să-l prezinte Quine, dar pe care l-a prezentat în mod eronat. Dacă sistemul P ar fi fost descoperit anterior, ar fi fost mult mai ușor să fie revizuită cartea [1] pentru a face față situației create prin apariția lui [10].

În cadrul lui P, cartea lui Quine [1] poate fi expusă integral fără modificări, cu excepția înlocuirii în cîteva demonstrații a axiomei *200 prin **200. Nu

este greu de văzut că P este o teorie mai bogată decît teoria simplă a tipurilor (lăsînd la o parte axioma infinitului și axioma alegerii). Într-adevăr, dacă ținem seama de faptul că sistemul din [2] se obține din teoria tipurilor prin atenuarea unor restricții, vedem că domeniul elementelor lui P este din capul locului mai bogat ca domeniul claselor teoriei tipurilor. Mai mult, se poate demonstra în P și o teoremă corespunzătoare axiomei infinitului din teoria tipurilor. Dacă definim un număr natural n ca clasă a tuturor claselor cu n elemente, putem formula astfel axioma infinitului (a se compara cu *125.13 din [17]):

$$ax.\ inf. \qquad \Lambda \Subset Nn,$$

Λ fiind clasa vidă și Nn fiind clasa tuturor numerelor naturale. Dar această formulă *ax. inf.* este †670 din [1] și, în consecință, o teoremă în P. Așadar putem să obținem în P corespondente ale tuturor definițiilor și teoremelor teoriei tipurilor (inclusiv axioma infinitului din teoria tipurilor) și, pe baza enunțului acceptat în mod general, că teoria tipurilor este adecvată pentru dezvoltarea matematicii uzuale, putem deduce că lucrurile stau la fel și în cazul sistemului P.

Dacă este necesar, putem introduce și axioma alegerii (axioma multiplicativă) ca o nouă axiomă a lui P:

†203. $(x)\,(y)\,(x,\ y \in z.\ x \neq y.\supset.(\exists w)\,(w \in x).\sim(\exists u)\,(u \in x.\,u \in y)) \supset$
$\supset(\exists y')\,(x')\,(x' \in z \supset (\exists z')\,(u')\,(u' \in x'.u' \in y'.\equiv.u' = z'))$.

Cu toate acestea, în ceea ce urmează, vom considera că P este determinat prin **200, †201 și *202.

În P rămîne intactă derivarea efectuată de Rosser în [10] a teoriei numerelor ordinale mergînd pînă la și incluzînd †836. Dar demonstrația paradoxului lui Burali-Forti eșuează, deoarece formulele care definesc clasele $\mathrm{seg}_{\alpha}\leqslant$, $Nr(P), \leqslant$ în †837, †838 și †842 nu sînt normale și, ca atare, în P nu se mai poate demonstra că ele sînt elemente. Pînă acum, încercările mele de adaptare a acestei demonstrații la sistemul P au eșuat și ele. În speță, încercarea de a modifica definițiile $D808$, $D815$ și $D817$, astfel încît formulele definitorii ale claselor de mai sus să devină normale, nu au fost încununate de succes deoarece — lăsînd la o parte alte dificultăți — în acest caz se pare că trebuie să demonstrăm sau că clasa A din demonstrația lui †836 este un element, sau că clasa B din demonstrația lui †835 este un element; dar formula care definește clasa A nu este stratificată, iar formula care definește clasa B conține variabile libere de clasă oarecare. În consecință, nici una dintre aceste clase nu ar putea fi demonstrată direct ca fiind elemente pe baza axiomei **200 și se pare că nu există un mijloc de a ocoli dificultatea. O analiză a derivării de către Rosser a paradoxului lui Burali-Forti în sistemul din [1] arată că permiterea în cadrul formulelor care definesc elemente a unor variabile legate de clasă oarecare depinde de trăsătura specifică a lui *200. Se impune de la sine, cu toată tăria, concluzia că dacă extirpăm din sistemul [1] această caracteristică, nu avem probabil prea multe temeiuri să bănuim că sistemul P care va rezulta este susceptibil să genereze contradicții neprevăzute mai mult decît sistemele mai uzuale ale lui Russell și Zermelo.

Demonstrația consistenței lui P relativ la [2] se obține prin aplicarea unui raționament prezentat în ultima parte din [12], împreună cu extinderea

realizată de Gödel (a se vedea [18], la începutul p. 359) a teoremei lui Löwenheim-Skolem (cf., de exemplu, [19], p. 83). Conform acestui din urmă rezultat, orice sistem consistent de axiome astfel încît numai o singură specie de variabile figurează în cadrul simbolurilor sale primitive posedă un model în domeniul numerelor naturale. În consecință, dacă sistemul din [2] este consistent, atunci el admite un model în domeniul numerelor naturale. Altfel spus, dacă sistemul din [2] este consistent, atunci există o relație G între numere naturale, astfel încît axiomele $F1$ și $F2$ devin adevărate atunci cînd $\in$ din cadrul lor este interpretat ca G. Să admitem că este dată o asemenea relație G. Atunci putem constata că axiomele lui P sînt adevărate, atunci cînd variabilele lor sînt construite variind pe clase de numere naturale. În particular, vom arăta că axiomele lui P trebuie să devină adevărate, atunci cînd $\in$ din cadrul lor este interpretată ca o relație între clasele α și β de numere naturale care are loc atunci și numai atunci cînd $(1)\ (\exists m)\,(\hat{n}(nGm) = \alpha_{\cdot} m \in \beta)$, unde $\in$ este relația de apartenență propriu-zisă între numere naturale și clase de numere naturale, iar $\hat{n}(nGm)$ este clasa tuturor numerelor naturale care sînt în relația G față de m.

Pe baza izomorfismului cunoscut dintre clasele de numere naturale și numerele reale, rezultă că P admite un model în domeniul numerelor naturale. În consecință, pe baza încrederii noastre în consistența teoriei uzuale a numerelor reale, putem trage concluzia că P este consistent dacă sistemul din [2] este consistent. Trebuie observat că, întrucît putem obține în P alte numere cardinale și ordinale transfinite în afară de numere reale, $\in$ în formula de mai sus (1) este mai inofensivă decît $\in$ din P, precum și $\in$ din sistemul lui Russell sau sistemul lui Zermelo.

Să enunțăm acum mai explicit și mai amănunțit raționamentul care demonstrează că relația de apartenența între clasele de numere naturale, așa cum a fost caracterizată mai sus satisface axiomele lui P.

Pentru aceasta, vom construi mai întîi un sistem în cadrul căruia putem efectua acest raționament. Vom construi un sistem S, în care există variabilele m, n, k ... pentru numerele naturale și variabilele α, β, γ ... pentru clase de numere naturale. Formulele lui S sînt construite din formule atomice de formele mGn și $m \in \beta$ în modul obișnuit. Adoptăm în S următoarele definiții:

Dm. $n \in m$ pentru nGm.
Di. $m = \beta$ pentru $(n)(n \in m \equiv n \in \beta)$.
Di'. $m = n$ pentru $(k)(k \in m \equiv k \in n)$.

Atunci putem defini simplu relația de apartenență între clase de numere naturale după cum urmează:

D$\in$, $\alpha \in \beta$ pentru $(\exists m)\,(m = \alpha_{\cdot} m \in \beta)$.

Formulele *stratificate* și *normale* pot fi precizate ca în P. S conține următoarele axiome:

*A*1. Dacă φ este o formulă din S în care β nu este liberă, $\vdash (\exists\beta)(m)$ $(m \in \beta = \varphi)$.

*A*2. Dacă ψ este la fel ca φ, cu excepția faptului că are intrări libere ale lui m pretutindeni unde φ conține intrări libere ale lui α, atunci $\vdash m = \alpha \supset_{\cdot} \psi \equiv \varphi$.

*A*3. $m = n \supset_{\cdot} m \in \alpha \supset n \in \alpha$.

În S se pot demonstra următoarele teoreme:

$T1$. $(\exists\,\alpha)(m = \alpha)$.

$T2$. $(\exists\beta)(m\in\beta)$.

$T3$. $(\exists\,\gamma)(\alpha\in\gamma) \equiv (\exists\,\mathrm{m})\,(m = \alpha)$.

$T4$. Dacă m nu este liberă în φ și ψ este la fel ca φ, cu excepția faptului, că are intrări libere ale lui m pretutindeni unde φ are intrări libere ale lui α atunci

(a) $$\vdash (a)\,((\exists m)(m = \alpha)\supset\varphi) \equiv (m)\,\psi;$$

(b) $$\vdash (\exists\alpha)\,((\exists m)(m = \alpha)\,.\,\varphi) \equiv (\exists\,m)\,\psi.$$

$T5$. $(\exists\,n)(n = m\,.\,n\in k) \equiv m\in k$.

Prin ipoteză există o relație G între numere naturale, astfel încît $F1$ și $F2$ devin adevărate atunci cînd în cadrul lor $\in$ este interpretată ca G. Vom nota prin $F1'$ și $F2'$ rezultatele obținute din $F1$ și $F2$ prin substituirea lui m, n, k, ..., ..., G în locul lui x, y, z, ..., $\in$. În demonstrarea consistenței relative a lui P sîntem îndreptățiți să facem uz de $F1'$ și $F2'$.

Vrem să demonstrăm în S formulele obținute din axiomele lui P prin substituirea formulelor de forma $\alpha\in\beta$ în locul formulelor de forma $x\in y$. Cu alte cuvinte, conform cu $D\in$ și $Df1-Df3$ date mai sus, vrem să demonstrăm următoarele:

**200. Dacă φ este o formulă normală și stratificată a lui S și nu conține variabile libere în afară de α, β_1, ..., β_n, atunci

$$\vdash (\exists\gamma_1)\,(\beta_1\in\gamma_1)\,.\,\ldots\,.(\exists\gamma_n)\,(\beta_n\in\gamma_n)\,.\supset(\exists\beta)\,(\exists\gamma)(\gamma\in\beta\,.(\alpha)\,(\alpha\in$$
$$\in\gamma \equiv .(\exists\alpha')\,(\alpha\in\alpha')\,.\varphi)).$$

†201. $(\gamma)(\gamma\in\alpha \equiv \gamma\in\beta)\supset.\alpha\in\alpha'\supset\beta\in\alpha'$.

*202. Dacă φ este o formulă din S în care β nu este liberă, atunci

$$\vdash (\exists\beta)\,(\alpha)(\alpha\in\beta \equiv .(\exists\alpha')\,(\alpha\in\alpha')\,.\varphi).$$

Demonstrațiile sînt după cum urmează:

Demonstrația lui **200. Fie x formula obținută din φ prin înlocuirea tuturor intrărilor fiecăreia dintre variabilele α, β, γ, ... în φ prin intrări ale variabilelor m, n, k, ... Atunci x este o formulă stratificată a lui S care conține numai variabile pentru numere naturale. În consecință, conform cu $F1'$ și Dm,

$$(\exists n')\,(m)\,(m\in n' \equiv x),$$

unde n' nu este liber în x. Conform cu $T5$,

$$(\exists n')\,(m)\,(\exists n)\,((n = m.n\in n') \equiv x).$$

Fie ψ asemenea lui x, cu excepția faptului că are intrări libere ale lui α pretutindeni unde x are intrări libere ale lui m. Conform cu $T4$,

$$(\exists n')\,(\alpha)\,((\exists m)\,(m = \alpha)\supset.(\exists n)\,(n = \alpha.n\in n') \equiv \psi).$$

Conform teoriei cuantorilor

$$(\exists n')\,(\alpha)\,((\exists n)(n = \alpha . n \in n') \equiv .(\exists m)\,(m = \alpha) . \psi).$$

Conform lui $T4$ și $D\in$,

$$(\exists \gamma)\,((\exists k)\,(\gamma = k) . (\alpha)\,(\alpha \in \gamma \equiv .(\exists m)\,(m = \alpha) . \psi)).$$

Conform lui $T3$,

$$(\exists \gamma)\,((\exists \beta)\,(\gamma \in \beta) . (\alpha)\,(\alpha \in \gamma \equiv .(\exists \alpha')\,(\alpha \in \alpha') . \psi)).$$

Conform teoriei cuantorilor,

$$(\exists \beta)\,(\exists \gamma)\,(\gamma \in \beta . (\alpha)\,(\alpha \in \gamma \equiv .(\exists \alpha')\,(\alpha \in \alpha') . \psi)).$$

În consecință, conform cu $T3$ și $T4$,

$$(\exists \gamma_1)\,(\beta_1 \in \gamma_1) . \ldots .(\exists \gamma_n)\,(\beta_n \in \gamma_n) . \supset (\exists \beta)\,(\exists \gamma)\,(\gamma \in \beta . (\alpha)\,(\alpha \in \gamma) \equiv .(\exists \alpha')\,(\alpha \in \alpha') . \varphi))$$

Demonstrația lui †201. Conform cu $A2$ și Di,

$$(j)\,(j \in m \equiv j \in \beta) \supset .(\exists n)\,(n = m . n \in \alpha') \supset (\exists n)\,(n = \beta . n \in \alpha').$$

Conform cu $T4$ și $D\in$,

$$(\exists k)\,(k = \alpha) \supset :(j)\,(j \in \alpha \equiv j \in \beta) \supset . \alpha \in \alpha' \supset \beta \in \alpha'.$$

Conform lui $D\in$ și teoriei cuantorilor,

$$(j)\,(j \in \alpha \equiv j \in \beta) \supset . \alpha \in \alpha' \supset \beta \in \alpha'.$$

Conform cu $T5$,

$$(j)\,((\exists m)\,(m = j . m \in \alpha) \equiv (\exists m)\,(m = j . m \in \beta)) \supset . \alpha \in \alpha' \supset \beta \in \alpha'.$$

Conform cu $T4$ și $D\in$,

$$(\gamma)\,((\exists m)\,(m = \gamma) \supset . \gamma \in \alpha \equiv \gamma \in \beta \supset . \alpha \in \alpha' \supset \beta \in \alpha'.$$

În consecință, conform lui $D\in$ și teoriei cuantorilor,

$$(\gamma)\,(\gamma \in \alpha \equiv \gamma \in \beta) \supset . \alpha \in \alpha' \supset \beta \in \alpha'.$$

Demonstrația lui *202. Dacă m și β nu sînt libere în φ, iar ψ este la fel ca φ, cu excepția faptului că are intrări libere ale lui m pretutindeni unde φ conține intrări libere ale lui α, atunci, conform cu Al,

$$(\exists \beta)\,(m)\,(m \in \beta \equiv \psi).$$

Conform cu $T5$,

$$\exists \beta (m)\,((\exists n)\,(n = m . n \in \beta) \equiv \psi).$$

Conform cu $T4$,

$$(\exists \beta)\,(\alpha)\,((\exists n)(n = \alpha) \supset .(\exists n)\,(n = \alpha . n \in \beta) \equiv \varphi).$$

Conform teoriei cuantorilor,

$$(\exists\beta)\,(\alpha)\,((\exists n)\,(n = \alpha . n \in \beta) \equiv .(\exists n)\,(n = \alpha).\varphi).$$

Conform cu $T3$ și $D\in$,

$$\exists(\beta)\,(\alpha)\,(\alpha\in\beta \equiv .(\exists\alpha')\,(\alpha\in\alpha').\varphi).$$

Aceasta completează demonstrația faptului că dacă sistemul din [2] este consistent, atunci P este și el consistent.

Se poate observa că raționamentul de mai sus care demonstrează consistența relativă se aplică la toate perechile de sisteme care se raportează între ele în același mod ca sistemul P față de sistemul din [2]. Cu titlu de exemplu, aș putea menționa sistemul NQ propus la p. 151 din [20] și sistemul definit prin $Z1$—$Z6$ din [20]. Ele ar forma o pereche de acest gen, dacă înlocuim $N6$ din NQ prin axioma ușor diferită:

$N6'$. Dacă φab este o formulă care nu conține variabile de clasă oarecare și în care a și b sînt libere însă c, d și e nu sînt libere, atunci formula $(a)(b)(c)\,((\varphi ab . \varphi ac)\supset b = c)\supset(\exists d)\,(a)(a\in d \equiv (\exists b)\,(b\in e.\varphi ba))$ este o axiomă.

După această modificare putem demonstra printr-un raționament analog că dacă sistemul determinat prin $Z1$—$Z6$ este consistent, atunci NQ este și el consistent.

§ 6. SISTEMELE LUI ACKERMANN ȘI FREGE

Ne-am abținut în mare măsură să facem observații lăturalnice. În acest paragraf ne vom permite să facem cîteva. Două studii deosebit de interesante cu privire la fundamentele teoriei mulțimilor la care nu ne vom referi sînt articolul lui Gödel în *Philosophy of Bertrand Russell*, 1944 și monografia lui Stenius *Das Problem der Logischen Antinomien*, Helsinki, 1949.

Mult discutata definiție a mulțimii dată de Cantor sună: *Unter einer Menge verstehen wir jede Zussamenfassung M von bestimmten Wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente" von M gennant werden) zu einem Ganzen.* (1895, *Opere*, p. 282).

Cuvintele „definite" și „distincte" ar părea să sugereze că obiecte ca ceața și apa sînt excluse. Obiectele intuiției sînt entități concrete, iar obiectele gîndirii sînt entități abstracte, ca numerele, clasele sau alte universalii. Interesanta expresie „strîngere într-un întreg" se referă la un anumit gen de act de strîngere. Aceasta introduce un anumit element „constructiv" sau „genetic" în conceptul cantorian de mulțime. Actul de strîngere cerut aici este, în mod inevitabil, abstract și nu este, desigur, același lucru cu adunarea banilor într-o pălărie sau cu închiderea între acolade a unui șir finit de nume.

Este destul de cunoscut faptul că Georg Cantor nu simpatiza prea mult formalizarea. Această poziție pare a fi împărtășită de Finsler care de asemenea refuză să dea condiții mai operante. În ambele cazuri, sîntem puși totodată în fața unei înclinări de a privi dintr-un unghi nefavorabil încercările de codificare a teoriei mulțimilor. S-ar putea argumenta că problema căreia trebuie să-i facem față aici privește limba naturală și nu limbajul formal. Problema rezolvării paradoxelor este o problemă absolută și nu

relativă la anumite limbaje formale. Reformulînd în cadrul unui limbaj formal aceste paradoxe, noi schimbăm problema, deoarece conceptele unui limbaj formal se abat mai mult sau mai puțin de la conceptele corespunzătoare ale limbii naturale. Problema nu constă în a formaliza sau a reconstrui matematica pe baza unor principii solide în maniera lui Euclid, ci de a da explicații care ar releva viciul de formă în contradicțiile aparente și ar arăta că matematica rămîne destul de clară, în ciuda acestor „paradoxe". Acei care ridică obiecții împotriva acestei proceduri vor să spună că numai codificarea oferă o bază trainică pentru comunicare și discuție, deoarece comentariile generale sînt inevitabil vagi.

Legată de problema formalizării este opoziția dintre clasele ca extensiuni și clasele ca date prin condiții definitorii. Definiția lui Cantor însuși aderă nemijlocit la interpretarea extensională. În speță, clasa vidă și clasele cu un singur element nu se subsumează întocmai definiției de mai sus, deoarece în aceste cazuri nu avem nici o „strîngere într-un întreg"; aceste clase trebuie luate numai ca un fel de a vorbi. Un extensionalist, ca și un intensionalist, ar putea prefera folosirea sau respingerea codificării, deși o teorie formalizată a mulțimilor, chiar atunci cînd se bazează pe o interpretare extensională, ne arată totodată și condițiile definitorii permise în mod explicit. Am putea să comparăm interpretarea nenumărabilă extensională căutată cu interpretările numărabile intensionale necăutate.

S-au făcut cel puțin două propuneri radical diferite de clarificare a definiției cantoriene în cadrul orientării axiomatice, fapt care relevă posibilitatea unor interpretări contradictorii ale cuvintelor lui Cantor. Una dintre ele este binecunoscuta teorie a lui Zermelo și von Neumann, după care o colecție este o mulțime numai atunci cînd nu este prea mare, adică în terminologia lui Russell, teoria limitării volumului. Cealaltă este un sistem recent al lui Ackermann („Math. Annalen.", **131**, 1956, pp 336—345).

După cîte știu, nu s-a făcut nici un studiu mai amplu asupra sistemului lui Ackermann care prezintă interes prin faptul că pare a infirma aproape orice axiomă de categoricitate. Ar fi foarte interesant să studiem unele rezultate de independență în conexiune cu această teorie. De exemplu, ea ar putea constitui o punte, deoarece este probabil consistentă relativ la axiomele lui Zermelo și totuși inconsistentă cu axiomele care impun o ordine prea strictă.

Sistemul conține patru scheme de axiome:

$A1.$ $(x)(F(x) \supset M(x)) \supset (Ey)(z)(z \in y \supset F(x))$.

$A2.$ $(x \subset y \,\&\, y \subset x) \supset x = y$.

$A3.$ Dacă $F(u)$ nu conține M și conține variabilele libere $x_1, \ldots, x_n$, atunci

$$\{[M(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, M(x_n)] \,\&\, (y)\,[F(y) \supset M(y)]\}$$

$$\supset (Ez)[M(z) \& (u)(u \in z \equiv F(u))].$$

$A4.$ $[M(x) \& (y \in x \vee y \subset x)] \supset M(y)$.

Dintre aceste scheme, $A2$ este firească, din perspectivă extensională, și încorporează efectiv o proprietate fundamentală a claselor, chiar dacă subliniem cum trebuie definite clasele. $A1$ este mai tare ca principiul cores-

punzător pentru colecțiile nonelemente în abordarea lui von Neumann. Pe de altă parte, dacă credem că orice strîngere laolaltă de elemente ar da o colecție, nu neapărat un element, atunci putem prefera $A1$ în forma mai restrînsă (în care este permisă numai cuantificarea pe domeniul mulțimilor). Pe de altă parte, dacă nu vrem să strîngem colecții nonelemente, atunci ne putem întreba cum putem folosi cuantori care sînt definiți fără restricție pe domeniul acestora. Aceeași obiecție ar fi aplicabilă și la $A3$. S-ar putea replica însă că nu ne interesează ce condiții sînt folosite în definiții, atîta timp cît este respectată restricția impusă asupra lui M.

Justificarea lui Ackermann pentru $A3$ este întrucîtva implicată. Întrucît urmează să trecem de la mulțimi date la mulțimi noi, condiția impusă variabilelor libere este naturală. Totodată ea este inevitabilă, căci, în caz contrar, orice colecție este o mulțime. Întrucît conceptul de mulțime este deschis (la fiecare stadiu putem merge mai departe obținînd astfel noi mulțimi), ansamblul tuturor mulțimilor nu poate fi considerat ca definit în mod precis. Așadar, se impune cerința ca M să nu figureze în F. Ne-am putea întreba atunci cum se face că putem folosi variabile generale în F luînd ca valori colecții arbitrare, de vreme ce acest ansamblu este chiar mai puțin precis definit. Dar este pe deplin posibil să susținem că avem un ansamblu mai larg definit al tuturor colecțiilor (respectiv orice proprietate, toate proprietățile) deși nu avem un ansamblu precis al tuturor mulțimilor în cadrul său. Putem demonstra că pentru orice formulă F care nu conține M are loc $F(x) \not\equiv M(x)$; în caz contrar obținem mulțimea universală, precum și mulțimea lui Russell. Ar părea firesc să interpretăm definiția lui Cantor astfel, încît noi să efectuăm strîngerea într-un întreg numai cu privire la obiecte date. Dacă lucrurile stau așa, noi nu putem obține o mulțime universală care, firește, trebuie să fie propriul ei element. Nu o putem obține niciodată, deoarece pentru a opera această strîngere ea trebuie să existe deja. Într-adevăr, ar părea firesc să conchidem, pe baza definiției lui Cantor, că ori de cîte ori strîngem obiectele într-un întreg, întregul trebuie să fie un obiect nou distinct de toate aceste obiecte care constituie elementele sale. Altfel spus, ar părea natural, din orice abordare „constructivă", oricît de larg am interpreta acest cuvînt, că nici o mulțime nu se poate conține pe ea însăși ca element.

Justificarea primei jumătăți din $A4$ este ușoară. Întrucît noi strîngem întotdeauna mulțimi pentru a căpăta o mulțime nouă, un element al unei mulțimi trebuie să fie o mulțime. Ackermann justifică a doua jumătate, observînd că în definirea unei submulțimi a unei mulțimi x nu sîntem obligați să ne referim la ansamblul tuturor mulțimilor, ci numai la mulțimile care sînt elemente ale lui x sau elemente ale elementelor lui x. Această justificare nu înseamnă că în sistemul formal în cauză putem scrie explicit o condiție definitorie, referindu-ne numai la mulțimea x și la mulțimi anterior date. Dacă ar fi așa, aceasta ar constitui o consecință din $A3$. Cu toate acestea, putem argumenta că, în cadrul unui limbaj destul de bogat, ansamblul mai mic poate fi descris fără ca să apelăm la M. Oricum ar fi, $A4$ ne permite să definim o submulțime arbitrară $y = \hat{u}(u \in x \& F(u))$ pentru F arbitrar, întrucît, conform lui $A1$, există o asemenea colecție. Poate că o justificare mai directă ar fi aceea că dacă putem strînge toate elementele lui

x într-o mulțime, orice subcolecție (extensional vorbind) poate fi și ea strînsă într-o mulțime.

Potențele deductive ale schemelor $A1-A4$ sînt remarcabile. Dacă în $A3$ luăm $y \neq y$ ca $M(y)$, atunci antecedentul este satisfăcut în mod simplu și obținem mulțimea vidă. Dacă luăm $(y = x_1 \vee y = x_2)$ ca $F(y)$, obținem mulțimea pereche. Dacă în $A3$ luăm $(Ev)(y \in v \,\&\, v \in x_1)$, atunci obținem mulțimea sumă a lui x_1 conform primei jumătăți a lui $A4$. În mod similar, dacă luăm $y \subset x_1$ ca $F(y)$, obținem mulțimea putere a lui x_1, conform primei jumătăți a schemei $A4$. Am indicat deja cum putem să obținem Aussonderungs-axiom din $A1$ și $A4$. Putem obține, de asemenea, o mulțime infinită z, care conține ca element mulțimea vidă și conține ca element mulțimea unitate a fiecărui element al ei. Astfel, conform cu $A3$, putem găsi o intersecție a unor mulțimi infinite de așa fel, încît intersecția să fie le rîndul ei o mulțime infinită. Axioma substituției se poate demonstra pentru orice relație $R(v, y)$ care nu conține pe M și aplică mulțimi la mulțimi. Astfel, întrucît $M(x_1)$ și $(R(v, y) \,\&\, M(v)) \supset M(y)$, dacă luăm $(Ev)\,(R(v, y) \,\&\, v \in x_1)$ în calitate de $F(y)$ în $A3$, căpătăm mulțimea cerută $\hat{u}(Ev)(R(v, u) \,\&\, v \in x_1)$.

Pentru a arăta că această axiomă nu este mai slabă ca axioma corespunzătoare din teoria de tip zermelian, Ackermann utilizează definiția funcțiilor dată de Fraenkel. Ar fi interesant să comparăm și să transpunem această analiză în termeni similari cu cei ai lui Bernays-Gödel pentru $R(v, y)$.

Frege face distincție între obiecte și funcții. Conceptele sînt cazuri speciale de funcții. El elaborează o formă a teoriei tipurilor pentru concepte și funcții; clasele sînt însă privite ca obiecte (domenii de valori ale conceptelor) care nu mai sînt nesaturate. Obiectele nu sînt neapărat numai obiectele concrete, ci mai degrabă orice este desemnat prin substantive (conceptele corespunzînd adjectivelor). Conceptele aplicate obiectelor (sau conceptele de nivel inferior) constituie elementele primitive în formarea propozițiilor cu sens și nu pot fi niciodată separate de obiecte. Abstracția este folosită ca element primitiv pentru a obține clasele ca domenii de valori plecînd de la concepte, iar apoi apartenența se definește prin intermediul operatorului descripției. Motivul pentru care el nu folosește sau nu poate folosi apartenența ca termen primitiv și folosește axioma uzuală a clasei rămîne obscur, chiar dacă admitem că Frege ar dori să sublinieze originea conceptuală a claselor.

$$\hat{x}F(x) = \hat{x}(EG)(x = \hat{y}G(y) \,\&\, \sim G(x))$$

$$\supset(x)\,(F(x) \equiv (EG)(x = \hat{y}G(y) \,\&\, \sim G(x)))$$

$$\supset F(\hat{x}F(x)) \equiv (EG)\,(\hat{x}F(x) = \hat{y}G(y) \,\&\, \sim G(\hat{x}F(x)))$$

$$\supset F(\hat{x}F(x)) \equiv (\hat{x}F(x) = \hat{x}F(x) \,\&\, \sim F(\hat{x}F(x)))$$

$$\supset F(\hat{x}F(x)) \equiv \sim F(\hat{x}F(x)).$$

Axioma supărătoare (Vb) spune că dacă conceptele au același domeniu de valori, atunci ele au întotdeauna aceeași valoare de adevăr pentru același argument. Această afirmație este mai mult sau mai puțin echivalentă cu ipoteza $x \in \hat{y}F(y) \equiv F(x)$, pentru un F arbitrar. Ea implică (Vb), conform logicii propozițiilor; reciproca nu este tot atît de clară.

Schröder și Dedekind nu au reușit să facă distincție între apartenență și incluziune și au ajuns la contradicții. Aceasta se datorează concepției lor greșite despre clase ca extensiuni (respectiv grămezi). Relația inversă de apartenență poate fi atinsă numai *via* concepte.

Se pune problema de a da sens concepției extensionale despre clase — interpretarea claselor și conceptelor ca obiecte reale existente independent de definițiile și construcțiile noastre. În loc de concepte, unii preferă să folosească cuvîntul mai neutru de atribut (funcții propoziționale). Clasele trebuie privite ca pluralități de lucruri sau ca structuri alcătuite dintr-o pluralitate de lucruri. Trebuie observat că în cadrul realismului și extensionalismului există două momente într-adevăr distincte: pe baza realismului, clasele pot fi considerate „concepte luate în extensiune", însă atît clasele cît și conceptele sînt reale; există o deosebire între concept și definiție (definiția și construcția „noastră", indiferent dacă clasa sau conceptul ia ființă o dată cu definiția sau se caracterizează numai printr-o definiție), clasele pot exista independent de definiții, dar nu și de concepte. Prin concepție extensionalistă despre clase nu putem înțelege numai (1), principiul extensionalității este valabil pentru clase (într-adevăr, nimeni nu încearcă să conteste acest lucru, iar Frege sau Gödel ar dori chiar să accepte acest principiu pentru concepte), nici (2), clasele se comportă ca niște grămezi. Ce mai rămîne însă atunci din concepția extensionalistă, dacă facem abstracție de poziția realistă plus principiul extensionalității pentru clase? — Să considerăm toate clasele posibile de numere întregi pozitive. Se pare că în acest caz dobîndim anumite avantaje dacă considerăm clasele ca extensiuni, adică dacă nu acordăm nici o atenție conceptelor respective. Se pare că putem lua în considerație o totalitate a acestor mulțimi posibile. Nu putem spune prea multe lucruri pozitive cu privire la totalitate. Întrucît ea este maximă, știm că, pe baza raționamentului diagonalei, ea nu poate fi numărabilă. Așadar, ea nu poate fi compusă din nici o colecție numărabilă de mulțimi etc. Dar noi nu știm cît de multe asemenea mulțimi există. Pentru a da cel puțin sens acestei probleme, trebuie să considerăm ceva de felul teoriei cantoriene a numerelor ordinale care nu ne ajută totuși prea mult, deoarece noțiunea dificilă „toate clasele posibile" este doar înlocuită prin noțiunea „toate relațiile posibile bine ordonate". Mai putem întreba încă cît de multe relații de acest fel există. În ceea ce privește cunoașterea noastră, se pare că aceste totalități clasice rămîn o dată pentru totdeauna noțiuni negative, pe care o abordare constructivă nu le poate considera altfel ca „nelegitime". Dacă persistăm în abordarea constructivă, va trebui să ne resemnăm la o caracterizare imperfectă a tuturor posibilităților și să lăsăm loc mai departe unei totalități nenumărabile date în mod negativ. Toate aceste lucruri sînt foarte naturale și plauzibile, numai că nu putem face prea mult cu ele.

Unii preferă să-l urmeze pe Gödel, făcînd distincție între concepte și noțiunile nominaliste; ei introduc un principiu de extensionalitate pentru concepte avînd drept consecințe faptul că două proprietăți nu pot reveni niciodată la exact aceleași lucruri, deși același concept poate să corespundă mai multor noțiuni diferite. Aceasta revine la o nouă stipulare a folosirii termenului de „concept", ceea ce ne-ar putea fi de folos în anumite scopuri, dar nu poate pretinde o prea mare evidență intuitivă.

Atît Frege, cît și Russell ridică obiecții împotriva considerării claselor în mod pur extensional ca simple grămezi sau conglomerate, pe motivul că atunci nu ar exista o clasă vidă („dacă dăm foc tuturor copacilor unei păduri dăm foc astfel și pădurii") și nu ar exista nici o distincție între o clasă unitate și unicul obiect al acesteia. Obiecția poate fi întîmpinată considerînd clasa vidă și clasele unitate drept ficțiuni. O chestiune mai serioasă pare a fi imposibilitatea de a distinge între apartenență și incluziune. Oare această imposibilitate este o consecință necesară a concepției pur extensionaliste? Schröder deduce un paradox. Să considerăm clasa claselor egale cu 1. Prin definiție, ea conține numai pe 1. Dar orice clasă conține clasa vidă 0. Dar predicatul definitoriu „egal cu 1" trebuie să se aplice oricărui element al clasei. Așadar, $0 = 1$. Dacă concepem mai multe păduri ca formînd o clasă în sensul unui conglomerat, atunci ar părea firesc să concepem o colecție de obiecte concrete astfel, încît orice copac este inclus în clasă și aparține ei, orice pădure este inclusă și-i aparține clasei, colecția tuturor pădurilor, cu excepția uneia singure, este de asemenea inclusă în acea clasă. Sau, cel puțin, am înclina să folosim numai relația parte — întreg și să nu ne gîndim de loc la relația de apartenență. Putem lăsa la o parte restricția la obiecte concrete și să considerăm chiar clasele ca niște grămezi, nu avem nevoie nici măcar de cuvintele „individ" și „lucruri singulare".

De îndată ce vorbim despre o grămadă „de numere", o grămadă „de păduri", o grămadă „de copaci", situația se schimbă. Însă schimbarea nu este atît de importantă pentru ca să ne silească să introducem conceptul care definește grămada sau clasa. Trebuie să dispunem numai de conceptul general căruia i se subsumează toate elementele clasei. Astfel, de îndată ce avem conceptul de număr, putem concepe în mod extensional toate clasele de numere. Un caz oarecum mai puțin evident este următorul: de îndată ce avem noțiunea de mulțime M, putem continua să considerăm în mod extensional mulțimi arbitrare de mulțimi. În mod extensional, putem strînge obiecte date într-o clasă, într-o „multiplicitate în unitate" în care individualitatea elementelor se păstrează. Diferența dintre Zermelo și Ackermann rezidă în faptul că acesta din urmă vorbește numai despre submulțimi ale unor mulțimi date, în timp ce primul utilizează condiții definitorii absolut arbitrarii. Dacă slăbim $A3$ a lui Ackermann adăugînd condiția $(Ex)(\sim F(x) \,\&\, M(x))$, atunci putem înlătura probabil restricția impusă lui F (anume că M nu intră în F). Condiția adăugată este pe deplin rezonabilă și, după toate probabilitățile, nu afectează mult puterea sistemului. În sistemul lui Ackermann, condiția este redundantă, deoarece orice condiție care ar încălca-o ar duce la o contradicție. Pe de altă parte, înlăturarea restricției impuse asupra lui F mai poate fi susținută pe temeiul că de fapt nu ne interesează modul în care trebuie definită noua mulțime, cu condiția ca să nu sărim la toate mulțimile. Poate că avem nevoie de o axiomă după care $M(0)$, 0 fiind mulțimea vidă. În orice caz, trebuie să reținem faptul că concepția extensională nu neagă faptul că în formarea unei mulțimi noi mergem de la obiecte la un obiect nou. Așadar, calculul indivizilor sau concepția nominalistă fără clase nu este cîtuși de puțin în spiritul concepției extensionale.

Nu se poate nega faptul că fiecărei clase trebuie să-i corespundă (într-un sens) un concept al cărui domeniu de valori este clasa respectivă. Nici aceasta nu vrea să conteste o concepție extensională. Ea propune numai să neglijăm

conceptele și să considerăm modalități arbitrare de stringere într-un întreg. În acest fel putem obține cu ușurință toate submulțimile posibile ale unei mulțimi date; în caz contrar, am trebui să ne întrebăm mereu asupra naturii conceptelor definitorii și să ne mișcăm încet, deoarece vrem să avem o privire generală asupra tipurilor de concepte, pe care le vom lua în considerație. Într-un anumit fel, ajungem mai ușor la mulțimi arbitrare, dacă gîndim extensional și nu intensional. Conceptele realiste prezintă avantajul de a opera cu extensiuni arbitrare și condiții definitorii precise, dar într-un fel sau altul ele pot depăși toate granițele în primul rînd pentru că sînt legate de clase ca extensiuni. Atunci cînd considerăm clase individuale, se pare că sîntem siliți să apelăm la intensiuni, în timp ce dacă considerăm toate clasele posibile ne mișcăm mai liber cu extensiunile.

O armată este mai mult decît o clasă, la fel cum o grămadă este mai puțin decît o clasă. Într-o armată există o relație care leagă între ei membrii săi, în timp ce într-o clasă ne interesează numai relația dintre unu (clasa) și multiplu (elementele). O clasă este o totalitate, astfel încît este bine stabilită natura elementelor sale, dar relațiile dintre elemente sînt neesențiale. Un concept dă o totalitate care satisface ambele condiții.

Teoria tipurilor a lui Frege cu privire la funcții și concepte se bazează pe o necesitate lingvistică. Din punct de vedere gramatical, noi nu putem permite ca un predicat să figureze fără un subiect. Esența unei funcții sau atribut constă în ideea generală de formă uniformă de trecere de la un obiect (sau mai multe) la altul. Putem folosi variabile care iau ca valori funcții, însă trebuie să ținem seamă de faptul că tot ce poate fi spus că implică o funcție poate fi spus folosind numai limbajul în care expresia funcțională intervine numai împreună cu locul argumentului său. Întrucît ambiguitățile pot fi eliminate numai prin lucruri de specia cerută, $(\ )^2 + 1$ poate lua un număr ca argument însă $((\ )^2 + 1)^2 + 1$ nu poate fi privită ca valoare a lui $(\ )^2 + 1$, întrucît $(\ )^2 + 1$ nu poate fi folosită pentru a elimina integral o ambiguitate. Din același motiv, o variabilă nu poate lua ca valori funcții de tipuri diferite sau obiecte și funcții de același gen. Acest principiu este conservat de către Russell în acea parte a teoriei lui care a dus la teoria simplă a tipurilor. Pe de altă parte, tratarea liberă a mulțimilor sau a domeniilor de valori în sistemul lui Frege este înlăturată de către Russell, dar este păstrată parțial în sisteme fără tipuri.

O ultimă problemă în legătură cu Frege este aceea dacă clasele pot fi considerate ca o specie de indivizi (o parte din materialul fundamental al lumii). Întrucît Cantor demonstrează că există mai multe clase decît indivizi, aceasta nu poate fi adevărat. Cu alte cuvinte, dacă considerăm toate clasele ca indivizi, atunci ne putem întreba care este corelatul clasei $\hat{x}(x \notin x)$; după Cantor, el nu corespunde nici unui individ. Așadar, avem o contradicție. Frege imaginează, în fapt, o corespondență între domeniile de valori și obiecte, dată mai întîi într-un mod arbitrar, de exemplu, conceptul număr prim este corelat cu numărul 3 sau conceptul German cu Nehru, astfel încît nu există „intuiție logică" care să arate că o clasă nu poate fi propriul ei element. În același mod, dacă introducem restricția lui Frege, și anume că clasa definită însăși trebuie exclusă, nu putem decît să reducem la jumătate numărul claselor (fără a face distincție între cele două cazuri cînd clasa definită își aparține și cînd nu). Dar pentru $n > 2$, $2^{n-1} > n$. De aici, o con-

tradicție pentru orice univers cu mai mult de două obiecte. Din punct de vedere formal, aceasta poate fi efectuată, probabil, și se aplică la o clasă largă de cazuri care încearcă să excludă aspecte singulare. Orice aspecte singulare fixate ar da totuși contradicții. Pe de altă parte, dacă aspectele singulare urmează să includă totodată și acelea definibile indirect în termenii mulțimii care va fi introdusă, atunci (1) este dificil să ducem la îndeplinire, (2) nu este limpede cît de mult diferă această abordare de prima.

Notă cu privire la predicate și mulțimi parțial definite. Putem să aplicăm condiții definitorii arbitrare, restrîngînd însă legea terțului exclus. Această abordare a teoriei mulțimilor (compară cu p. 386 mai sus), a fost studiată de către Skolem, Behmann, Bochvar, Ackermann, Fitch, Schütte. O formulare naturală ar da sisteme oarecum diferite de cele ale acestor autori. Vom folosi tabelele cu trei valori (t, u, f) ale lui Lukasiewicz pentru „și", „sau", „nu" și le vom extinde la cuantori în mod natural. Apoi, vom folosi $\rightarrow$ ca implicație, fără a permite însă o repetare. Spunem că $p \rightarrow q$ este valid, dacă și numai dacă q capătă valoarea t ori de cîte ori p capătă valoarea t. Atunci, pentru p și q fără cuantori, putem să decidem dacă $p \rightarrow q$ este valid. Modificînd puțin sistemul L_x (p. 310), obținem un sistem PP de calcul parțial al predicatelor despre care se poate demonstra în maniera uzuală că este complet, relativ la interpretarea dată a constantelor logice. Mai mult, dacă modificăm interpretarea lui $p \rightarrow q$ în felul următor: $p \rightarrow q$ este valid, dacă și numai dacă q nu capătă valoarea f ori de cîte ori p capătă valoarea t, atunci obținem o formulare similară KP, care dă calculul clasic al predicatelor. Se poate demonstra că $p \rightarrow q$ este o teoremă a lui KP, dacă și numai dacă $(p \,\&\, (q \vee \sim q)) \rightarrow q$ este teoremă a lui PP. Dacă adăugăm sistemului PP termenii de mulțime $\hat{x}Fx$ pentru F arbitrar, putem dezvolta teoria mulțimilor prin introducerea axiomelor terțului exclus, specificînd astfel că anumite predicate sînt complete. De exemplu, am vrea să asertăm $x = y \vee x \neq y$ pentru toate mulțimile, complete sau parțiale, în care caz am obține o mare parte din teoria mulțimilor, fără a trebui să introducem multe axiome noi. Sînt multe probleme atractive în legătură cu dezvoltările viitoare ale teoriei mulțimilor pe această bază și cu interpretarea implicațiilor iterate.

BIBLIOGRAFIE

[1] W. V. Quine, *Mathematical logic*, New York, 1940.

[2] Idem. *New Foundations for Mathematical Logic*, în „Am. Math. Monthly", **44**, 1937, pp. 70–80.

[3] Bertrand Russell, *Mathematical Logic Based on the Theory of Types*, în „Am. Jour. Math.", **30**, 1908, pp, 222–262.

[4] Ernst Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* I, în „Math. Ann.", **65**, 1908, pp. 261–281.

[5] Barkley Rosser, *On the Consistency of Quine's „New Foundations for Mathematical Logic"*, în „Jour. Symbolic Logic", **4**, 1939, pp. 15–24.

[6] Idem, *Definition by Induction in Quine's „New Foundations for Mathematical Logic"* în *loc. cit.*, pp. 80–81.

[7] J. von Neumann, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, în „Jour. reine und angewandte Mathematik", **154**, 1925, pp. 219–240.

[8] Paul Bernays, *A System of Axiomatic Set Theory*, partea I, în „Jour. Symbolic Logic", **2**, 1937, pp. 65—77; partea II, *ibidem* **6**, 1941, pp. 1—17.
[9] Kurt Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton, 1940.
[10] Barkley Rosser, *The Burali-Forti Paradox*, în „Jour. Symbolic logic", **7**, 1942, pp. 1—17.
[11] W, V. Quine, *Element and Number*, în *loc. cit.*, **6**, 1941, pp. 135—149.
[12] Hao Wang, *A New Theory of Element and Number*, în *loc.*, **13**, 1948, pp. 129—137.
[13] F. B. Fitch, *Review of* (11), în *loc.*, **7**, 1942, pp. 121—122.
[14] Max Black, *Review of* (1), „Mind", N. S., **52**, 1943, pp. 264—275.
[15] W. V. Quine, *On Existence Conditions for Elements and Classes*, în „Jour. Symbolic Logic", **7**, 1942, pp. 157—159.
[16] Hao Wang, *Existence of Classes and Value Specification of Variables*, în „Jour. Symbolic Logic", **15**, 1950, pp. 103—112.
[17] A. N. Whitehead şi Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge, England, pp. 1910—1913.
[18] Kurt Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, în „Monatsh. Math. Phys.", **37**, 1930, pp. 349—360.
[19] Alonzo Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, 1944.
[20] Hao Wang, *On Zermelo's and von Neumann's Axioms for Set Theory*, în „Proc. Nat. Acad. Sci. USA", **35**, 1949, pp. 150—155.

CAPITOLUL XVII
TĂRIE RELATIVĂ ȘI REDUCTIBILITATE

§ 1. RELAȚIA ÎNTRE P ȘI Q

În acest paragraf, precum și în cel următor vom considera două articole ale autorului („Proc. Nat. Acad. Sci. USA", **36,** 1950, pp. 479—484; „Math. Annalen", x. 125, 1952, pp. 56—66) împreună cu mai multe articole înrudite ale lui Mostovski („Fund. Math.", **39,** 1953, pp. 133—158), R. Suszko („Studia Philos.", **4,** 1951, pp. 301—330), Myhill („Proc. Nat. Acad. Sci.", **38,** 1952, pp. 979—981), și McNaughton („Proc. Am. Math. Soc.", **5,** 1954, pp. 505—509). Din cauza complicațiilor inerente formalizării, multe dintre aceste lucrări conțin erori, deși, după cum se pare, majoritatea acestor erori sînt reparabile. Poate fi interesant să prezentăm teoremele demonstrate efectiv, precum și remediile pentru demonstrațiile deficitare.

Ideea de bază comună este foarte simplă. Dacă avem numai un număr finit de axiome care enunță existența unor mulțimi, atunci toate mulțimile a căror existență este cerută de aceste axiome pot fi enumerate în însăși teoria mulțimilor și deci, în particular, conform raționamentului diagonalei, trebuie să existe în sistem o anumită condiție despre care nu putem demonstra pe baza unui număr finit de axiome că definește o submulțime a mulțimii întregilor. Așa, de exemplu, întrucît fiecare condiție în ZF definește o submulțime a mulțimii întregilor, nu există nici o mulțime finită de teoreme în care să putem deduce toate axiomele lui ZF. Pentru a efectua realmente acest raționament, precum și altele înrudite, se cere să fim foarte atenți la prezența definițiilor impredicative și la complicațiile aduse de inducția matematică.

În articolul autorului din 1950 sînt folosite două sisteme, P și Q, care sînt teoria predicativă și respectiv impredicativă a mulțimilor de numere. (V. § 3 al capitolului precedent). În articolul de față, obiectivul principal îl constituie demonstrarea unor rezultate menite să arate cum Q este mai tare decît P. Deși mult prea succinte, schițele sînt în esență corecte. Apoi se observă imediat că același raționament poate fi folosit pentru demonstrarea unor rezultate similare, dacă în locul lui P facem uz de o extensiune finită oarecare a lui P. Această parte trece cu vederea complicațiile aduse de prezența definițiilor impredicative. În recenzia sa („J. Symbolic Logic", **16,** 1951, p. 143), Rosser a criticat prima jumătate care, de fapt, este partea corectă a articolului. În cele ce urmează vom prezenta în mod mai amănunțit demonstrația schițată în acel loc. Articolul autorului din 1952 a constituit o încercare de

remediere a celei de a doua jumătăți, adică a părții privitoare la axiomatizarea finită. Această chestiune va fi examinată în paragraful următor.

Metoda de enumerare reiese clar din monografia lui Gödel (1940). Trebuie să ținem seama de axiomele lui Gödel din grupa B și de axioma sa $A1$ sau, cu alte cuvinte, de axiomele $NB10$-$NB16$ sau de $B10-B16$ din § 3 din capitolul precedent. Întrucît mulțimile lui P por fi enumerate în P conform modelului Ackermann al lui G, putem admite ca dată o enumerare a mulțimilor. Atunci putem reprezenta, de exemplu, E prin 5, putem reprezenta clasa avînd aceeași extensiune ca a b-a mulțime prin 7^a, complementara intersecției claselor a a-a și a b-a prin $11^a\ 13^b$, domeniul celei de a-a mulțimi prin 17^a, V x X, unde X este a a-a mulțime, prin 19^a, Cyc(X) și Per(X) prin 23^a și 29^a. Clasa simplă de numere folosite în acest mod poate fi denumită C. Enumerarea formală decurge după cum urmează.

1.1 $G(j, B)$ pentru $(k)\,(n)\,(2^k \cdot 3^n \in B \supset n \leqslant j)\ \&\ (m)\,\{m \leqslant j \supset [(m = 5\ \&\ \vec{B}`m = E) \vee \ldots \vee (Ei)\,(i \in C\ \&\ m = 29^i\ \&\ \vec{B}`m = \mathrm{Per}(B`m)) \vee (m \notin C\ \&\ \vec{B}`m = \Lambda)]\}$.

1.2. $2^m \cdot 3^n \in F$ sau $m \in \vec{F}`n$ pentru $(EB)\,(G(n, B)\ \&\ 2^m \cdot 3^n \in B)$.

1.3. $\vec{F}`n = A \equiv (m)\,(m \in A \equiv m \in \vec{F}`n) \equiv (EB)\,(G(n, B)\ \&\ \vec{B}`n = A)$.

Demonstrație. $(EB)\,(G(n, B)\ \&\ \vec{B}`n = A) \equiv (EB)\,(G(n, B)\ \&\ (m)\,(m \in A \equiv \equiv 2^m \cdot 3^n \in B))$, partea dreaptă implică $(m \in A \supset (EB)\,(G(n, B)\ \&\ 2^m \cdot 3^n \in B))$ și $(m \in \vec{F}`n \supset m \in A)$.

Pentru demonstrarea celeilalte jumătăți, trebuie să facem uz de $(EB)\,G(n, B)$, o teoremă demonstrabilă numai prin inducție în Q. Prin urmare, echivalența are loc numai în Q.

1.4. $N(A, m)$ sau $(E\ B)\,H(A, m, B)$ pentru $(E, B)\,(G(m, B)\ \&\ \vec{B}`m = A)$.

H nu conține alte variabile de clase. În aceste definiții, $\vec{B}`m$ este același cu $B``\{m\}$, dar nu putem folosi în locul lui pe $B``m$. Vom admite că $V \times A$, Cyc(A) etc. conțin ca membri numai perechi (respectiv triplete)ordonate.

În treacăt fie spus, este cunoscut și pe baza altor metode că Q este mai tare decît P. Într-adevăr, $Con(P)$, o formulare uzuală a consistenței lui P, poate fi demonstrată ca teoremă în Q, prin raționamentul indicat în Trans. Am. Math. Soc.", 73, 1952, p. 273. În mod similar, se demonstrează acolo că $Con(NB)$ este teoremă a lui NQ.

Putem formula o axiomă de categoricitate:

$$(P1)\,(X)\,(Em)\,N(X, m) \quad \text{sau} \quad (X)\,(Em)\,(EB)\,H(X, m, B).$$

Intuitiv vorbind, avem un model minim pentru P, în care există numai numerele întregi căutate și numai clasele cerute explicit. Într-un atare model sînt adevărate nu numai toate teoremele lui P, ci și ($P1$). Acum, dacă vom numi traducerea unei formule în P, rezultatul restrîngerii variabilelor de clase astfel încît acestea să ia ca valori numai acele clas X pentru care (Em), $(EB)\,H(X, m, B)$, fără a modifica în nici un fel variabilele de numere (ipoteză simplificatoare ce va fi discutată mai jos), putem să demonstrăm imediat

că traducerile tuturor teoremelor lui P sînt și ele teoreme ale lui P. Totodată, traducerea axiomei de limitare apare și ea intuitiv adevărată, deoarece toate clasele din cadrul enumerării trebuie să satisfacă condiția de enumerare. Acest sens intuitiv nu este însă foarte simplu, din cauza existenței a două domenii diferite ale variabilei B și B^* în traducerea „$(X^*)\,(Em)\,(EB^*)\,H(X^*, m, B^*)$“ sau „$(X)\,((Em)\,(EB)\,H(X, m, B) \supset (Em)\,(EB^*)\,H(X, m, B^*))$“, traducere care diferă de formula tautologică „$(X^*)\,(Em)\,(EB)\,H(X^*, m, B)$“.

Pentru a vedea că traducerea lui ($P1$) este adevărată, considerăm toate clasele A care satisfac $N(A, j)$ pentru un j. Dacă j este 1, adică $N(A, 1)$, putem lua clasa vidă care figurează în cadrul enumerării în calitate de B^*, și atunci avem:

1.5. $N(A, 1) \supset (EB^*)\,H(A, 1, B^*)$ (prescurtat $K(A, 1)$).

1.6. $(EB^*)\,(m)\,(n)\,(2^m \cdot 3^n \in B^* \equiv (n \leqslant 1 \;\&\; H(A, N, B^*) \;\&\; m \in A))$. (Prescurtat $M(A, 1)$).

Să admitem că am găsi B_j^* care satisface 1.5. și 1.6 cînd 1 este înlocuit prin j; atunci putem găsi B_{j+1}^* în termeni de B_j^*:

1.7. $2^m 3^k \in B_{j+1}^* \equiv \{k \leqslant j+1 \;\&\; [(k = 5 \;\&\; m \in E) \vee \ldots \vee (Ei)\,(i \in C \;\&\; k = 29^i \;\&\; (Ea)\,(Eb)\,(Ec)\,(m = 2^{2^a 3^b} 3^c \;\&\; 2^{2^a 3^c 3^b} 3^i \in B_j^*)) \vee (m \notin C \;\&\; 2^m 3^k \in B_j^*)]\}$.

În consecință, putem demonstra în P:

1.8. $K(A, j) \supset K(A, j+1)$.

1.9. $M(A, j) \supset M(A, j+1)$.

Mai departe, putem face inducție în Q, demonstrînd pe baza lui 1.5 și 1.8:

1.10. $\vdash_Q (n)\,(A)\,(N(A, n) \supset (EB^*)\,H(A, n, B^*))$, în consecință de asemenea traducerea lui ($P1$).

Din 1.6 și 1.9 rezultă că atît în P, cît și în Q putem demonstra existența claselor B_1^*, B_2^*, ... clase care formează un șir monoton crescător în sensul că B_n^* se include în B_{n+1}^*. Se poate demonstra că reuniunea tuturor acestor clase, la rîndul ei, există în Q:

1.11. $\vdash_Q (EB)\,(m)\,(n)\,(2^m 3^n \in B \equiv (EA)\,(G(n, A) \;\&\; 2^m \cdot 3^n \in A))$.

Intuitiv vorbind, această clasă B nu se numără printre clasele cerute de ($P1$) și deci existența ei nu poate fi demonstrată în P. Pentru stabilirea mai exactă a acestui rezultat, procedăm după cum urmează. Conform lui 1.10 și raționamentului de mai sus:

Teorema 1. Cînd toate variabilele de clase sînt restrînse ca înainte, P este traductibil în P iar P plus ($P1$) este traductibil în Q.

Notăm în treacăt că dacă un model pentru P nu conține decît întregi regulați atunci, dat fiind că 1.5 și 1.8 sînt teoreme ale lui P, formula din 1.10 și traducerea lui ($P1$) trebuie să fie adevărate în cadrul modelului. Vom demonstra că totuși traducerea lui ($P1$) nu este derivabilă în P.

Teorema 2. Formula din 1.11 nu este teoremă a lui P dacă Q este consistent.

Demonstraţie. Dacă clasa din 1.11 este demonstrabilă în P, atunci complementara sa este demonstrabilă în P. Atunci traducerea ei este o teoremă a lui Q. Aşadar, conform cu 1.10, este teoremă a lui Q şi următoarea:

$$(EB^*)\,(m)\,(n)\,(2^m 3^n \in B^* \equiv \sim (EA)\,(G(n,\ A)\ \&\ 2^m \cdot 3^n \in A)).$$

În particular,

$$2^j 3^j \in B^* \equiv \sim (EA)\,(G(j,\ A)\ \&\ 2^j 3^j \in A).$$

Dacă $N(B^*,\ j)$, inevitabil:

$$2^j 3^j \in B^* \equiv (EA)\,(G(j,\ A)\ \&\ 2^j 3^j \in A).$$

Aşadar, ajungem la o contradicţie.

Teorema 3. Dacă Q este consistent, atunci reuniunea B din 1.11 a claselor B_1^*, B_2^*,... din P, clase care formează un şir monoton crescător, nu este o clasă a lui P.

Teorema 4. Traducerea lui ($P1$) sau formula din 1.10 nu este o teoremă a lui P; există un model al lui P în care este adevărat:

$$(EX)\,[(En)\,(EY)\,H(X,\ n,\ Y)\ \&\ \sim (En)\,(EY^*)\,H(X,\ n,\ Y^*)].$$

Demonstraţie. Să luăm o clasă arbitrară X a cărei existenţă nu este demonstrabilă în P (să spunem clasa din 1.11.) şi să construim un model pentru P, în care negaţia consistenţei sistemului extins este adevărată (sau să luăm negaţia lui $Con(Q)$). Să punem acum

$$Y = X + \langle X,\ \mu_m\ (m \text{ este o demonstraţie de contradicţie})\rangle.$$

Atunci obţinem contraexemplul căutat.

Demonstraţiile de mai sus conţin o omisiune. Definind traducerea unei formule, am admis că variabilele de numere rămîn neschimbate. Întrucît numerele sînt identificate cu anumite mulţimi din P, mulţimi care la rîndul lor sînt coextensive cu anumite clase, această presupunere pare să cauzeze unele complicaţii. Dar întrucît facem uz de o enumerare a mulţimilor, totul este de fapt în bună regulă. O altă metodă de rezolvare a acestei dificultăţi este dată în „Math. Annalen", vol. 126, pp. 385—409.

Aceleaşi raţionamente pot fi folosite şi în vederea demonstrării teoremelor similare pentru sistemele NB şi NQ în locul lui P şi Q. În acest scop facem uz de faptul că $Con(NB)$ este o teoremă a lui NQ şi aplicăm lema lui Bernays.

Rezultatele lui Myhill şi Suszko par la prima vedere înrudite îndeaproape cu rezultatele de mai sus. De fapt însă între ele există o deosebire esenţială. De exemplu, Myhill adoptă NB şi dă o enumerare a tuturor claselor cerute de axiomele lui Gödel din grupa B fără o clauză specială care să ţină seama de $A1$, adică de reprezentarea mulţimilor prin clase. În continuare, el propune să demonstrăm traductibilitatea în NB a sistemului obţinut din NB prin adăugarea ipotezei că toate clasele sînt denumibile, adică a enunţului corespunzător lui ($P1$) de mai sus, însoţit acum de o enumerare care omite condiţia reprezentării mulţimilor prin clase. Pe baza considerentelor de mai sus, s-ar părea că această aserţiune nu poate fi adevărată şi că sistemul este traductibil cel mult în NQ, dar nu în NB.

De fapt, observația 5 a lui Myhill de la p. 980 pare eronată, din cauză că inducția matematică respectivă nu poate fi efectuată în cadrul sistemului NB. Totodată, teorema IV a lui Myhill poate fi infirmată prin raționamente similare demonstrației pentru teorema 4 de mai sus. Mai mult, întrucît Myhill recurge la formula lui Gödel $V = L$, formulă care nu mai este direct adevărată în NQ, nu este evident nici măcar faptul că NB plus ipoteza sa cu privire la denumibilitate ar fi traductibil în NQ.

Suszko evită dificultatea, folosind ca noțiune primitivă un predicat enumerator care satisface condițiile inducției. Aceasta înseamnă însă că el recurge la o extensiune a lui NB și nu la însuși sistemul NB. După cum se pare, este indicat să determinăm precis domeniul de aplicabilitate al metodei lui Suszko.

§ 2. AXIOMATIZAREA FINITĂ

Articolul din 1952 al autorului extinde sistemul ZF astfel, încît include ceva în genul axiomei de categoricitate a lui Gödel. Drept urmare, conform teoremei 8 din capitolul precedent, avem o formulă definită Gxy din ZF, astfel încît ori de cîte ori formula $(x)(Ey)A(x, y)$ este valabilă pentru unii A, putem conchide $A(x, \in_y Gxy)$ în cadrul extinderii consistente a sistemului ZF.

Aceasta este tot ce ne trebuie pentru ca să dăm, în cadrul extinderii sistemului ZF, o enumerare prin funcțiile Skolem a tuturor mulțimilor a căror existență este cerută de orice număr finit de teoreme din ZF. Pentru concizie, să admitem că conjuncția numărului finit de axiome F este pur și simplu:

$$(1) \qquad (x)\,(Ey)\,A(x,y).$$

unde A nu mai conține cuantori. Întrucît am admis că (1) este consistent, el are un model din care putem extrage un model numărabil, care este cea mai mică parte, astfel încît, de exemplu, modelul mulțimii vide se află în el și, pentru orice x, dacă modelul lui x se află în el, atunci și modelul lui $\in_y Gxy$ se află în el. Acum, putem să definim o funcție E și să demonstrăm în extinderea lui ZF:

$$(2) \qquad E(0) \text{ este mulțimea vidă.}$$

$$(3) \qquad E(n+1) \text{ este } \in_y G(E(n),y).$$

Considerînd acum traducerea (1) obținută prin restrîngerea cuantorilor astfel, încît aceștia să fie definiți pe acest domeniu numărabil, putem da, pe baza rezultatului din 1954 al lui McNaughton o definiție de adevăr normală a traducerii lui F și putem demonstra $Con(F)$ în cadrul extinderii lui ZF. De aici rezultă că nici o mulțime finită de teoreme ale lui ZF nu poate da în calitate de consecințe toate axiomele lui ZF deoarece, în caz contrar, mulțimea finită de axiome plus axioma unică de categoricitate ar da toate axiomele extinderii lui ZF și, conform celei de a doua teoreme a lui Gödel, extinderea lui ZF și astfel însuși ZF ar fi sisteme inconsistente. În fapt, din definițiile normale ale adevărului rezultă mai mult:

Teorema 5. Nu există nici o mulțime finită consistentă F de formule din ZF, fără constante suplimentare, din care să putem infera toate axiomele propriu-zise ale lui ZF, respectiv Z1-Z9 precum și axioma de categoricitate.

Astfel, dacă ZF este inconsistent, atunci enunțul este adevărat, deoarece F este o mulțime consistentă. Dacă ZF este consistent și F oferă toate teoremele lui ZF împreună cu axioma de categoricitate, atunci, pe baza construcției lui McNaughton, putem demonstra iarăși $Con(F)$ în F, cu condiția ca F să fie o mulțime finită. Aceasta, pentru că putem construi atunci în F o definiție a adevărului lui F prin intermediul părții derivate care corespunde extinderii lui ZF; și, întrucît toate axiomele lui F sînt teoreme ale lui F, se poate demonstra că definiția adevărului este normală, ba chiar, întrucît F conține numai un număr finit de axiome, obținem o demonstrație formală pentru $Con(F)$.

Considerentele înfățișate pot fi precizate în mod natural mergînd în mai multe direcții. Analiza definițiilor adevărului pentru sistemele parțiale ale lui Z, în capitolul XV, a arătat limpede că putem merge în paralel cu analiza lui Z demonstrînd pentru teoria G a mulțimilor finite o teoremă similară teoremei 5 de acolo, că dacă F este o mulțime consistentă finită traductibilă în G, atunci $Con(F)$ este demonstrabilă în G. Mai mult, același lucru este adevărat în ce privește orice extindere a lui G deoarece, bineînțeles, baza comună necesară a lui Z poate fi obținută în cadrul extinderii. Așadar putem să demonstrăm o teoremă mai puternică:

Teorema 6. Pentru orice extindere S a lui G (în particular ZF) care nu conține alte constante noi și pentru fiecare mulțime finită consistentă de formule F care sînt traductibile în S sau, în particular, care sînt teoreme ale lui S, putem demonstra $Con(F)$ în S; așadar, S nu este traductibil în nici o asemenea mulțime F și nici o asemenea mulțime F nu poate oferi toate teoremele lui S.

O altă direcție de precizare a acestor rezultate constă în introducerea unor măsuri ale complexității demonstrațiilor din G și din extinderile acestuia, după structura cuantorilor din fiecare demonstrație. Aceasta este posibil, deoarece cuantorii necesitați de demonstrarea formulei $Con(F)$ sînt în relații constante simple cu cuantorii din F.

A treia posibilitatea constă în demonstrarea prin considerente similare a teoremei lui Montague („Bull. Am. Math. Soc.", 62, 1956, p. 260, rezumat):

Teorema 7. Dacă ZS se obține din ZF prin omiterea axiomei de înlocuire $Z9$, atunci nici o mulțime finită de formule care nu conțin alte noi constante nu poate fi adăugată în mod consistent la ZS pentru a da toate axiomele lui ZF.

Enunțul nu cade direct sub teorema 6, întrucît ZS conține și el o infinitate de axiome proprii. Dacă însă facem uz de rezultatul cunoscut că $Con(ZS)$ este demonstrabil în ZF atunci putem extinde demonstrația lui $Con(ZS)$ astfel, încît să obținem demonstrațiile ale consistenței extinderilor sale finite.

În consecință, se pare că toate rezultatele pe care autorul urmărea inițial să le obțină pot fi demonstrate prin metode ulterioare. Problema este dacă demonstrația inițială pe care autorul o dă în articolul său din 1952 este corectă sau măcar poate să fie făcută corectă prin anumite completări.

În acel articol, autorul a încercat să aplice direct raționamentul diagonalei la modelul formulei (1) de mai sus, după ce formulele (2) și (3) au fost date. S-a afirmat că modelul mai satisface:

(4) $$(y)\,(En)\,(y = E(n)).$$

Este însă evident că formula de mai jos este teoremă a lui ZF:

$$(5) \qquad (Ey)\,(m)\,(m \in y \equiv m \notin E(m)).$$

Așadar, dacă toate axiomele lui ZF ar fi derivabile în F, (5) ar fi de asemenea adevărată în cadrul modelului, ceea ce contrazice (4). Și atunci urmează teorema 5.

Nu s-a demonstrat însă în mod adecvat concluzia că (4) ar fi adevărată în cadrul modelului. În schimb, s-a argumentat pe temeiuri intuitive că, întrucît modelul a fost construit pentru a satisface (4), (4) trebuie să fie adevărată în cadrul modelului. Această afirmație trecea însă cu vederea faptul că (4) ca formulă a lui ZF trebuie să fie și ea relativizată conform modelului adoptat. Mai concret, așa cum Montague a arătat limpede și succint în scrisori, trebuie să demonstrăm că dacă x se află în model, atunci $\in_y Gxy$, pentru predicatul particular G dat mai sus, trebuie să se afle de asemenea în model și să satisfacă relația $G(x, \in_y Gxy)$ în cadrul modelului. Întrucît G conține cuantori, aceștia trebuie luați ca definiți pentru obiectele modelului.

Cu alte cuvinte, avînd în vedere (2), (3), precum și construcția modelului, demonstrația faptului că (4) este adevărată în cadrul modelului s-ar reduce la a arăta că:

(6) modelul mulțimii vide este unicul element din model care satisface, să zicem, $(x) x \notin y$ relativ la model;

(7) dacă x este modelul lui a iar $F(x)$ este acel obiect din model care este luat în calitate de $\in_y Gay$, atunci $(x, F(x))$ trebuie să satisfacă relația G relativ la model.

Este ușor să demonstrăm (6). Dar pentru demonstrarea lui (7), ar trebui să arătăm că $G(x, y)$ este o formulă adevărată în cadrul modelului numărabil, dacă și numai dacă este adevărată în cadrul modelului inițial mai cuprinzător din care a fost extras modelul numărabil. Întrucît G este foarte complexă și conține numeroase variabile legate, afirmația de mai sus nu este cîtuși de puțin evidentă.

Așadar, nu încape îndoială că observațiile critice făcute de Montague sînt justificate. Acesta a subliniat, de asemenea, că o demonstrație înrudită dată în 1953 de către Mostowski este susceptibilă de obiecții similare.

După cum se pare însă, este posibil să reparăm această demonstrație, fără să recurgem la o altă abordare. În construcția modelului numărabil trebuie să luăm măsuri pentru ca predicatul G să fie satisfăcut.

Astfel, pentru concizie, să admitem că Gxy este pur și simplu:

$$(8) \qquad (u)(Ev)(B(u,\ v,\ x,\ y),$$

iar B nu conține cuantori.

Acum, dacă sistemul finit este consistent, el posedă un model D, în care (1) este adevărată și, pentru fiecare x din D, există un y unic în D pentru care (8) este adevărată. Extragem un model numărabil D' prin următoarele condiții: (a) modelul în D al mulțimii vide se află în D'; (b) dacă modelul lui x în D se află în D' atunci și modelul lui $\in_y Gxy$ se află în D'; (c) dacă modelele în D ale lui u, x, $\in Gxy$ sînt în D', modelele lui $\in_v B(u, v, x, \in_y Gxy)$ se află în D'. Dar acest model D' poate fi enumerat în extinderea lui ZF printr-o

funcţie E şi (4) este satisfăcută. Prin urmare, teorema 5 este demonstrată printr-un considerent de acelaşi gen ca cel de care se face uz în articolul nostru din 1952.

§ 3. MULŢIMI FINITE ŞI NUMERE NATURALE

Reducerea iniţială a aritmeticii la teoria mulţimilor înfăptuită de către Frege şi Dedekind recurge la cuantificare pe domeniul mulţimilor infinite. Dacă, de exemplu, luăm mulţimea vidă ca 0, mulţimea unitate a lui n ca succesor al lui n, atunci definiţia lui Frege-Dedekind a mulţimii numerelor naturale este intersecţia tuturor mulţimilor infinite care conţin, fiecare în parte, mulţimea vidă, precum şi succesorul oricărui membru al lor. Zermelo şi alţii au demonstrat posibilitatea dezvoltării teoriei numerelor în cadrul teoriei mulţimilor finite, dînd mai întîi o teorie generală a numerelor ordinale în teoria mulţimilor. Recent, Michael Dummett a sugerat, în cursul unei discuţii, o anumită definiţie, foarte asemănătoare cu cea a lui Frege-Dedekind, însă care nu necesită decît teoria mulţimilor finite. Vom da aici o expunere bazată pe noua definiţie.

Pentru aceasta, avem nevoie de axioma extensionalităţii, de axiomele care garantează existenţa mulţimilor finite pe baza mulţimii vide şi de axioma de întemeiere. Aceasta din urmă revine desigur, la obţinerea inducţiei matematice. După cum se pare, mai avem nevoie şi de un caz special al *Aussonderungsaxiom*-ei, şi anume: fiind date x şi y, există mulţimea tuturor membrilor lui x, exceptînd y.

Pentru a fi mai expliciţi, folosim ca primitiv numai predicatul aparteneţei, facem uz de calculul predicatelor fără egalitate, în calitate de logică subiacentă şi definim egalitatea ca în ZF; cu alte cuvinte, două mulţimi sînt egale cînd au aceiaşi membri. Adoptăm totodată modul uzual de tratare a abstractelor, astfel încît $x \in \hat{y} Fy$ revine la Fx, definiţia egalităţii poate fi extinsă la cazul abstractelor, iar $\hat{y} Fy \in a$ revine la $(Ex)(x = \hat{y} Fy \,\&\, x \in a)$. Atunci axiomele sînt după cum urmează:

I. Axioma de extensionalitate. Dacă $x = y$, $x \in z \equiv y \in z$.
II. Existenţa mulţimii vide. $(Ey)(y = \hat{x}(x \neq x))$.
III. Existenţa succesorilor generalizaţi. $(x)\,(y)\,(Ez)(z = \hat{u}\ (u \in x \vee u = y))$.
IV. Axioma de întemeiere. La fel ca $Z8$.
V. Existenţa predecesorilor generalizaţi. $(x)\,(y)\,(Ez)\,(z = \hat{u}(u \in x \,\&\, u \neq z))$.

Definiţiile sînt:

Definiţia 1. $0 =_D \hat{x}(x \neq x)$.

Definiţia 2. $x' =_D \hat{z}(z \in x \vee z = x)$.

Definiţia 3. $C_a(u) =_D (0 \in u \,\&\, (y)\,((y \in u \,\&\, y \neq a) \supset y' \in u))$.

Definiţia 4. $Nn(x) =_D [(Eu)\, C_x(u) \,\&\, (v)\,(C_x(v) \supset x \in v]$.

Definiţia 5. $\{x\} =_D \hat{y}(y = x)$.

Definiția 6. $x \cup \{y\} =_D \hat{z}(z \in x \vee z = y)$.

Definiția 7. $x - \{y\} =_D \hat{z}(z \in x \,\&\, z \neq y)$.

Definiția 8. $\langle x, y\rangle =_D \hat{z}[z = \{x\} \vee z = \hat{u}(u = x \vee u = y)]$.

Definiția 9. $\langle x, y, z\rangle =_D \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$.

Definiția 10. $x + y = z =_D (Eu)\,(\langle x, 0, x\rangle \in u \,\&\, (v)\,(w)\,[(\langle x, v, w\rangle \in u \,\&\, v \neq y) \supset \langle x, v', w\rangle \in u] \,\&\, \langle x, y, z\rangle \in u)$.

Definiția 11. $x \cdot y = z =_D (Eu)(\langle x, 0, 0\rangle \in u \,\&\, (v)(w)\,[(\langle x, v, w\rangle \in u \,\&\, v \neq y) \supset (Et)\,(\langle x, v', t\rangle \in u \,\&\, w + x = t)] \,\&\, \langle x, y, z\rangle \in u)$.

Putem demonstra următoarele teoreme:

Z1. $Nn(0)$.

Demonstrație. Să luăm $0'$ ca u, avem $C_0(u)$. Dar $0 \in v \supset 0 \in v$. Deci $C_0(v) \supset \supset 0 \in v$.

Z2. $0 \neq x'$.

Demonstrație. $x \in x'$, dar $x \notin 0$.

L1. $x \notin x$.

Demonstrație. Dacă $x \in x$, atunci $\{x\}$ nu este întemeiată, ceea ce contrazice IV, cînd $y = x$ este luat ca $A\,(y)$

L2. $x \neq x'$.

Demonstrație. $x \in x'$, dar $x \notin x$.

L3. $x \notin y \vee y \notin x$.

Demonstrație. Dacă $x \in y \,\&\, y \in x$, atunci $\hat{u}(u = x \vee u = y)$ nu este întemeiată, ceea ce contrazice IV.

Z3. $x' = y' \supset x = y$.

Demonstrație. Dacă $x' = y'$, atunci întrucît $x' = x \cup \{x\}$, $y' = y \cup \{y\}$, avem $(x \in y \vee x = y)$ și $(y \in x \vee y = x)$. Conform cu *L3*, $x = y$.

L4. $C_x(w) \supset C_{x'}(w \cup \{x'\})$.

Demonstrație. Dacă $C_x(w)$, atunci $0 \in w \cup \{x'\} \,\&\, (y)\,[(y \in w \cup \{x'\} \,\&\, y \neq x \,\&\, \& y \neq x') \supset y' \in w \cup \{x'\}]$. Dar $y = x \supset y' = x'$. Deci $(y)\,[(y \in w \cup \{x'\} \,\&\, y \neq \neq x') \supset y' \in w \cup \{x'\}]$.

L5. $C_{x'}(v) \supset C_x(v - \{x'\})$.

Demonstrație. Dacă $C_{x'}(v)$, atunci $0 \in v \,\&\, (y)\,[(y \in v \,\&\, y \neq x') \supset y' \in]v)$. Deci $0 \in v - \{x'\} \,\&\, (y)\,[(y \in v - \{x'\} \,\&\, y \neq x \,\&\, y \neq x') \supset y' \in v - \{x'\}]$. Dar $x' \notin v - \{x'\}$. Deci $y \in v - \{x'\} \supset y \neq x'$, şi $(y)\,[(y \in v - \{x'\} \,\&\, y \neq x) \supset y' \in v - \{x'\}]$.

Z4. $Nn(x) \supset Nn(x')$.

Demonstrație. Întrucît $Nn(x)$, există w, $C_x(w)$. Conform cu *L4*, $C_{x'}(w \cup \{x'\})$. Dacă $C_{x'}(v)$, atunci $C_x(v - \{x'\})$ şi întrucît $Nn(x)$, $x \in v - \{x'\}$. Însă pentru toate v, dacă $C_{x'}(v)$, $y \in v$, $y \neq x'$, atunci $y' \in v$. Deci, conform *L2*, $x' \in v$.

L6. $Nn(x) \supset [x = 0 \vee (Ey)\,(x = y')]$.

Demonstrație. Să presupunem $Nn(x) \,\&\, x \neq 0$. Există u, $C_x(u)$. Să presupunem $\sim (Ey)\,(x = y'$. Atunci $\sim (Ey)\,(y \neq x \,\&\, x = y')$. Atunci $C_x(u - \{x\})$. Însă $x \notin u - \{x\}$, ceea ce contrazice ipoteza $Nn(x)$.

L7. $[C_x(v) \,\&\, x \notin v] \supset (Eu)\, C_{x'}(u) \,\&\, x' \notin u]$.

Demonstrație. Dacă $C_x(v)$, atunci $0 \in v - \{x'\}$, deoarece $0 \neq x'$. Dacă $x \notin v$, atunci $(y)\,[(y \in v \,\&\, y \neq x') \supset y' \in v - \{x'\}]$ şi $(y)\,[(y \in v - \{x'\} \,\&\, y \neq x') \supset y' \in v - \{x'\}]$. Deci $C_{x'}(v - \{x'\})$ şi $x' \notin v - \{x'\}$.

L8. $Nn(x') \supset Nn(x)$.

Demonstrație. Întrucît $Nn(x')$, există w, $C_{x'}(w)$. Conform cu *L5*, $C_x(w - \{x'\})$. Dacă $C_x(v) \,\&\, x \notin v$, atunci $(Eu)\,[C_{x'}(u) \,\&\, x' \notin u]$, ceea ce contrazice ipoteza $Nn(x')$.

Z5. $[A(0) \,\&\, (y)\,(A(y) \supset A(y'))] \supset (x)\,[Nn(x) \supset A(x)]$.

Demonstrație. Vrem să deducem $\sim (Ex)\,[Nn(x) \,\&\, \sim A(x)]$ din $A(0)$ şi $(y)\,[A(y) \supset A(y')]$.

Să presupunem $(Ex)\,[Nn(x) \,\&\, \sim A(x)]$. Conform cu IV, există y cu $[Nn(y) \,\&\, \sim A(y)] \,\&\, \sim (Ez)\,[z \in y \,\&\, Nn(z) \,\&\, \sim A(z)]$. Conform cu *L6*, $y = 0$ sau $(Ez)\,(y = z')$. Întrucît $A(0)$, $y \neq 0$. Dacă $y = z'$, atunci $z \in y$ şi, conform cu *L8*, $Nn(z)$. Mai mult, întrucît $A(z) \supset A(z')$, avem $\sim A(y) \supset \sim A(z)$. În consecință, $[Nn(y) \,\&\, \sim A(y)] \,\&\, (Ez)\,[z \in y \,\&\, Nn(z) \,\&\, \sim A(z)]$, ceea ce contrazice consecința lui IV enunțată mai sus.

Z6. $x + 0 = x \,\&\, x + y' = (x + y)'$.

Demonstrație. Luînd $u_0 = \{\langle x, 0, x\rangle\}$, avem $\langle x, 0, x\rangle \in u_0 \,\&\, (v)\,(w)\,[(\langle x, v, w\rangle \in u_0 \,\&\, v \neq 0) \supset \langle x, v', w'\rangle \in u]$. Aşadar, conform Df. 10, $x + 0 = x$. Fiind dat $x + y = z$, adică conform Df. 10, există u_y, astfel încît $\langle x, 0, x\rangle \in u_y \,\&\, (v)\,(w)\,[(\langle x, v, w\rangle \in u_y \,\&\, v \neq y) \supset \langle x, v', w'\rangle \in u_y] \,\&\, \langle x, y, z\rangle \in u_y$; luînd $u_{y'} = u_y \cup \{\langle x, y', z'\rangle\}$, avem $\langle x, 0, x\rangle \in u_{y'} \,\&\, (v)\,(w)\,[(\langle x, v, w\rangle \in u_{y'} \,\&\, v \neq y') \supset \langle x, v', x'\rangle \in u_{y'}] \,\&\, \langle x, y', z'\rangle \in u_{y'}$. Adică conform Df. 10, $x + y' = z' = (x + y)'$.

Z7. $x \cdot 0 = 0 \,\&\, x \cdot y' = (x \cdot y) + x$.

Demonstrație. Similar, folosind Df. 11.

Evident, fiecare funcție definită printr-o recursie primitivă poate fi tratată în mod similar.

CAPITOLUL XVIII
DEFINIȚII ALE ADEVĂRULUI ȘI DEMONSTRAȚII DE CONSISTENȚĂ*

§ 1. INTRODUCERE

Datorită cercetărilor lui Carnap, Tarski și ale altor autori, știm că, fiind dat un sistem S, putem construi într-un sistem mai puternic S' un criteriu de valabilitate (sau validitate) pentru S, criteriu conform căruia toate teoremele lui S sînt valabile. Obținem astfel în S' o demonstrație de consistență pentru S. Această demonstrație de consistență astfel obținută — demonstrație pe care, în cazul sistemelor destul de puternice, oricît ne-am forța imaginația nu o putem numi constructivă — nu prezintă prea mult interes în ceea ce privește înțelegerea mai clară a faptului dacă ne putem încrede în sistemul S sau dacă, și de ce, acest sistem nu duce la contradicții. Totuși, ea poate fi de folos în studierea interconexiunii diferitelor sisteme precum și a tăriei lor relative. De exemplu, dacă putem formaliza în S' o demonstrație de consistență pentru S, atunci, conform teoremei lui Gödel după care această demonstrație nu este formalizabilă în S însuși, trebuie să existe părți ale demonstrației capabile să fie formalizate în S' însă nu în S. Întrucît S poate fi un sistem foarte puternic, se pune problema naturii acestor raționamente. Cu titlu de ilustrare, vom examina forma exactă a unor atari raționamente relativ la anumite sisteme speciale, prin aplicarea „teoriei adevărului" a lui Tarski, teorie care ne oferă o metodă generală de demonstrare a consistenței unui sistem dat S într-un sistem mai puternic S'. Trebuie să fie limpede că considerentele ce vor fi expuse în acest articol se aplică la alte sisteme mai puternice sau tot atît de puternice ca sistemele speciale de care facem uz mai jos.

Inițial, cercetările expuse aici au fost determinate de dorința de a analiza mai minuțios următoarea situație destul de deconcertantă.

Fie S un sistem care conține calculul uzual de ordin 2 al predicatelor împreună cu teoria uzuală a numerelor ca teorie a indivizilor săi și fie S' un sistem care stă față de S în raportul unui calcul al predicatelor de ordin $(n+1)$ față de un calcul de ordin n, cu excepția faptului că nu facem uz de variabile de al $(n+1)$-lea tip în definirea claselor de tipuri inferioare. Aserțiunile

* Acest capitol a apărut în *Trans. Am. Math. Soc.*, 73, 1952, pp. 243—275. Un rezumat al capitolului a fost prezentat anterior în Wang (21). Cîteva din rezultatele cu privire la relații între NB și ZF au fost obținute independent de către Mostowski, aproximativ în aceeași perioadă; v. *Fund. Math.* 37, 1950. p. 111—124 și *J. Symbolic Logic*, 16, 1951, pp. 142—143. O privire generală asupra problemelor înrudite este dată în Rosser, Deux esquises de logique, Paris, 1955.

lui Tarski par să ne împingă să credem că putem demonstra consistența lui S în S'. Pe de altă parte se știe că dacă S este consistent, atunci el admite un model în domeniul numerelor naturale. Dar dacă S posedă un atare model, atunci — după cum s-ar părea de asemenea că putem raționa — S' posedă un model în S dat fiind că S conține atît numerele naturale cît și clasele lor. În consecință (după cum s-ar părea) putem formaliza aceste raționamente în cadrul lui S' și putem demonstra înăuntrul acestui sistem că dacă S este consistent, S' este consistent. Dacă lucrurile stau într-adevăr așa, vom dispune de o demonstrație de consistență a lui S' în interiorul lui S' și deci, conform teoremei lui Gödel despre demonstrațiile de consistență, S' (și probabil că și S) va fi inconsistent. În realitate, întrucît avem nevoie cel puțin de un sistem ca S' pentru dezvoltarea analizei și întrucît aceste raționamente nu depind de trăsăturile specifice ale sistemelor considerate, vom fi siliți să acceptăm concluzia că, practic vorbind, orice sistem adecvat analizei este inconsistent.

Încercînd să examinăm locul exact în care raționamentele de mai sus eșuează, am găsit util să formalizăm mai explicit anumite definiții ale adevărului și demonstrații de consistență legate de atari definiții. Credem că rezultatele acestor formalizări, așa cum vor fi prezentate mai jos, scot în evidență mai pregnant ca de obicei unele trăsături ale procedurilor de construire a definițiilor adevărului și a demonstrării consistenței. De exemplu, în definirea adevărului ne putem dispensa de folosirea claselor impredicative. Însă, după cum se pare, nu ne putem dispensa de aceste clase atunci cînd demonstrăm consistența; de asemenea, se pare că formalizarea unei demonstrații de consistență depinde în mare măsură de faptul dacă numărul axiomelor sistemului a cărei consistență urmează să fie demonstrată este finit sau infinit. Tot astfel, întrebuințarea unor variabile de tipuri superioare în definirea claselor de un tip dat generează clase esențialmente noi chiar pentru sisteme care altfel conțin deja anumite clase impredicative.

Se ajunge la constatarea că raționamentele din paragraful anterior dau greș din cauza dependenței teoriei numerelor de teoria subiacentă a mulțimilor. Drept urmare, anumite raționamente foarte simple din punct de vedere intuitiv nu pot fi formalizate nici chiar în sisteme foarte puternice. Astfel, în cazul sistemelor S și S' aflate în raportul de mai sus, indiferent cît de puternice ar fi ele, sînt valabile următoarele rezultate, în ipoteza că sistemele sînt consistente.

Dacă luăm numerele naturale ca noțiuni primitive sau ca introduse prin aceleași definiții atît în S cît și în S', atunci: (1) pentru un predicat Φ în S', putem arăta că $\Phi(0)$, $\Phi(1)$, ... sînt toate demonstrabile în S' dar că $\forall m(\Phi(m) \supset \Phi(m+1))$ nu este demonstrabil, (2) pentru un alt predicat Φ' din S', putem demonstra $\Phi'(0)$ și $\forall m(\Phi'(m) \supset \Phi'(m+1))$ în S' dar nu putem demonstra $\forall m\Phi'(m)$. Aceste rezultate conduc imediat la noi exemple de sisteme consistente însă ω-inconsistente. Pe de altă parte, dacă alegem în S și S' (diferite) definiții convenabile pentru numerele naturale, putem demonstra în S' că dacă S este ω-consistent, atunci S' este consistent și totodată putem demonstra în S' consistența lui S dar nu și ω-consistența lui S. Acest fapt arată de asemenea că deși S' conține o definiție a adevărului pentru S, nu putem demonstra în S' că S trebuie să posede un model standard, nepatologic.

În vederea separării a două momente diferite într-o definiție a adevărului, vom distinge între o definiție a adevărului și o definiție normală a adevărului. Spunem că S' conține o definiție a adevărului pentru S dacă putem găsi în S' un predicat sau o clasă Tr pentru care putem demonstra relativ la propozițiile lui S toate cazurile schemei de adevăr a lui Tarski. Dacă în plus putem demonstra în S' că toate teoremele lui S sînt adevărate conform definiției adevărului, atunci spunem că S' conține o definiție normală a adevărului pentru S. Această distincție cît se poate de naturală va fi adoptată în cursul acestui articol.

§ 2. O DEFINIȚIE A ADEVĂRULUI PENTRU TEORIA MULȚIMILOR A LUI ZERMELO

Expresiile teoriei mulțimilor a lui Zermelo sînt construite cu variabile de mulțimi x_1, x_2, x_3, ... și trei constante: semnul $|$ pentru negarea alternativă (funcția bară a lui Sheffer, negația disjunctivă), semnul $\forall$ pentru cuantificarea generală sau universală (operatorul toți) și semnul $\in$ pentru relația de apartenență. Deși din punct de vedere teoretic ne putem dispensa de ele, parantezele pentru gruparea diferitelor părți ale unei expresii sînt și ele folosite. O propoziție (sau o formulă bine formată), are sau forma simplă $y \in z$ sau forma complexă $p \mid q$ sau $\forall yp$, în locul lui y și z putînd substitui orice variabile iar în locul lui p și q orice propoziții. Dintre propoziții, unele pot fi selectate în calitate de teoreme. Totuși, întrucît acest paragraf tratează doar construirea unei definiții a adevărului și nu construirea unei definiții normale a adevărului, selecția teoremelor nu este relevantă pentru considerentele expuse aici. Așa că, să ne închipuim deocamdată doar că luăm o mulțime definită arbitrară de propoziții în calitate de teoreme ale teoriei lui Zermelo.

Problema constă în a găsi un sistem adecvat S_1 în care să putem afla o clasă (sau un predicat) Tr și să demonstrăm ca teoreme cazurile speciale ale schemei de adevăr a lui Tarski pentru toate enunțurile (propoziții, formule bine formate care nu conțin nici o variabilă liberă) ale teoriei lui Zermelo.

Pentru simplificarea structurii metasistemului cerut, vom admite că sintaxa teoriei lui Zermelo (precum și cea a oricărui alt sistem considerat) a fost aritmetizată în maniera lui Gödel [1]. Atunci, fiecare expresie (și, în particular, fiecare propoziție) este reprezentată printr-un număr definit (să zicem)[2] $\mathfrak{m}$. Fie $H(\mathfrak{m})$ expresia reprezentată prin numărul $\mathfrak{m}$. Problema constă în a defini într-un sistem S_1 o clasă Tr de numere naturale pentru care are loc ceea ce urmează:

(TS) Pentru orice enunț $H(\mathfrak{m})$ al teoriei lui Zermelo putem demonstra în S_1: $H(\mathfrak{m})$ dacă și numai dacă $\mathfrak{m}$ aparține la Tr.

În mod natural putem alege metasistemul S_1 în maniere diferite și demonstrația lui (TS) ar deveni oarecum mai ușoară dacă metasistemul folosit este mai bogat sau mai puternic. Totuși, întrucît unul din scopurile urmărite de noi este explicitarea materialului cerut de construirea unei definiții a adevă-

[1] V. Gödel, [2] și Hilbert-Bernays, [3], vol. **2**, § 4.

[2] Spre deosebire de variabilele m, n etc., simbolurile $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ etc. reprezintă în mod ambiguu numeralele 0, 1, 2 etc.

rului, este de dorit, după cum se pare, să alegem un sistem cît mai slab (sau simplu) posibil. Sistemul S_1 pe care îl alegem poate fi caracterizat în linii mari ca avînd o tărie egală cu cea a unui calcul al predicatelor de ordinul 2 fundat pe teoria numerelor naturale. Se pare că nu este posibil să recurgem la un sistem substanțial mai slab decît acest sistem S_1 (vezi totuși sistemul S_2 de mai jos).

S_1 conține variabile x_1, x_2,... pentru elemente și variabile X_1, X_2, ... pentru clase. Propozițiile sînt construite în maniera uzuală din propoziții simple de forma $x_1 \in x_2$ (elementul x_1 aparține elementului x_2) etc. și $x_1 \eta X_2$ (elementul x_1 aparține clasei X_2) etc. cu ajutorul conectivelor funcții de adevăr și a cuantorilor pentru ambele genuri de variabile.

Teoremele lui S_1 sînt determinate după cum urmează. Sistemul conține teoriile obișnuite ale cuantificării (calculele predicatelor) pentru ambele genuri de variabile, precum și axiome proprii date mai jos (unde $x_1 = x_2$ reprezintă

$$\forall x_4(x_4 \in x_1 \equiv x_4 \in x_2)):$$

$Ax1$. Prima axiomă de extensionalitate. $(x_1 = x_2 \,\&\, x_1 \in x_3) \supset x_2 \in x_3$.

$Ax2$. Existența elementului nul. $\exists x_2 \forall x_1(\neg x_1 \in x_2)$.

$Ax3$. Existența elementelor finite. $\exists x_2 \forall x_1 (x_1 \in x_2 \equiv (x_1 \in x_3 \vee x_1 = x_4))$.

$Ax4$. A doua axiomă de extensionalitate. $(x_1 = x_2 \,\&\, x_1 \eta X_1) \supset x_2 \eta X_1$.

$Ax5$. Axioma clasei. Pentru orice propoziție p din S_1 care nu conține variabila X_1, $\exists X_1 \forall x_1(x_1 \eta X_1 \equiv p)$.

Din $Ax2$. și $Ax3$. putem obține toate elementele finite construite plecînd de la elementul nul luînd mulțimile unitate și mulțimile sumă. $Ax5$ afirmă că fiecare proprietate sau predicat al acestor elemente care poate fi exprimat în S_1 determină o clasă a lui S_1. Acest sistem este strîns legat de anumite sisteme standard. Astfel, pe de o parte, el diferă de partea alcătuită din axiomele grupelor I—III ale sistemului lui Bernays [1] numai prin aceea că $Ax5$. ia locul axiomelor ceva mai slabe din grupa III a lui Bernays. Pe de altă parte, practic vorbind, sistemul are aceeași tărie ca unul din sistemele propuse de Quine [2], deși Quine întrebuințează în loc de $Ax3$. o axiomă care afirmă că mulțimea sumă a două elemente este și ea un element.

În S_1 putem recurge sau la definițiile de care face uz Bernays sau la cele de care face uz Quine și putem dezvolta teoria obișnuită a numerelor luînd totodată anumite elemente în calitate de numere naturale. Astfel, urmîndu-l pe von Neumann [3] putem introduce următoarele definiții:

2.1. Numărul zero 0 este identificat cu elementul nul.

2.2. Succesorul $x_1 + 1$ al unui număr natural x_1 este identificat cu elementul alcătuit din toți membrii lui x_1 împreună cu x_1 însuși (adică mulțimea sumă a lui x_1 și mulțimea unitate a acestuia).

[1] v. Bernays [1], Partea 1. Notăm în treacăt că $Ax1$ a lui S_1 este de fapt redundantă, în virtutea axiomelor 4 și 5. Din motive similare, — de care Bernays este, firește, conștient — cele două axiome de la mijloc dintre cele patru axiome asupra identității enumerate în lucrarea lui Bernays [1], p. 67, ca și prima dintre cele două axiome de la p. 68, sînt deductibile din celelalte axiome asupra identității cu ajutorul axiomelor lui Bernays din grupa III.

[2] v. Quine [II], p. 140.

[3] v. von Neumann [7].

Atunci, putem defini predicatul Nn de a fi un număr natural în oricare din aceste două moduri [1].

2.3. $Nn(x_1)$ dacă și numai dacă $\forall X_1((0\,\eta X_1 \,\&\, \forall x_2(x_2\eta X_1 \supset (x_2+1)\,\eta X_1)) \supset \supset x_1\eta X_1)$.

2.4. $Nn(x_1)$ dacă și numai dacă sînt satisfăcute următoarele condiții:

(1) $\forall x_2 \forall x_3((x_2 \in x_3 \,\&\, x_3 \in x_1) \supset x_2 \in x_1)$;
(2) $\forall x_2 \forall x_3((x_2 \in x_1 \,\&\, x_3 \in x_1 \,\&\, x_2 \neq x_3) \supset (x_2 \in x_3 \vee x_3 \in x_2))$;
(3) $\forall X_1((\exists x_2(x_2\eta X_1) \,\&\, \forall x_2(x_2\eta X_1 \supset x_2 \in x_1)) \supset \exists x_3(x_3\eta X_1 \,\&\, \forall x_4 - (x_4 \in x_3 \,\&\, \& \; x_4\eta X_1)))$;
(4) $\forall x_2((x_2 \in x_1 \vee x_2 = x_1) \supset (x_2 = 0 \vee \exists x_3(x_2 = x_3 + 1)))$.

Funcții recursive cum sînt adunarea și înmulțirea pot fi definite în maniera cunoscută [2]. Prin urmare, teoria numerelor poate fi dezvoltată în cadrul lui S_1. Variabilele m, n, k etc. luînd ca valori numere naturale pot fi introduse prin definiții contextuale ca $\forall m \Phi m$ reprezintă $\forall x_1(Nn(x_1) \supset \Phi x_1)$ etc. Principiul inducției poate fi demonstrat pentru toate propozițiile lui S_1, cu ajutorul lui $Ax5$. (axioma clasei):

2.5. Dacă Φx_1 este o propoziție oarecare din S_1, atunci $(\Phi 0 \,\&\, \forall n(\Phi n \supset \supset \Phi(n+1))) \supset \forall m \Phi m$.

Din considerațiile de pînă acum rezultă că S_1 este, în ceea ce privește formele lingvistice, o extindere a teoriei mulțimilor a lui Zermelo și conține: (1) variabile de tip superior; (2) notații uzuale ale logicii generale; (3) toate expresiile teoriei lui Zermelo; (4) teoria obișnuită a numerelor. În consecință, conform unei aserțiuni a lui Tarski [3], dacă axiomele lui S_1 sînt suficient de tari, putem folosi ca metalimbaj S_1, definind în cadrul acestuia conceptul de adevăr pentru teoria lui Zermelo, recurgînd numai la denumiri și predicate ale expresiilor (sau termenilor din morfologia) teoriei lui Zermelo. Cu toate acestea, întrucît S_1 conține teoria numerelor și am admis că sintaxa teoriei lui Zermelo a fost aritmetizată, putem folosi în S_1, ca denumiri și predicate ale expresiilor teoriei lui Zermelo, numere naturale și predicate de numere naturale. Așadar, ne putem aștepta pe bună dreptate, să putem obține în S_1 o clasă (sau un predicat) de adevăr pentru teoria lui Zermelo. Singura problemă care mai rămîne este aceea dacă axiomele lui S_1 sînt suficient de tari ca să ne permită să demonstrăm schema (TS). Vom arăta că răspunsul este pozitiv. În linii generale, construcțiile urmează metodele elaborate de Tarski și alți autori [4], însă demonstrațiile ca și teoremele exacte din metasistem de care avem nevoie sînt înfățișate aici mai explicit decît la autorii anteriori.

[1] Prima definiție coincide în esență cu ultima definiție din Quine [11], p. 142 (v. și Quine [1], p. 216).

A doua definiție este definiția numerelor ordinale finite de la pag. 11 din Bernays [1, Partea II], în timp ce numerele ordinale sînt definite prin a doua definiție care apare la pag. 9, ibidem.

[2] v. Quine [10], pag. 259 și Bernays [1] Partea II, pag. 11.

[3] v. Tarski (16), pag. 399, Teza A. în locul lui (1), Tarski pune cerința ca metalimbajul să fie de ordin sau tip superior limbajului pentru care se construiește definiția adevărului. Noțiunea lui Tarski de ordin sau tip al unui limbaj pare să privească atît formele lingvistice cît și puterea demonstrativă a sistemului lingvistic.

[4] v. Tarski (16; 17; 18), Hilbert-Bernays (3), vol. *II*, p. 324 și urm.

Aritmetizînd sintaxa teoriei lui Zermelo, putem defini în S_1 predicate sintactice și funcții pentru aceasta. Să admitem că toate propozițiile (formulele bine formate) ale teoriei mulțimilor a lui Zermelo au fost enumerate și, în particular, au fost enumerate astfel încît atunci cînd o propoziție este parte a unei alte propoziții, partea precede întotdeauna întregul. Pentru orice $\mathfrak{i}$, fie $F(\mathfrak{i})$ a $\mathfrak{i}$-a propoziție din teoria lui Zermelo în cadrul enumerării adoptate. De exemplu, $F(1)$ poate fi chiar $x_1 \in x_1$. Putem defini în S_1 trei predicate $M(m, n, k)$, $T(m, n, k)$ $Q(m, n, k)$ și o funcție R_m care satisfac următoarele condiții:

2.6. $M(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k})$ atunci și numai atunci cînd $\mathrm{F}(\mathfrak{m})$ este $x_{\mathfrak{n}} \in x_{\mathfrak{k}}$.

2.7. $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k})$ atunci și numai atunci cînd $F(\mathfrak{m})$ este $F(\mathfrak{n}) \mid F(\mathfrak{k}))$.

2.8. $Q(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k})$ atunci și numai atunci cînd $F(\mathfrak{m})$ este $\forall x_{\mathfrak{n}} F(\mathfrak{k})$.

2.9. $R_{\mathfrak{m}}$ este numărul operatorilor logici din $F(\mathfrak{m})$.

Atunci, se pot demonstra cu ușurință în S_1 următoarele proprietăți elementare.

2.10. $(M(m, n, k) \,\&\, M(m, n', k')) \supset (n = n' \,\&\, k = k')$.

2.11. $(T(m, n, k)) \,\&\, T(m, n', k')) \supset (n = n' \,\&\, k = k')$.

2.12. $(Q(m, n, k) \,\&\, Q(m, n', k')) \supset (n = n' \,\&\, k = k')$.

2.13. $R_m \leqslant 0 \supset \exists n \exists k M(m, n, k)$.

2.14. $(R_m \leqslant (j + 1) \,\&\, (T(m, n, k) \vee Q(m, i, k)) \supset (R_n \leqslant j \,\&\, R_k \leqslant j)$.

Definiția adevărului pentru teoria lui Zermelo se prezintă în linii mari astfel[1]: o propoziție (cu sau fără variabile libere) a teoriei lui Zermelo este adevărată dacă și numai dacă este satisfăcută de toate șirurile finite de mulțimi ale teoriei mulțimilor a lui Zermelo, iar un șir finit g satisface (o propoziție $F(\mathfrak{m})$ reprezentată prin numărul) $\mathfrak{m}$ atunci și numai atunci cînd $F'(\mathfrak{m})$, unde $F'(\mathfrak{m})$ este rezultatul obținut din $F(\mathfrak{m})$ prin substituirea simultană a celui de-al $\mathfrak{n}$-lea termen al lui g în locul tuturor variabilelor libere $x_{\mathfrak{n}}$ care figurează în $F(\mathfrak{m})$[2]. În cazurile particulare cînd $F(\mathfrak{m})$ este un enunț (al teoriei lui Zermelo), urmează că $\mathfrak{m}$ aparține clasei numerelor care reprezintă enunțuri adevărate atunci și numai atunci cînd $F(\mathfrak{m})$.

În cadrul definițiilor lui Tarski, în locul șirurilor finite sînt folosite șiruri infinite. Abordarea noastră nu permite aceasta, deoarece axiomele lui S_1 garantează numai că toate șirurile finite de elemente sînt de asemenea elemente, însă nu garantează că și șirurile infinite sînt elemente. Totuși, avînd la dispoziție șiruri cu un număr finit arbitrar de termeni, ne putem dispensa complet în cadrul raționamentelor noastre de șirurile infinite.

Definiția unui șir este pur și simplu aceasta. Un element x_1 al lui S_1 este un șir finit de elemente ale lui S_1 dacă există un număr n ($n = 1, 2, \ldots$) astfel

[1] v. Tarski [16], pp. 311—313.

[2] Trebuie observat că în acest loc, ca și pretutindeni în cadrul acestui articol, încercăm să evităm folosirea ghilimelelor și a semnelor de colț (v. Cf. Quine [10], p. 33). Sperăm că acest mod de a proceda nu va da naștere nici unei neînțelegeri sau confuzii mai grave.

încît x_1 este un șir de n-termeni; iar x_1 este un șir de *n-termeni* atunci și numai atunci cînd pentru toți m, $m > 0$ și $m \leqslant n$, există un unic element x_2 din S_1 astfel încît perechea ordonată a lui m și x_2 aparține la x_1. Mai explicit, definiția se poate enunța după cum urmează [1].

2.15. Perechea ordonată (x_1, x_2) a două elemente x_1 și x_2 ale lui S_1 este elementul lui S_1 alcătuit din mulțimea unitate a lui x_1 și mulțimea sumă a lui x_1 și x_2.

2.16. $Sq(x_1)$ (adică x_1 este un șir finit) atunci și numai atunci cînd $\exists\, n(n > 0 \,\&\, \forall\, x_3(\exists\, x_2)\ (x_2,\ x_3) \in x_1) \equiv \exists\, m(m = x_3 \,\&\, m \leqslant n) \,\&\, \forall\, x_2\ \forall\ x_3\ \forall\ x_4(((x_2,\ x_3) \in x_1 \,\&\, (x_4,\ x_3) \in x_1) \supset x_2 = x_4)$.

Desigur, în S_1 există elemente care sînt șiruri finite conform acestei definiții. În realitate, pentru fiecare n și orice n elemente $x_1, \ldots, x_n$ din S_1, mulțimea compusă din $(x_1, 1)\ (x_2, 2), \ldots, (x_n, n)$ este un astfel de șir. Folosind litera g ca variabilă definită pe domeniul acelor elemente din S_1 care sînt șiruri finite, avem:

2.17. $\forall\, g \Phi g$ atunci și numai atunci cînd $\forall\, x_1(Sq(x_1) \supset \Phi x_1)$.

Al j-lea termen g_j al unui șir finit g este mulțimea corelată cu j:

2.18. $x_1 \in g_j$ atunci și numai atunci cînd $\exists\, x_2((x_2,\ j) \in g \ \&\ x_1 \in x_2)$.

Această definiție duce la o complicație destul de neplăcută care nu ar apărea dacă am folosi în schimb șiruri infinite. Astfel, atunci cînd g conține numai k termeni, iar j este mai mare decît k, am dori să spunem că g nu are al j-lea termen; or, conform acestei definiții, g_j ar fi atunci mulțimea nulă. În asemenea cazuri degenerate vom avea rezultatul că (g_j, j) nu aparține cu necesitate lui g. Se constată însă că această trăsătură nenaturală nu stînjenește construcțiile noastre ulterioare, în sensul că nu afectează definițiile și teoremele care ne interesează în mod special.

Urmează noțiunea „șirul $t(g, n, x_2)$ obținut din g prin substituirea mulțimii x_2 în locul celui de-al n-lea termen“;

2.19. $(x_1,\ m) \in t(g,\ n,\ x_2)$ atunci și numai atunci cînd $(m \neq n \,\&\, (x_1,\ m) \in g) \vee (m = n \,\&\, x_1 = x_2)$

Întrebuințînd noțiunile preliminare introduse în 2.6—2.9. și 2.16—2.19, putem trece acum la caracterizarea noțiunii de satisfacere („gSm“ însemnînd „g satisface a m-a propoziție din teoria lui Zermelo“) prin următoarele condiții:

(1) $M(m,\ n,\ k) \supset (gSm \equiv g_n \in g_k)$; (2) $T(m,\ n,\ k) \supset (gSm \equiv (gSn \mid gSk))$;

[1] În această ordine de idei, am vrea să menționăm o definiție alternativă interesantă a șirurilor care se aplică în egală măsură la șirurile finite și infinite: $S_0(x_1)$ atunci și numai atunci cînd $\forall x_2(x_2 \in x_1 \supset \exists\, x_3\, \exists\, m(x_2 = (x_3,\ m) \ \&\ m \neq 0))$. Cu alte cuvinte, în loc de a marca termenii șirurilor, marcăm membrii fiecărui termen și numim șir compus din acești termeni suma tuturor acestor membrii marcați. Astfel, dacă x_1 este un șir, atunci al j-lea termen al lui x_1 este tocmai mulțimea tuturor x_2 pentru care $(x_2, j) \in x_1$. În cazul cînd mulțimile sau clasele unui sistem se divid în tipuri, astfel încît o mulțime și membrii acesteia au tipuri diferite, definiția de mai sus prezintă în comparație cu cea obișnuită avantajul de a păstra pentru șir același tip pe care îl au termenii săi. În anumite cazuri, se pare că trebuie să facem uz de o asemenea definiție, înlocuind definiens-ul lui 2.18 prin $(x_1,\ j) \in g$ și cel al lui 2.19 prin $((m \neq n \ \&\ (x_1,\ m) \in g) \vee \vee\ (m = n \ \&\ x_1 \in x_2))$. Cînd este necesar vom admite că au fost adoptate aceste definiții în locul definițiilor 2.16, 2.18 și 2.19 din text. De exemplu cînd definim adevărul pentru R în R′ și demonstrăm 5.8 în ultimul paragraf al acestui capitol vom adopta asemenea definiții alternative.

(3) $Q(m, n, k) \supset (gSm \equiv \forall x_1(t(g, n, x_1) Sk))$. Această caracterizare recursivă poate fi transformată într-o definiție explicită pentru „gSm" prin metode cunoscute și apoi putem trece la definirea conceptului de adevăr pentru teoria lui Zermelo.

Definiția 1. $G1(g, m)$ *atunci și numai atunci cînd* $\exists n \exists k\ (M(m, n, k) \& g_n \in g_k)$.

Definiția 2. $G2\ (g, m, X_1)$ *atunci și numai atunci cînd* $\exists n \exists k\ (T(m, n, k) \& ((g, n)\eta X_1 \mid (g, k)\eta X_1))$.

Definiția 3. $G3\ (g, m, X_1)$ *atunci și numai atunci cînd* $\exists n \exists k (Q(m, n, k) \& \forall x_1((t(g, n, x_1), k)\eta X_1))$.

Definiția 4. $G(g, m, X_1)$ *atunci și numai atunci cînd* $(G_1(g, m) \vee G_2(g, m, X_1) \vee \vee G_3(g, m, X_1))$.

Definiția 5. $G_j(X_1)$ *atunci și numai atunci cînd* $\forall g \forall m(R_m \leqslant j \supset \supset ((g, m)\ \eta X_1 \equiv G(g, m, X_1)))$.

Definiția 6. gSm *atunci și numai atunci cînd* $\forall X_1(G_{R_m}(X_1) \supset (g, m)\eta X_1)$.

Definiția 7. $m\eta Tr$ *atunci și numai atunci cînd* $\forall g(gSm)$.

Definiția 5 revine în esență la aceasta: dacă $G_j(X_1)$, atunci X_1 conține toate perechile ordonate (g, m) astfel încît g satisface m, iar R_m nu este mai mare ca j. Pentru demonstrarea condițiilor (1)—(3) ca teoreme ale lui S_1, vom arăta întîi că pentru orice j există în S_1 o clasă X_1 astfel încît $G_j(X_1)$ și că, dacă $G_{R_m}(X_1)$ atunci, pentru orice g, gSm atunci și numai atunci cînd (g, m) aparține lui X_1.

Următoarele trei teoreme din S_1 sînt evidente pe baza definițiilor.

2.20. $M(m, n, k) \supset (-G2(g, m, X_1) \& - G3(g, m, X_1))$.

2.21. $T(m, n, k) \supset (-G1(g, m, X_1) \& G3(g, m, X_1))$.

2.22. $Q(m, n, k) \supset (-G1(g, m, X_1) \& - G2(g, m, X_1))$.

Demonstrăm teorema că pentru orice j există în S_1 o clasă X_1 astfel încît $G(X_1)$.

2.30. $\exists X_1(G_0(X_1))$.

Demonstrație. Conform Df. 4 (folosind 2.13 și 2.20), pentru fiecare X_1, dacă $R_m \leqslant 0$, atunci $(G1(g, m) \equiv G(g, m, X_1))$. Conform cu $Ax5$, există o clasă X_1, astfel încît pentru fiecare g și fiecare m, $(g, m)\eta X_1 \equiv G1(g, m))$. Așadar, conform Df.5 $G_0(X_1)$.

2.31. $\exists X_1(G_j(X_1)) \supset \exists X_2(G_{j+1}(X_2))$.

Demonstrație. Fie X_1 o clasă astfel încît $G_j(X_1)$. Așadar, conform Df. 5, $R_m \leqslant j \supset ((g, m)\eta X_1 \equiv G(g, m, X_1))$. Conform cu $Ax5$. avem o clasă X_2 astfel încît $\forall g \forall m((g, m)\eta X_2 \equiv G(g, m, X_1))$. Astfel, dacă $R_i \leqslant j$, atunci $((g, i)\ \eta X_1 \equiv (g, i,)\eta X_2)$. Așadar, conform 2.14 și Df. 1—Df. 4, dacă $R_m \leqslant j + 1$, atunci

$(G(g, m, X_1) \equiv G(g, m, X_2))$. În consecință, $R_m \leqslant j+1 \supset ((g, m)\eta X_2 \equiv G(g, m, X_2))$. Așadar, conform Df,5, 2.31 este demonstrat.

Pe baza teoremelor 2.30 și 2.31 obținem imediat:

2.32. Pentru orice constantă j, putem demonstra în S_1: $\exists\, x_1(G\mathfrak{j}(X_1))$.

În plus, aplicînd inducția (consecința 2.5 a lui $Ax5$) la propoziția $\exists\, X_1(G_i(X_1))$, obținem din 2.30 și 2.31:

2.33. $\forall j \exists\, X_1(G_j(X_1))$.

Observăm că pentru demonstrarea lui 2.33, punem cerința ca variabilele (de clase) mari legate să fie permise în propoziția definitorie p din $Ax5$ pentru formarea clasei. Mai tîrziu, vom sublinia că acesta este unul din puținele locuri unde avem nevoie să aplicăm asemenea cazuri ale lui $Ax5$.

Avînd la îndemînă pentru orice j existența unei clase X_1 astfel încît $G\mathfrak{j}(X_1)$, vrem să demonstrăm acum un fel de teoremă de unicitate pentru aceste clase. Întrucît în definiția lui $G\mathfrak{j}$, ne interesează numai acele numere m pentru care $R_m \leqslant j$, vom demonstra numai că pentru toți acei m pentru care $R_m \leqslant j$, dacă $G_j(X_1)$ și $G_j(X_2)$, atunci $(g, m)\eta X_1$ dacă și numai dacă $(g, m)\eta X_2$.

2.34. $(R_m \leqslant 0 \,\&\, G_0(X_1) \,\&\, G_0(X_2)) \supset ((g, m)\eta X_1 \equiv (g, m)\eta X_2)$.

Demonstrație. Conform Df. 4 și Df. 5 (aplicînd 2.13 și 2.20), dacă $(G_0(X_1)$ & & $G_0(X_2)$ & $R_m \leqslant 0)$, atunci $((g, m)\eta X_1 \equiv G1(g, m)$ și $(g, m)\eta X_2 \equiv G1(g, m))$. Așadar, teorema este demonstrată.

2.35. Dacă $\forall X_1 \forall X_2 \forall g \forall m((R_m \leqslant j \,\&\, G_j(X_1) \,\&\, G_j(X_2)) \supset ((g, m)\eta X_1 \equiv (g, m)\eta X_2))$, atunci $\forall g \forall m((R_m \leqslant j+1 \,\&\, G_{j+1}(X_3) \,\&\, G_{j+1}(X_4)) \supset ((g, m)\eta X_3 \equiv (g, m)\eta X_4))$.

Demonstrație. Vom admite că $G_{j+1}(X_3)$ și $G_{j+1}(X_4)$. Atunci, conform Df. 5 avem de asemenea $G_j(X_3)$ și $G_j(X_4)$. Așadar, prin ipoteză, dacă $R_m \leqslant j$, atunci $(g, m)\eta X_3 \equiv (g, m)\eta X_4$. În consecință, conform 2.14 și Df. 4 dacă $R_m \leqslant j+1$, atunci $G(g, m, X_3) \equiv G(g, m, X_4)$. Așadar, conform Df. 5 teorema este demonstrată.

O consecință imediată din 2.34 și 2.35 este:

2.36. Pentru orice constantă j, se poate demonstra în S_1: $(R_m \leqslant \mathfrak{j}) \,\&\, G\mathfrak{j}(X_1)$ &

$\&\, G\mathfrak{j}(X_2)) \supset ((g, m)\eta X_1 \equiv (g, m)\eta X_2)$.

Iarăși, aplicînd principiul inducției 2.5, avem:

2.37. $(j)(R_m \leqslant j \,\&\, G\mathfrak{j}\,(X_1) \,\&\, G_1(X_2)) \supset ((g, m)\eta X_1 \equiv (g, m)\eta X_2)$.

Acesta este al doilea loc în care avem nevoie de un caz al lui $Ax.5$ în care propoziția definitorie pentru o clasă conține variabile legate mari.

Teorema următoare decurge din 2.37.

2.38. $G_{R_m}(X_1) \supset (gSm \equiv (g, m)\eta X_1)$.

Demonstrație. Conform 2.37, $(G_{R_m}(X_1) \,\&\, (g, m)\eta X_1) \supset \forall X_2\, (G_{R_m}(X_2) \supset (g, m)\eta X_2)$. Așadar, conform Df. 6, teorema se demonstrează cu ușurință.

Dacă la dispoziția noastră stă numai 2.36. dar nu 2.37, atunci putem demonstra numai:

2.39. Pentru fiecare constantă $\mathfrak{m}$, putem demonstra în S_1: $G_{R_{\mathfrak{m}}}(X_1) \supset \supset (gS\mathfrak{m} \equiv (g, \mathfrak{m})\, \eta X_1)$.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm proprietățile caracteristice ale relației gSm.

2.40. $M(m, n, k) \supset (gSm \equiv g_n \in g_k)$.

Demonstrație. Conform 2.20 și Df. 5, $(M(m, n, k) \,\&\, G_0(X_1)) \supset ((g, m) \eta X_1 \equiv \equiv G1(g, m))$. Așadar, conform Df. 1, $(M(m, n, k) \,\&\, G_0(X_1)) \supset ((g, m)\, \eta X_1 \equiv \equiv \exists n \exists k (M(m, n, k) \,\&\, g_n \in g_k))$. Evident, $M(m, n, k) \supset (g_n \in g_k \supset \exists n \exists k (M(m, n, k) \,\&\, g_n \in g_k))$. Pe de altă parte, conform 2.10, $(M(m, i, j) \,\&\, {}_ig \in g_j) \supset \supset (M(m, n, k) \supset g_n \in g_k)$. Așadar, $(M(m, n, k) \,\&\, G_0(X_1)) \supset ((g, m)\, \eta X_1 \equiv \equiv g_n \in g_k)$. În consecință, conform 2.38 $(M(m, n, k) \,\&\, G_0(X_1)) \supset (gSm \equiv \equiv g_n \in g_k)$. Conform 2.30, teorema este demonstrată.

2.41. $T(m, n, k) \supset (gSm \equiv (gSn \mid gSk))$.

Demonstrație. Conform 2.21 și Df. 5, $(T(m, n, k) \,\&\, G_{R_m}(X_1))\ ((g, m)\, \eta X_1 \equiv G_2(g, m, X_1))$. Așadar, conform 2.11 și Df. 2, $(T(m, n, k) \,\&\, G_{R_m}(X_1)) \supset \supset ((g, m)\, \eta X_1 \equiv (g, n)\, \eta X_1 \mid (g, k)\, \eta X_1))$. Conform 2.38 $(T(m, n, k) \,\&\, G_{Rm}(X_1)) \supset (gSm \equiv (gSn \mid gSk))$. În consecință, conform 2.33 teorema este demonstrată.

2.42 $Q(m, n, k) \supset (gSm \equiv \forall x_1 (t(g, n, x_1)\, Sk))$.

Demonstrație. Conform 2.22 și Df. 5, $(Q(m, n, k) \,\&\, G_{R_m}(X_1)) \supset ((g, m) \eta X_1 \equiv G3(g, m, X_1))$. Așadar, conform 2.12 și Df. 3 $(Q(m, n, k) \,\&\, G_{R_m}(X_1)) \supset ((g, m) \eta x_1 \equiv \equiv \forall x_1 ((t(g, n, x_1), k) \eta X_1))$. În consecință conform 2.38., $(Q(m, n, k) \,\&\, G_{R_m} X_1)) \supset \supset (gSm \equiv \forall x_1 (t(g, n, x_1) Sk))$. Conform 2.33., teorema este demonstrată.

Din 2.40—2.42 putem deriva următoarea metateoremă importantă cu privire la S_1.

2.43. Fie g o variabilă care nu figurează în propoziția $F(\mathfrak{m})$ a teoriei lui Zermelo (și, a fortiori, ai lui S_1) care conține intrări libere ale variabilelor și numai ale acestora. Dacă $F'(\mathfrak{m})$ este propoziția obținută din $F(\mathfrak{m})$ prin substituirea expresiilor de mulțimi $g_i, \ldots, g_j$ (așa cum s-a definit în 2.18) în locul acestor variabile $x_i, \ldots, x_i$, atunci putem demonstra în S_1: $gS\mathfrak{m} \equiv F'(\mathfrak{m})$

Demonstrație. Demonstrăm 2.43 prin inducție după numărul operatorilor logici din $F(\mathfrak{m})$.

Cazul 1. $F(\mathfrak{m})$ nu conține nici un operator logic. Putem admite că $F(\mathfrak{m})$ este propoziția $(x_n \in x_k)$. În consecință dat fiind că în S_1 putem dezvolta teoria numerelor, se poate demonstra: $M(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k})$. Așadar, 2.43 rezultă din 2.40, deoarece $F'(\mathfrak{m})$ este $(g_n \in g_k)$.

Cazul 2. Să admitem că 2.43 este adevărat pentru toate cazurile în care $F(\mathfrak{m})$ nu conține mai mult decît s operatori logici. Vrem să demonstrăm adevărul lui 2.43 pentru cazurile cînd $\mathfrak{m}F(\mathfrak{m})$ conține $s + 1$ operatori logici.

Cazul 2a. $F(\mathfrak{m})$ este de forma $(p \mid q)$. Putem admite că propoziția este $(F'(\mathfrak{n})'$ $F'(\mathfrak{k}))$. În consecință, putem demonstra în S_1: $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k})$. Fie $F'(\mathfrak{n})$ și $F'(\mathfrak{k})$ în aceeași relație față de $F(\mathfrak{n})$ și $F(\mathfrak{k})$ în care se află $F'(\mathfrak{m})$ față de $F(\mathfrak{m})$. Conform cu 2.41, $gS\mathfrak{m} \equiv (gS\mathfrak{n} \mid gS\mathfrak{k})$. Așadar, prin ipoteza inducției, $gS\mathfrak{m} \equiv (F'(\mathfrak{n}) \mid F'(\mathfrak{k}))$. Așadar, 2.43 este demonstrat, deoarece $(F'\mathfrak{n})\ F'(\mathfrak{k}))$ este $F'(\mathfrak{m})$.

Cazul 2b. $F(\mathfrak{m})$ este de forma $\forall\, x_{\mathfrak{n}} p$. Putem admite că $F(\mathfrak{m})$ este propoziția $\forall\, x_{\mathfrak{n}} F(\mathfrak{k})$. În consecință putem demonstra în S_1: $Q(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k})$. Fie $F'(\mathfrak{k})$ în aceeași relație față de $F(\mathfrak{k})$ în care se află $F'(\mathfrak{m})$ față de $F(\mathfrak{m})$, cu excepția faptului că intrările libere ale lui $x_{\mathfrak{n}}$ în $F(\mathfrak{k})$ nu sînt înlocuite prin intrările lui $g_{\mathfrak{n}}$ în $F'(\mathfrak{k})$. Conform 2.42, $gS\mathfrak{m} \equiv \forall\, x_{\mathfrak{n}}(t(g, \mathfrak{n}, x\mathfrak{n})S\mathfrak{k})$. În consecință conform ipotezei inducției, $gS\mathfrak{m} \equiv \forall\, F'(\mathfrak{k})$. Așadar, 2.43 este demonstrat, deoarece $F'(\mathfrak{m})$ este $\forall x\ F'(\mathfrak{k})$.

Din aceasta putem demonstra în mod direct schema adevărului (TS) pentru teoria lui Zermelo.

2.44. Dacă $F(\mathfrak{m})$ este o propoziție închisă (un enunț) din teoria lui Zermelo, atunci putem demonstra în S_1: $\mathfrak{m}\eta Tr \equiv F(\mathfrak{m})$.

Demonstrație. Conform 2.43, dacă $F(\mathfrak{m})$ este o propoziție închisă, atunci putem demonstra în S_1: $gS\mathfrak{m} \equiv F(\mathfrak{m})$. Așadar, conform Df. 7, $\mathfrak{m}\eta Tr \equiv F(\mathfrak{m})$.

Prin urmare, obținem teorema principală din acest paragraf.

Teorema 1. În S_1 putem construi o definiție a adevărului pentru teoria mulțimilor a lui Zermelo.

Ar merita să subliniem aici din nou că în cuprinsul acestui paragraf ne interesează numai construirea unei definiții a adevărului care nu este obligată să fie totodată o definiție normală; cu alte cuvinte, nu asertăm că în conformitate cu definiția adevărului dată mai sus putem demonstra în S_1 adevărul tuturor teoremelor teoriei lui Zermelo. Pentru ca să fim capabili să demonstrăm o asemenea aserțiune într-un sistem S, ar fi necesar să punem cerința ca S să conțină S_1, precum și teoreme care corespund celor din teoria mulțimilor a lui Zermelo pe care o considerăm. Problema va fi studiată mai minuțios într-un paragraf ulterior.

Deși în comparație cu sistemele axiomatice standard pentru teoria mulțimilor, S_1 ar trebui considerat ca un sistem foarte slab, el conține deja (prin $Ax.$ 5) acea trăsătură impredicativă care separă teoriile tipice ale mulțimilor de disciplinele mai elementare. De aceea, este interesant să observăm în această ordine de idei că putem obține de asemenea o definiție a adevărului (însă nu o definiție normală) pentru teoria lui Zermelo în cadrul unui sistem care nu conține clase impredicative.

Fie S_2 sistemul care conține aceleași forme lingvistice ca S_1 și se obține din S_1 substituind în locul lui $Ax.$ 5 următoarele axiome [1].

[1] Dacă în locul $Ax.5$ avem numai $Ax.6$, va trebui să punem cerința ca predicatul Nn de a fi număr natural să fie definit printr-o „expresie constitutivă" (cf. de ex., Bernays [1], Partea II, pag. 12), în timp ce variabila de clasa legată din condiția [3] a lui 2.4 contrazice aceasta. Dacă admitem și $Ax.7$, variabila de clase din cadrul condiției poate fi înlocuită printr-o variabilă de mulțimi; v. Bernays [1], Partea II, începutul pag. 9.

*Ax.*6. Pentru fiecare propoziție p a lui S_2 în care nu figurează nici X_1 nici alte variabile mari legate, $\exists X_1 \forall x_1 (x_1 \eta X_1 \equiv p)$.

*Ax.*7. $\exists x_3 \forall x_1 (x_1 \in x_3 \equiv (x_1 \in x_2 \,\&\, x_1 \eta X_2))$.

Vrem să demonstrăm că în S_2 putem obține de asemenea o definiție a adevărului pentru teoria lui Zermelo. Întrucît S_2 are aceeași notație ca S_1, toate definițiile din S_1 sînt și definiții în S_2, exceptînd faptul că ar fi mai corect să scriem $Tr(m)$ în locul lui $m \eta Tr$ în Df. 7, deoarece în S_2 nu există nici o clasă de adevăr ci numai un predicat de adevăr. Totuși, acest fapt nu prezintă importanță pentru ceea ce urmărim.

Problema care stă în fața noastră este de a demonstra o metateoremă pentru S_2 care să corespundă metateoremei 2.44 pentru S_1. În primul rînd, cînd *Ax.*5 este înlocuită prin *Ax.*6, teoremele 2.33 și 2.38 nu mai sînt demonstrabile și nu putem demonstra decît metateoremele 2.32 și 2.39. În consecință, în locul teoremelor 2.40—2.42, putem demonstra în S_2 numai următoarele metateoreme:

2.45. $M(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k}) \supset (gS\mathfrak{m} \equiv g\mathfrak{n} \in g\mathfrak{k})$.

2.46. $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k}) \supset (gS\mathfrak{m} \equiv (gS_{\mathfrak{n}} \mid gS\mathfrak{k}))$.

2.47. $Q(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{k}) \supset gS\mathfrak{m} \equiv \forall x_1 (t(g, \mathfrak{n}, \forall x_1) S\mathfrak{k})$.

Totuși, examinarea demonstrațiilor pentru 2.43 și 2.44 ar arăta clar că 2.45—2.47 sînt deja adecvate pentru derivarea lui 2.43 și 2.44. Prin urmare, s-ar părea că putem defini în S_2 adevărul pentru teoria lui Zermelo chiar fără să aplicăm *Ax.*7.

Aceasta ar fi adevărat dacă am putea dezvolta teoria numerelor în S_2 fără să facem uz de *Ax.*7. În fapt, se pare că nu există nici un mijloc pentru a realiza acest lucru, deși se știe că teoria numerelor poate fi dezvoltată în S_2 cu ajutorul *Ax.*7 [1].

În consecință, avem teorema următoare:

Teorema 2. Putem construi în S_2 o definție a adevărului pentru teoria lui Zermelo.

§ 3. OBSERVAȚII CU PRIVIRE LA CONSTRUIREA DEFINIȚIILOR ADEVĂRULUI ÎN GENERAL [2]

Pentru a scoate în evidență mai explicit procedura construirii definițiilor adevărului, am studiat în cadrul paragrafului anterior numai două sisteme speciale. Aici vom indica modul în care considerente similare se pot aplica la fel de bine altor sisteme formale.

În teoria lui Zermelo putem considera predicatul $\in$ ca un operator care generează propoziții din variabile, iar operatorii logici $\mid$ și $\forall$ ca operatori care generează propoziții noi din propoziții date. Fie L un sistem

[1] v. Bernays [1], Partea II.

[2] Paragrafele ulterioare sînt independente de materialul conținut în acest paragraf, care poate fi omis de cititorul pe care îl interesează doar cele cîteva concluzii cu privire la relativitatea teoriei numerelor și a inducției, concluzii ce vor fi prezentate în ultima parte.

arbitrar care conține un singur gen de variabile ca și teoria lui Zermelo dar conține pe lîngă (sau în locul lui) $\in$, alte predicate $P_1, \ldots, P_i$, și conține pe lîngă $|$ și $\forall$, (sau în locul unuia sau al ambilor) alți operatori $O_1, \ldots, O_j$. Aici, iarăși, putem presupune că teoremele lui L au fost selectate într-un mod arbitrar însă bine definit.

Fie L^* sistemul care nu se deosebește de S_1 decît prin faptul că conține, pe lîngă propozițiile lui S_1, și propozițiile generate de predicatele $P_1, \ldots, P_i$ și operatorii logici $O_1, \ldots, O_j$. Fie axiomele lui L asemenea cu cele ale lui S_1 cu singura deosebire că domeniul propozițiilor p în $Ax.5$ este extins în mod corespunzător. Atunci, putem construi în L^* o definiție a adevărului pentru L așa cum am făcut în S_1 pentru teoria lui Zermelo. Modificările necesare sînt puține și simple. Astfel, în locul lui Df. 1, definim în mod similar ($G1(g, m)$, ..., $G1'(g, m)$ pentru predicatele $P_1, \ldots, P_i$ din L, și în locul lui Df. 2—Df. 3 definim $G(i+1)\,(g, m, X_1)$, ..., $G(i+j)\,(g, m, X_1)$ pentru operatorii logici $O_1, \ldots, O_j$. Definiția pentru $G(g, m, X_1)$, Df. 4 este apoi modificată ca o alternativă a celor $(i+j)$ clauze $G1, \ldots, G(i+j)$ definite astfel.

După efectuarea acestor schimbări în cadrul definițiilor, modificarea demonstrațiilor din paragraful precedent și demonstrarea celor două teoreme L^* care coincid din punct de vedere al notației cu 2.33 și 2.38, ar fi o simplă chestiune de rutină. Din aceste două teoreme, rezultă demonstrații analoge pentru teoremele care corespund cu 2.40—2.42. Așadar, avem:

TEOREMA 3. Dacă L este un sistem oarecare cu un singur gen de variabile și L^* conține S_1 precum și toate propozițiile lui L, atunci putem construi în L^* o definiție a adevărului pentru L.

În demonstrația de mai sus am admis că numărul predicatelor și al operatorilor logici este finit. Teorema este valabilă și dacă în L numărul predicatelor sau cel al operatorilor logici sau și al unora și al altora este infinit numărabil. În acest caz, sînt necesare anumite modificări noi ale procedurii aplicate deoarece, în caz contrar, definiția lui $G(g, m, X_1)$ ar necesita o alternativă infinită de clauze. Putem proceda în modul următor. Definim, ca în Df. 1—Df. 3, predicatele $G1$, $G2$, ... pentru toate predicatele și operatorii logici. Fie $F(\mathfrak{m})$ a m-a propoziție din L, fie $R_{\mathfrak{m}}$ numărul operatorilor logici din $F(\mathfrak{m})$, și fie $N_{\mathfrak{m}}$ cel mai mare $\mathfrak{k}$ astfel încît al $\mathfrak{k}$-lea predicat figurează în $F(\mathfrak{m})$. În locul lui $G(g, m, X_1)$ cum a fost definit în Df. 4, să definim $G(g, m, X_1, 1)$, $G(g, m, X_1, 2)$, ... ca alternări (finite) de termeni scoși din $G1, G2, \ldots$ în așa fel încît pentru orice $\mathfrak{i}$, clauzele $G1$, $G2$, ... pentru toate predicatele și toți operatorii logici care figurează într-un $F(\mathfrak{m})$ pentru care $N_{\mathfrak{m}} \leqslant \mathfrak{i}$ și $R_{\mathfrak{m}} \leqslant \mathfrak{i} - 1$ figurează ca termeni disjunctivi în $G(g, m, X_1, \mathfrak{i})$. În locul definițiilor Df. 5—Df. 7, aplicăm definiții de următoarele forme ($\mathfrak{j}, \mathfrak{m} = 1, 2, \ldots$):

DEFINIȚIA 5'. $G_j(X_1)$ atunci și numai atunci cînd $\forall g \forall_m((R \leqslant j-1 \;\&\; N_m \leqslant \mathfrak{j}) \supset ((g, m)\eta X_1 \equiv G(g, m, X_1, \mathfrak{j})))$.

DEFINIȚIA 6'. $gS\mathfrak{m}$ atunci și numai atunci cînd $X_1(G_{R_m+N_m}(X_1) \supset (g, \mathfrak{m})\eta X_1)$.

DEFINIȚIA 7'. $\mathfrak{m}\eta Tr$ atunci și numai atunci cînd $\forall g(gS\mathfrak{m})$.

Cu aceste definiții putem demonstra pentru L^* metateoreme corespunzătoare lui 2.32 și 2.39 (deși nu teoremele corespunzătoare lui 2.33 și 2.38) și deci

teoremele corespunzătoare lui 2.45—2.47. Or, acestea sînt tocmai teoremele necesare pentru demonstrarea metateoremelor referitoare la L și L^* care corespund metateoremelor 2.43 și 2.44 pentru teoria lui Zermelo și S_1. Prin urmare, și în aceste cazuri putem da în L^* o definiție a adevărului pentru L. Cu alte cuvinte Teorema III este adevărată indiferent dacă L conține o mulțime finită sau (numărabil) infinită de predicate și operatori logici.

Introducem aici cîteva observații cu privire la simbolurile de funcții și denumirile constante. Pînă acum am presupus că sistemele sînt formulate de așa manieră încît simbolurile funcțiilor și numele constante nu figurează în rîndul notațiilor lor primitive. Această abordare pare să concorde cu procedura lui Tarski. Ea este parțial justificată prin afirmația [1] că denumirile constante și simbolurile de funcții sînt dispensabile din punct de vedere teoretic dacă folosim suficiente predicate. Totuși, trebuie admis că procedura alternativă de includere în cadrul notației primitive a unui sistem de numiri constante și simboluri de funcții de la care sînt generați termenii pare a fi o procedură mai intuitivă și în stare să clarifice lucrurile în multe privințe. Or, dacă considerăm un sistem formulat cu termeni figurînd în cadrul notației sale primitive, construirea unei definiții a adevărului pentru sistem ar trebui să difere considerabil de cea descrisă în paragraful precedent. În plus, în cazul unor atari sisteme, ar părea să fie posibilă adesea construirea unor definiții ale adevărului prin metode mai directe și intuitive [2]. Întrucît considerațiile privitoare la aceste posibilități ne-ar duce mult prea departe, vom continua să presupunem că în cadrul notațiilor primitive ale sistemelor studiate nu figurează simboluri de funcții sau denumiri constante.

Pînă acum, ne-am restrîns la sisteme care conțin un singur gen de variabile în cadrul notației primitive. Să considerăm acum cazul cînd un sistem conține mai multe genuri de variabile.

Modul cel mai simplu de tratare a unui asemenea caz pare a fi următorul: în locul sistemului dat cu mai multe genuri de variabile (sistem multisortat) considerăm un sistem „echivalent" cu un singur gen de variabile (un sistem unisortat). Întrucît noi știm că lucrul acesta este întotdeauna posibil [3], se pare că sîntem în măsură să evităm cu totul chestiunea definirii adevărului în cazul teoriilor multisortate.

Totuși, dat fiind că în anumite cazuri este mai natural să folosim mai multe genuri de variabile, este indicat să examinăm în mod direct felul în care putem construi o definiție a adevărului pentru o teorie dată cu mai multe sorturi de variabile. În această ordine de idei, Tarski, a dat indicații asupra modului în care trebuie procedat [4]. Vom enunța numai condițiile generale cărora un metasistem trebuie să le satisfacă.

[1] v. Quine [10], pag. 149; Hilbert-Bernays [3], vol *I*, pag. 460.

[2] Dacă comparăm definiția adevărului pentru teoria numerelor la Hilbert-Bernays, vol. II, cu definiția adevărului pentru teoria lui Zermelo dată în articolul de față, pare indicat să considerăm prima definiție ca fiind mai directă și mai simplă din punct de vedere intuitiv, deoarece ea implică o recursie mai directă. Nu este foarte ușor să determinăm condițiile precise cărora un sistem trebuie să le satisfacă pentru ca să posede o atare definiție a adevărului. V. și Observațiile din paragraful pus între paranteze la pag. 63 din Tarski — [18].

[3] v. cap. XII. Aici ne interesează sistemele curente care conțin pentru fiecare gen de variabile ale lor teoria completă curentă a cuantificării.

[4] v. Tarski [16].

Fiind dat un sistem uni-sortat, se pune întrebarea ce trebuie să conțină metasistemul pentru ca să fie adecvat în definirea adevărului în cazul sistemului dat? Examinînd construcția definiției adevărului pentru teoria lui Zermelo, vedem că el trebuie să conțină următoarele lucruri: (1) logica generală (teoria cuantificării și teoria identității) pentru fiecare gen de variabile din metasistem; (2) teoria curentă a numerelor cu variabilele m, n, ... definite pe domeniul numerelor naturale; (3) resurse suficiente pentru definirea tuturor șirurilor finite de entități din sistemul dat și pentru introducerea unei variabile g care este definită pentru aceste șiruri; (4) existența unei clase de perechi ordonate de forma g (un șir finit) și m (un număr natural), corespunzînd fiecărei propoziții din metasistem care conține g și m ca variabile libere.

Fie K o teorie arbitrară multisortată. Pentru ca un sistem K^* să fie adecvat în calitate de metasistem în care putem defini adevărul pentru K, K^* trebuie să conțină elemente similare celor înșirate mai sus, la (1)—(4). Singura modificare importantă necesară privește punctul (3). Pentru satisfacerea unei propoziții din K cu n variabile libere, avem nevoie de un șir corespunzător ales cu n termeni astfel încît pentru fiecare k între 1 și n, al k-lea termen să fie un obiect din domeniul de valori al celei de a k-a variabile libere din propoziția dată. Așadar, este necesar ca, pe lîngă lucrurile enumerate la rubricile (1), (2) și (4), să se poată obține în K^* asemenea șiruri finite g de termeni arbitrari din K. Aproximativ vorbind, dacă K^* conține teoria numerelor, ne trebuie numai clase avînd ca membri toate entitățile din K, dat fiind că șirurile finite și perechile ordonate pot fi definite în mod uzual cu ajutorul numerelor naturale. Așa de exemplu, dacă K este calculul predicatelor de al i-lea ordin fundat pe numerele naturale, atunci este suficient să facem uz de calculul predicatelor de al $(i + 1)$-lea ordin în calitate de K^*[1].

§ 4. DEMONSTRAȚII DE CONSISTENȚA VIA DEFINIȚIILE ADEVĂRULUI

După cum se pare, este foarte răspîndită convingerea că de vreme ce avem în cadrul lui L^* o definiție de adevăr pentru L, formalizarea în L^* a unei demonstrații de consistență pentru L este o simplă chestiune de rutină. Probabil că în mare parte datorită acestei convingeri de regulă nu sînt date detaliile unor atari demonstrații de consistență. Așa cum am remarcat însă mai sus, pentru a demonstra în L^* consistența lui L prin intermediul unei definiții a adevărului, mai trebuie să demonstrăm în L^* că toate teoremele lui L sînt adevărate conform acestei definiții și o atare demonstrație nu numai că necesită axiome puternice în L^*, dar de obicei dă loc și la unele complicații. În acest paragraf vom considera cîteva cazuri speciale de asemenea demonstrații de consistență.

Să considerăm mai întîi un sistem simplu și slab S_3 de teoria mulțimilor. Formele lingvistice ale lui S_3 sînt ca cele date în §2 pentru teoria lui Zermelo. Teoremele lui S_3 sînt specificate în modul următor. Axiomele proprii ale lui S_3 sînt tocmai axiomele $Ax.1 - Ax.3$ ale sistemului S_1. În plus, toate axiomele

[1] V. Tarski [17], pag. 110, primele trei propoziții din § 8.

teoriei cuantificării pe care le dăm mai jos, sînt de asemenea teoreme ale lui S_3:

Q1. $p \supset (q \supset p)$.

Q2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$.

Q3. $(-p \supset -q) \supset (q \supset p)$.

Q4. $\forall x(\Phi x \supset \psi x) \supset (\forall x \Phi x \supset \forall x \psi x)$.

Q5. Dacă x nu este liber în p, $p \supset \forall x p$.

Q6. $\forall x \Phi x \supset \Phi y$.

Unica regulă de inferență este *modus ponens* pentru propozițiile închise.

Q7. Dacă p și $p \supset q$ sînt teoreme, atunci și q este teoremă.

Trebuie observat că, urmîndu-l pe Quine [1], nu permitem intrarea unor variabile libere în cadrul teoremelor. Prin urmare, atunci cînd o propoziție figurează ca axiomă sau teoremă, înțelegem de fapt că este axiomă sau teoremă o închidere a propoziției date (adică o propoziție închisă obținută din propoziția dată prin punerea în fața ei a unor cuantori generali distincți pentru variabilele sale libere). În plus, îl urmăm de asemenea pe Quine denumind $\forall x p$ o cuantificare vidă atunci cînd x nu este liber în p.

Conform Teoremelor 1 și 2, atît S_1 cît și S_2 conțin o definiție a adevărului pentru S_3. Totodată, toate teoremele lui S_3 sînt și teoreme ale lui S_1 și S_2. Să arătăm acum că consistența lui S_3 poate fi demonstrată formal în S_1. După toate probabilitățile, nici o demonstrație de consistență pentru S_3 nu poate fi formalizată în S_2, deși nu sîntem în posesia unei demonstrații de imposibilitate.

Întrucît S_1 conține teoria numerelor, noțiunile sintactice pentru S_3 pot fi definite în S_1 printr-o aritmetizare a sintaxei lui S_3. În particular, presupunem că în S_1 au fost definite următoarele noțiuni: $\supset(m, n, k)\,(F(m)$ fiind $(F(n) \supset \supset F(k))$, $\exists\,(m, n, k)\,(F(m)$ fiind $\exists x_n F(k))$, $\equiv\,(m, n, k)\,(F(m)$ fiind $F(n) \equiv F(k)$, $\vee\,(m, n, k)\,(F(m)$ fiind $(F(n) \vee F(k)))$, $inf(m, n, k)\,(F(m), F(n), F(k)$ fiind toate închise, și $\supset(m, n, k))$, $axfr(m)$ (o închidere a lui $F(m)$ este axiomă a lui S_3 și nici unul din cuantorii generali inițiali ai lui $F(m)$ ale căror domenii se extind pînă la capătul lui $F(m)$ nu este vid), $ax(m)$ ($F(m)$ este o axiomă a lui S_3, axiomă care, în treacăt fie spus, trebuie să fie o propoziție închisă), $pr(n, m)$ (a n-a demonstrație din S_3 este o demonstrație pentru $F(m)$, o enumerare arbitrară a demonstrațiilor din S_3 fiind presupusă), $thm(m)$ ($F(m)$ este teoremă a lui S_3: $\exists n(pr(n, m))$), $neg(m)$ (numărul k astfel încît $F(k)$ este negația lui $F(m)$), $Con(S_3)$ (S_3 este consistent: $\forall n - pr(n, \mathfrak{m}_0)$, $F(\mathfrak{m}_0)$ fiind propoziția $\forall x_2\, \exists x_1\, (x_1 \in x_2)$ din S_3), $\lambda(n)$ (numărul liniilor în a n-a demonstrație), $\rho(m)$ (numărul cuantorilor generali care stau la începutul lui $F(m)$ și care acționează pînă la capătul lui $F(m)$).

Notăm în treacăt că putem fixa o enumerare arbitrară a tuturor demonstrațiilor din S_3. Presupunem pur și simplu că enumerarea este astfel făcută încît atunci cînd a m-a demonstrație conține a n-a demonstrație ca parte proprie a sa, $m > n$ în cadrul enumerării.

[1] V. Quine [10], capitolul 2.

Din 2.41—2.42 și Df. 7, putem demonstra imediat că propozițiile de mai jos sînt teoreme în S_1.

4.1. $\supset (m, n, k) \supset (gSm \equiv (gSm \supset gSk))$.

4.2. $\equiv (m, n, k) \supset (gSm \equiv (gSn \equiv gSk))$; $\vee (m, n, k) \supset (gSm \equiv (gSn \vee \vee gSk))$.

4.3. $\exists (m, n, k) \supset (gSm \equiv \exists x(t(g, n, x) Sk))$.

4.4. $(inf(m, n, k) \& m \eta Tr \& n \eta Tr) \supset k \eta Tr$.

Conform definițiilor (2.18 și 2.19) ale lui g_j și $t(g, n, x)$ putem demonstra în S_1:

4.5. $(t(g, n, x))n = x$, $(t(t(g, n, x), m, y))n = x$, $(t(t(g, n, x), m, y))m, = y$ etc.

Conform 2.44, avem:

4.6. $- \mathfrak{m} \eta Tr \equiv neg(\mathfrak{m}) \eta Tr$.

Prima teoremă crucială pe care vrem s-o demonstrăm în S_1 este:

4.7. $axfr(m) \supset m \eta Tr$.

Demonstrație. Axiomele lui S_3 sînt de nouă genuri și se împart în două grupe: (1) axiomele teoriei cuantificării date de $Q1—Q6$; (2) cele trei axiome $Ax.1—Ax.3$ ale teoriei mulțimilor. Dacă $axfr(m)$, atunci o închidere a lui $F(m)$ este axiomă a lui S_3. Demonstrăm 4.7 făcînd o inducție după $\rho(m)$. Admitem mai întîi că am definit nouă predicate aritmetice ax_1, ..., ax_9 corespunzătoare celor 9 genuri de axiome cu cuantorii lor inițiali omiși. Așa de exemplu, $ax_1(m)$ dacă și numai dacă $F(m)$ este de forma $(p \supset (q \supset p))$.

Cazul 1. $\rho(m) = 0$. Avem atunci în S_1: $axfr(m) \supset (ax_1(m) \vee ... ax_9(m))$. Întrucît demonstrațiile pentru toate cazurile fiecărei din aceste două grupe sînt similare, demonstrăm numai cîte un caz din fiecare grupă în parte, cu titlu de ilustrare.

Cazul 1*a*. $F(m)$ este de una din formele date în $Q1—Q6$. Atunci 4.7 poate fi demonstrat pe baza lui 2.41—2.42 (împreună cu consecințele lor, cum este 4.1) și teoria numerelor din S_1. De exemplu, să admitem că $F(m)$ este de forma $(\forall x(\Phi x \supset \psi x) \supset (\forall x \Phi x \supset \forall x \psi x))$. Cu alte cuvinte, $ax_4(m)$. Putem demonstra în S_1: $\exists m_1 ... \exists m_7 \exists n(\supset (m, m_1, m_2) \& Q(m_1, n, m_3) \& \supset (m_2, m_4, m_5) \& \& Q(m_4, n, m_6) \& Q(m_5, n, m_7) \& \supset (m_3, m_6, m_7))$. Așadar, prin aplicări repetate ale lui 2.42 și 4.1, avem: $gSm \equiv (\forall y(t(g, n, y) Sm_6 \supset t(g, n, y) Sm_7) \supset (\forall y(t(g, n, y) Sm_6) \supset \forall y(t(g, n, y) Sm_7)))$. În consecință, conform teoriei cuantificării din S_1, gSm. Așadar, conform Df.7, $m \eta Tr$.

Cazul 1*b*. $F(m)$ are una din formele $Ax.1—Ax.3$. Atunci, 4.7 poate fi demonstrat apelînd la 2.40—2.42 (împreună cu consecințele lor, ca 4.1—4.4) și axiomele corespunzătoare $Ax.1—Ax.3$ în S_1. De exemplu, să admitem că $F(m)$ este: $\exists x_2 \forall x_1(x_1 \in x_2 \equiv (x_1 \in x_3 \vee \forall x_5(x_5 \in x_1 \equiv x_5 \in x_4)))$. Cu alte cuvinte, $ax_9(m)$. Putem demonstra în S_1: $\exists m_1 ... \exists m_8(\exists(m, 2, m_1) \& Q(m_1, 1, m_2) \& \equiv (m_2, m_3, m_4) \& M(m_3, 1, 2) \& \vee (m_4, m_5, m_6) \& M(m_4, 1, 3) \& Q(m_5, 5, m_6) \& \equiv (m_6, m_7, m_8) \& M(m_7, 5, 1) \& M(m_8, 5, 4))$. Așadar, prin aplicări

repetate ale lui 2.40, 2.42, 4.2 și 4.3, avem: $gSm \equiv \exists x \forall y((t(t(g, 2, x), 1, y))_1 \in (t(t(g, 2, x), 1, y))_2 \equiv ((t(t(g, 2, x), 1, y))_1 \in (t(t(g, 2, x), 1, y)_3 \vee \forall z((t(t(t(g, 2, x), 1, y), 5, z))_5 \in (t(t(t(g, 2, x), 1, y), 5, z))_1 \equiv (t(t(t(g, 2, x), 1, y), 5, z))_5 \in (t(t(t(g, 2, x), 1, y), 5, z))_4)))$. În consecință, conform 4.5, scriind a în locul lui $(t(t(g, 2, x), 1, y))$, avem: $gSm \equiv \exists x \forall y(y \in x \equiv (y \in a_3 \vee \forall z(z \in y \equiv z \in (t(a, 5, z))_4)))$. Întrucît a și $(t(a, 5, z))_4$ sînt prin definiție iarăși termeni ai lui S_3 (luînd ca valori mulțimi), partea dreaptă (o închidere a părții drepte) a echivalenței este demonstrabilă în S_1 conform $Ax.3$. Așadar, putem demonstra în S_1: gSm. Conform Df. 7, $m \eta Tr$.

Cazul 2. Să admitem că 4.7 este adevărat pentru toți m astfel încît $F(m)$ satisface condiția $\rho(m) = n$. Vrem să demonstrăm cazurile lui 4.7 cînd $\rho(m) = n + 1$. Să admitem date: $axfr(m)$ & $\rho(m) = n + 1$. Conform ipotezei inducției, putem atunci demonstra: $\exists j \exists k (Q(m, j, k)$ & $k \eta Tr)$. În consecință, conform Df. 7 și 2.19, avem: $\exists j \exists k(Q(m, j, k)$ & $\forall x(t(g, j, x)\ Sk))$. Așadar, conform 2.42 și Df. 7, $m \eta Tr$.

Combinînd Cazul 1 și Cazul 2, demonstrăm 4.7 prin aplicarea principiului inducției 2.5 din S_1.

Trebuie notat că aici aplicăm din nou $Ax.5$ din S_1 luată în întreaga sa generalitate, ținînd seama de variabila de clase legată a cărei prezență este indispensabilă în definiția lui Tr. Cu alte cuvinte, cazul de mai sus al inducției nu poate fi demonstrat în S_2 unde sînt permise numai inducții relativ la propoziții care nu conțin nici o variabilă de clase legată.

Două corolare imediate ale lui 4.7 sînt [1]:

4.8. $\vdash S_1\ ax(m) \supset m \eta Tr$.

4.9. Dacă este dat un $\mathfrak{m}$ constant, atunci $\vdash S_1\ ax(\mathfrak{m}) \supset \mathfrak{m} \eta Tr$.

Atunci putem demonstra că fiecare teoremă a lui S_3 este adevărată.

4.10. $\vdash S_1(pr\ (n, m)$ & $\lambda(n) \leqslant 1) \supset m \eta Tr$.

Demonstrație. Dacă $(pr(n, m)$ & $\lambda(n) \leqslant 1)$, atunci $(ax(n)$ & $n = m)$ și deci, conform 4.8, $m \eta Tr$.

4.11. Dacă $\forall n \forall m((pr\ n, m)$ & $\lambda(n) \leqslant k \supset m \eta Tr$, atunci $\forall n \forall m((pr(n, m)$ & & $\lambda(n, m)$ & $\lambda(n) \leqslant k + 1 \supset m \eta Tr$.

Demonstrație. Dacă $(pr(n, m)$ & $\lambda(n) \leqslant k + 1)$, atunci, conform ipotezei cu privire la enumerarea demonstrațiilor, $ax(m) \vee \exists i \exists j(inf(i, j, m)$ & & $\exists n_1 \exists n_2(pr(n_1, i)$ & $pr(n_2, j)$ & $\lambda(n_1) \leqslant k$ & $\lambda(n_2) \leqslant k))$. În consecință, dacă $\forall n \forall m((pr(n, m)$ & $\lambda(n) \leqslant k) \supset m \eta Tr)$, atunci $ax(m) \vee \exists i \exists j(inf(i, j, m)$ & & $i \eta Tr$ & $j \eta Tr)$. Așadar, conform 4.8 și 4.4, $m \eta Tr$.

4.12. $\vdash S_1\ pr(n, m) \supset m \eta Tr$. Sau $\vdash S_1\ thm(m) \supset m \eta Tr$.

Demonstrație. Dacă $pr(n, m)$, atunci $\exists k(\lambda(n) \leqslant k)$. În consecință, conform 4.10, 4.11 și principiului inducției 2.5 din S_1, 4.12 este demonstrat.

[1] Folosim semnul $\vdash$ ca la Quine [10]. Atunci cînd este necesar, specificăm sistemul indicat de semnul $\vdash S_1$ etc.; de exemplu, $\vdash S\Phi$ dacă și numai dacă închiderea lui Φ este teoremă a lui S.

Acum, putem demonstra consistența lui S_3.

Teorema 4. $\vdash S_1 - pr(n, \mathfrak{m}_0)$. *Sau* $\vdash S_1 Con(S_3)$.

Demonstrație. Prin definiție, $F(\mathfrak{m}_0)$ este propoziția $\forall x_2 \exists x_1(x_1 \in x_2)$, a cărei negație este echivalentă cu $A\,x.2$ din S_3. În consecință, $thm(neg(\mathfrak{m}_0))$ și, conform 4.12, $neg(\mathfrak{m}_0)\,\eta\,Tr$. Așadar, conform 4.6, $-\mathfrak{m}_0 \eta\, Tr$ și, conform 4.12, $- pr(n, \mathfrak{m}_0)$. În consecință, avem și $Con(S_3)$.

Aceasta completează formalizarea în cadrul sistemului S_1 a unei demonstrații de consistență pentru S_3. Acum, cîteva observații despre relația dintre sisteme aflate între ele într-un raport analog.

Dacă S este o teorie a mulțimilor, care are aceeași notație ca S_3 dar conține pe lîngă toate axiomele lui S_3 și un număr finit de alte axiome de teoria mulțimilor, și dacă S' se află față de S în relația în care se află S_1 față de S_3, atunci putem formaliza în mod similar în cadrul lui S' o demonstrație de consistență pentru S.

Dacă S ar conține însă o infinitate de axiome ale teoriei mulțimilor (adică ar conține scheme de axiome în afară de teoria cuantificării), atunci situația ar fi alta. Astfel, fie S_4 teoria mulțimilor a lui Zermelo în forma sa curentă, teorie avînd aceeași notație ca S_3 însă conținînd pe lîngă $Ax1 - Ax3$ axiomele infinitului, mulțimii putere, mulțimii sumă precum și următoarea schemă de axiome („Aussonderungsaxiom“) [1]:

$Ax.8$. Dacă p este o propoziție oarecare din S_4 în care x_2 nu este liber, atunci $\exists x_2 \forall x_1(x_1 \in x_2 \equiv (x_1 \in x_3 \,\&\, p))$.

Fie S_5 sistemul obținut din S_1 prin adăugarea extra-axiomelor lui S_4. Putem oare demonstra că $Con(S_4)$ (ca propoziție a lui S_5) este o teoremă a lui S_5?

Nu putem face aceasta prin metoda la care am recurs mai sus demonstrînd T.4. Mai precis, demonstrația pentru cazul analog Cazului 1 b din 4.7 ar da greș, piatra de poticnire fiind necesitatea unei anumite disjuncții infinite de propoziții. Drept urmare, putem demonstra numai analogul lui 4.9 (dar nu și cel al lui 4.8) și de aceea nu putem demonstra un analog al lui 4.10.

Întrucît S_5 conține o definiție a adevărului a lui S_4 precum și toate teoremele lui S_4, ne-am aștepta ca $Con(S_4)$ să fie demonstrabil în S_5 printr-o altă metodă oarecare. Totuși, încercările noastre de a obține această demonstrație nu au fost încununate de succes. Bănuim chiar că ar putea să existe o modalitate de demonstrare a indemonstrabilității lui $Con(S_4)$ în S_5. În orice caz, după cîte știm, demonstrabilitatea sau indemonstrabilitatea lui $Con(S_4)$ în S_5 rămîne o chestiune deschisă.

Atît în S_4 cît și în S_5 am adoptat aceeași axiomă $Ax.8$, interzicînd intrarea oricărei variabile de clase în cadrul propoziției p. Dacă extindem sistemul S_5 și înlocuim $Ax.8$ printr-o axiomă similară însă mai puternică $Ax.8'$ în care p poate fi orice propoziție din S_5, atunci în S_5' care rezultă putem obține într-adevăr o demonstrație pentru $Con(S_4)$. Putem proceda deci exact ca în demonstrația Teoremei 4 cu excepția faptului că în demonstrarea unui analog al Cazului 1b din 4.7, facem uz de procedee speciale pentru alternativa cînd $F(m)$ este de forma $\exists x_2 \forall x_1(x_1 \in x_2 \equiv (x_1 \in x_3 \,\&\, p))$ ca în $Ax.8$. Desigur, există o infinitate de propoziții ale lui S_4 care sînt de această formă, însă pentru

[1] În legătură cu descrierea acestor alte axiome, v. Wang [20].

orice $F(m)$ de atare formă avem un număr natural j astfel încît $F(m)$ este $\exists x_2 \forall x_1 (x_1 \in x_2 \equiv (x_1 \in x_3 \ \& \ F(j)))$. Așadar, raționînd la fel ca în demonstrația lui 4.7, putem demonstra în S_5' un enunț de felul: $gSm \equiv \exists x \forall y (y \in x \equiv (y \in a \ \& \ gSj)$, a fiind un termen din S_4 care ia ca valori mulțimi. Dar partea dreaptă a echivalenței este un caz al $Ax.8'$ (deși nu un caz al $Ax.8$, ținînd seama de variabila de clase care apare în gSj printr-un analog al Df. 6). În consecință, avem în S_5: gSm. În acest mod putem demonstra:

4.13. $\vdash S_5' Con(S_4)$.

Similar, dacă un sistem S' stă față de un sistem S în aceeași relație în care stă un calcul al predicatelor de al $(n+1)$-lea ordin fundat pe numerele naturale față de un calcul de al n-lea ordin, putem demonstra $Con(S)$ în S'; dar dacă slăbim sistemul S' stipulînd că nici o variabilă de tipul cel mai înalt nu este permisă în definirea mulțimilor de tipuri mai coborîte, atunci se pare că problema demonstrabilității sau indemonstrabilității lui $Con(S)$ în sistemul rezultat rămîne deschisă.

Un alt aspect demn de a fi luat în considerație este problema demonstrării lui $Con(S_3)$ în S_2. În demonstrația lui $Con(S_3)$ (ca propoziție din S_1) în S_1, principiul inducției 2.5 se aplică în patru locuri (și anume în demonstrațiile lui 2.33, 2.37, 4.7 și 4.12) de așa manieră încît raționamentele analoge nu par să fie formalizabile în S_2. Așadar, în S_2 nu poate fi efectuată o demonstrație similară pentru $Con(S_3)$ deși, așa cum am menționat înainte, nu am fost în măsură să obținem o demonstrație a aserțiunii că $Con(S_3)$ ca propoziție aritmetică din S_2 nu este demonstrabilă în S_2.

Dacă vrem să demonstrăm $Con\ (S_3)$ (cu noțiunile aritmetice implicate definite ca în S_2) în S_2, va trebui să încercăm să evităm aplicările inducției la propoziții care conțin variabile de clase legate, ca în demonstrațiile teoremelor (corespunzătoare cu) 2.33, 2.37, 4.7 și 4.12; se pare însă că nu este posibil să evităm toate aceste aplicări ale inducției.

Un punct crucial pare să fie prezența unei reguli de inferență (regula $Q7$ a lui modus ponens) în S_3, regulă care ne permite să inferăm o propoziție mai scurtă din alte propoziții mai lungi. Dacă am putea să reformulăm S_3 în așa fel încît toate regulile sale de inferență să nu permită decît inferarea unei propoziții mai lungi dintr-un anumit număr finit de propoziții mai scurte, atunci, indiferent dacă numărul axiomelor este finit sau infinit, am fi capabili să demonstrăm $Con(S_3)$ pentru sistemul S_3 astfel reformulat fără aplicarea inducțiilor amintite. Într-adevăr, dacă aceasta ar fi posibil, am dispune totodată de o procedură de decizie pentru S_3 și demonstrația lui $Con(S_3)$, după cum ne putem aștepta, ar fi extrem de simplă.

Ar fi interesant să notăm că putem demonstra în locul lui $Con(S_3)$ următoarea metateoremă cu privire la S_2 care ne spune că nici o demonstrație determinată dată din S_3 nu poate fi o demonstrație a propoziției $\forall x_2 \exists x_1 (x_1 \in x_2)$ din S_3:

4.14. Dacă $\mathfrak{n}$ este o constantă, atunci $\vdash S_2 - pr(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}_0)$.

Aceasta depinde de faptul că dacă considerăm numai numerele individuale unul cîte unul, nu avem nevoie să facem inducțiile respective. Pentru a vedea aceasta, vom observa doar că 2.45—2.47 (în loc de 2.40—2.42) sînt sufici-

ente pentru a demonstra în locul celor două teoreme care corespund cu 4.10 și 4.11 următoarele două metateoreme:

4.15. Pentru $\mathfrak{m}$ și $\mathfrak{n}$ dați, $\vdash S_2(pr(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) \,\&\, \lambda(\mathfrak{n}) \leqslant 1) \supset \mathfrak{m}\eta\, Tr$.

4.16. Pentru orice $\mathfrak{k}$ dat și orice $\mathfrak{m}$ dat, dacă pentru orice $\mathfrak{n}$ dat avem $(pr(\mathfrak{n},\mathfrak{m}) \,\&\, \lambda(\mathfrak{n}) \leqslant \mathfrak{k}) \supset \mathfrak{m}\eta Tr$, atunci, pentru fiecare $\mathfrak{n}$ dat, $(\mathrm{pr}(\mathfrak{n},\mathfrak{m}) \,\&\, \lambda(\mathfrak{n}) \leqslant \mathfrak{k}+1) \supset \mathfrak{m}\eta Tr$.

Mai mult, dacă sistemul S_6 este obținut din S_3 prin adăugarea ca axiomă nouă a lui $Ax.8$ și dacă $pr_6(n, m)$ (o propoziție aritmetică din S_2) reprezintă faptul că a n-a demonstrație din S_6 este o demonstrație pentru $F(m)$, atunci putem demonstra și pentru S_2 o metateoremă analogă cu 4.14:

4.17. Dacă $\mathfrak{n}$ este o constantă, atunci $\vdash S_2 - pr_6\,(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}_0)$.

Conexiunile dintre S_2 și S_6 prezintă o importanță specială deoarece ele sînt similare conexiunilor dintre teoria mulțimilor a lui von Neumann-Bernays și teoria lui Zermelo-Fraenkel. Se știe [1] că pentru orice sisteme date S'' și S care stau între ele în aceeași relație în care se află S_2 cu S_6, poate fi demonstrată consistența relativă a lui S'' față de S. Mai mult, demonstrația poate fi formalizată în orice sistem obținut care este aproximativ la fel de puternic ca S_1 sau ca un calcul al predicatelor de ordinul al doilea fundat pe numerele naturale. Cu alte cuvinte [2].

4.18. Dacă S'' stă față de S în relația lui S_2 față de S_6, și S''' este un sistem obișnuit, aproximativ nu mai slab decît S_1, atunci $\vdash S''' \; Con\,(S) \supset Con(S)$ $Con\,(S)$ și $Con(S'')$ fiind propoziții aritmetice din S''' reprezentînd consistența lui S și respectiv a lui S''.

În consecință, dacă alegem S și S'' în așa fel încît [3] raționamentele care pot fi efectuate în S_1 să poată fi efectuate și în S'', atunci $Con(S) \supset Con(S'')$ ca propoziție din S'' devine teoremă a lui S'' și, prin urmare, conform celei de-a doua teoreme a lui Gödel, $Con\,(S)$ nu poate fi demonstrabil în S'' dacă S'' nu este inconsistent.

4.19. Dacă S și S'' stau în aceeași relație ca mai sus și S'' conține S_1, atunci $Con(S)$ nu este o teoremă a lui S'', dacă S'' nu este inconsistent.

Dacă însă propoziția aritmetică $Pc(n)$ din S'' reprezintă faptul că a n-a demonstrație din S este demonstrația unei propoziții infirmabile definite din S (adică o propoziție cum este $0 = 1$, a cărei negație, după cum se știe este demonstrabilă în S) atunci $\forall n(- Pc(n))$ poate fi luată ca $Con(S)$ și putem demonstra:

4.20. Dacă S și S' sînt ca în 4.19, atunci $\vdash S'' - Pc(\mathfrak{n}), \mathfrak{n}$ fiind orice număr dat.

Cu alte cuvinte, într-un asemenea caz, deși $Con(S)$ este în mod demonstrabil indemonstrabil în S'', putem demonstra prin considerente elementare cu privire la S'' că nu se poate da nici o demonstrație din S care să constituie totodată demonstrația unei propoziții infirmabile fixate în prealabil din S. În realitate,

[1] V. Novak [8] și Rosser-Wang [12].

[2] V. M. Naughton, *J. Symbolic Logic*, **18**, 1953, p. 136–144.

[3] De exemplu, S'' ar fi ca și cum am fi ales sistemul S sau sistemul N ca S în paragraful 2 din Wang [22].

asemenea considerații pot fi formalizate în cadrul teoriei numerelor și putem demonstra în teoria numerelor o propoziție aritmetică Con* reprezentînd faptul că, pentru orice număr n, dacă n este numărul unei propoziții — $Pc(\mathfrak{m})$ din S'' pentru un anumit numeral $\mathfrak{m}$ din S'', atunci a n-a propoziție din S'' este teoremă în S''. Deoarece S'', după cum am presupus, este cel puțin tot atît de puternic ca S_1 care conține teoria numerelor, Con^* ca propoziție din S'' poate fi demonstrată de asemenea în S'' deși $Con(S)$ nu poate fi demonstrată în cadrul aceluiași sistem.

4.21 Dacă S și S'' sînt ca în 4.19, atunci $\vdash_{S''} Con^*$.

În ipoteza că toate teoremele lui S'' sînt într-un anumit sens definit adevărate, Con^* mai poate fi considerat ca expresie indirectă a consistenței lui S. Trebuie însă să recunoaștem că acest lucru nu este foarte clar.

§ 5. RELATIVITATEA TEORIEI NUMERELOR ȘI ÎN PARTICULAR A INDUCȚIEI

Spunem că în cadrul fiecăreia dintre numeroasele forme diferite ale teoriei mulțimilor, putem dezvolta teoria curentă a numerelor. Uneori în cadrul unei aceleași teorii a mulțimilor putem dezvolta teoria numerelor în mai multe moduri. Firește, teoria numerelor pe care o obținem este, în fiecare caz în parte, relativă la axiomele teoriei mulțimilor precum și la definițiile adoptate pentru noțiunile aritmetice. Considerînd fiecare teorie a mulțimilor ca o teorie pentru conceptul de mulțime, teoria numerelor și conceptele aritmetice obținute în fiecare caz în parte, sînt la rîndul lor, relative la conceptul subiacent de mulțime. În speță, în cadrul fiecărui sistem de teoria mulțimilor, care conține teoria numerelor, principiul inducției devine un principiu al teoriei mulțimilor derivabil din axiomele sistemului; totodată, aplicabilitatea inducției la o anumită propoziție din sistem depinde de tăria axiomelor sistemului cît și de definițiile date noțiunilor aritmetice, de pildă definiții pentru numărul zero, pentru funcția succesor și pentru predicatul de a fi un număr natural (sau pentru clasa tuturor numerelor naturale). În cadrul acestui paragraf vom ilustra conexiunea dintre teoriile numerelor și respectivele teorii subiacente ale mulțimilor cu ajutorul unor exemple destul de pregnante.

Să considerăm mai întîi un sistem R care are aceleași notații ca S_3 (sau ca teoria mulțimilor a lui Zermelo) și care conține $Q1$—$Q7$, plus anumite axiome proprii mai puternice, în locul lui $Ax.1$—$Ax.3$. Aceste axiome, aproximativ vorbind, sînt de natură să genereze dezvoltarea teoriei uzuale a numerelor, existența mulțimilor infinite de numere naturale și a claselor predicative de atari mulțimi. Ca tărie, R echivalează cu un sistem care stă față de calculul predicatelor de ordinul al doilea, bazat pe numerele naturale, în aceeași relație în care stă teoria mulțimilor a lui von Neumann-Bernays față de teoria lui Zermelo-Fraenkel. Totuși, în vederea facilitării considerațiilor privitoare la acest sistem, îl vom prezenta într-o formă destul de nenaturală. Astfel, variabilele generale x, y, z..., din R sînt înțelese, aproximativ vorbind, ca luînd ca valori numere naturale, mulțimi infinite de numere naturale precum și clase de atari mulțimi. Din rîndul acestora, selectăm prin inter-

mediul unor definiții contextuale mulțimile a, b, c.,.. capabile de a fi elemente ale unor clase:

5.1. $\forall a\ \varphi\ a$ pentru $\forall x(\exists y(x \in y) \supset \varphi\ x)$.

5.2. $\exists a$ pentru $-\ a\ \forall\ -$.

După aceea, variabilele r, s, t..., de tipul cel mai coborît sînt introduse printr-o nouă restrîngere a domeniului:

5.3. $\forall t\ \varphi\ t$ pentru $\forall a(\exists b(a \in b) \supset \varphi a)$.

5.4. $\exists t$ pentru $-\ \forall t\ -$.

Identitatea este definită ca în S_3:

5.5. $x = y$ pentru $\forall z(z \in x \equiv z \in y)$.

Axiomele proprii ale lui R pot fi acum enunțate.

R_1. Axioma de extensionalitate. $x = y \supset (x \ni z \supset y \in z)$.

$R2$. Existența unei mulțimi numărabile de entități de tipul cel mai coborît.

$$\exists t \forall s(s \in t \equiv (s = c \vee s = b)).$$

R_3. Existența unor mulțimi infinite de asemenea mulțimi

$$\exists a \forall t(t \in a \equiv t \in x).$$

$R4$. Existența claselor predicative de atari mulțimi. Dacă y nu este liber în φ și dacă toate variabilele legate în φ sînt variabile de elemente (a, b etc.), atunci $\exists y \forall a(a \in y \equiv \varphi)$.

Trebuie subliniat că R4 poate fi înlocuit efectiv printr-un număr finit mic de axiome (7 sînt suficiente) astfel încît numărul axiomelor proprii ale lui R să devină finit. Vom admite că o atare reducere a fost înfăptuită efectiv așa încît R conține numai un număr finit de axiome (pe lîngă axiomele cuantificării $Q1$ — $Q6$). În consecință, metoda demonstrației de consistență pentru S_3 este aplicabilă la R.

Știm că teoria numerelor poate fi dezvoltată în R în diferite moduri. Ca să fim expliciți, presupunem că teoria numerelor este dezvoltată în R în felul următor:

Conform R3 și R4, $\exists a \forall t(t \in a \equiv -\ t \in t)$. În consecință, $\exists a \forall t(a \neq t)$. Așadar, conform R2, substituind a în locul lui c și b, obținem $\exists t \forall s(s \in t \equiv \equiv s \neq s)$. Să luăm această mulțime t ca numărul zero.

Conform $R2$, pentru orice t, există un s (mulțimea unitate a lui t) care conține t ca unic membru al său. Pentru orice număr natural t fie mulțimea unitate a lui t succesorul acesteia $t + 1$.

Fie mulțimea numerelor naturale t intersecția tuturor mulțimilor care conțin zero și succesorul fiecăruia din membrii lor.

5.6. $Nn(t)$ pentru $\forall x((0 \in x\ \&\ \forall s(s \in x \supset s + 1 \in x)) \supset t \in x)$, sau $t \in Nn$ sau $Nn(t)$ pentru $\forall a((0 \in a\ \&\forall s(s \in a \supset s + 1 \in a) \supset t \in a)$.

Notăm că, în baza lui $R3$, cele două modalități alternative de definire a lui Nn sînt în fapt una și aceeași.

Conform cu 5.6 și $R4$, dacă $\forall m\ \varphi\ n$ reprezintă $\forall t(Nn(t) \supset \varphi\ t)$, atunci avem imediat principiul inducției:

5.7. Dacă φ este ca în $R4$, atunci $(\varphi\ 0\ \&\ \forall n(\varphi\ n \supset \varphi\ (n + 1))) \supset$ $\supset \forall\ m\ \varphi\ m$.

Fie R' un sistem avînd aceeași notație ca S_1 și care stă față de R în relația lui S_1 față de S_3. Cu alte cuvinte, R' este exact ca S_1 cu excepția faptului că în locul axiomelor $Ax.1-Ax.3$ conține $R1-R4$, sau, ceea ce este același lucru R' conține, pe lîngă axiomele lui R, $Ax.4-Ax.5$. Teoria numerelor poate fi dezvoltată în cadrul lui R' în exact acea manieră ca în cadrul lui S_1, de exemplu definind zero și succesor ca în R, dar definind $Nn(t)$ ca în 2.3 (sau, ceea ce este același lucru, înlocuind x prin X în 5.6). Făcînd uz de o asemenea definiție pentru Nn, putem demonstra în R' un principiu al inducției aplicabil la toate propozițiile din R' (exact ca 2.5).

Să admitem că sintaxa lui R și cea a lui R' au fost aritmetizate ambele în maniera obișnuită, dînd două enunțuri aritmetice $Con(R)$ și $Con(R')$ care exprimă consistența lui R respectiv a lui R'. Dacă aritmetizarea este efectuată în cadrul teoriei mulțimilor, atunci dezvoltarea exactă a enunțului aritmetic $Con(R)$ sau $Con(R')$ depinde de definițiile adoptate pentru noțiunile aritmetice. În consecință, dat fiind că în R și R' am admis adineauri definiții diferite pentru Nn, enunțurile aritmetice care exprimă consistența lui R și R' sînt diferite în cele două sisteme. Fie $Con_1(R)$ și $Con_1(R')$ cele două enunțuri aritmetice ale lui R care exprimă consistența lui R și respectiv R', și fie $Con_2(R)$ și $Con_2(R')$ enunțurile aritmetice respective ale lui R'. Mai departe, fie $R\#$ sistemul obținut din R prin adăugarea, ca o nouă axiomă, a lui $Con_1(R)$; atunci avem totodată enunțurile aritmetice $Con_1(R\#)$ și $Con_2(R\#)$ din R și respectiv R' care exprimă consistența lui $R\#$.

Făcînd uz de metoda demonstrării lui $Con(S_3)$ în S_1, putem demonstra:

5.8. $\vdash_{R'} Con_2(R)$.

Totodată, aplicînd metoda dintr-un studiu anterior[1] putem demonstra și:

5.9. $\vdash_{R'} Con_2(R\#) \supset Con_2(R')$.

Întrucît $R\#$ este o extindere naturală a lui R cu o axiomă suplimentară al cărei adevăr este garantat de consistența lui R, ne-am aștepta ca să fie demonstrabilă consistența relativă a lui $R\#$ în R în forma exprimată de: (1) $Con_2(R) \supset Con_2(R')$. Dacă însă această formulă ar fi demonstrabilă în R', am obține din 5.8. și 5.9: $\vdash_{R_1} Con_2(R')$. Atunci, R' ar fi inconsistent[2]. Astfel, (1) nu poate fi demonstrabil în R'. Dar de ce?

În fapt, putem demonstra:

5.10. $\vdash_{R'} Con_1(R) \supset Con_2(R\#)$.

Prin urmare, întrucît R' conține o definiție a adevărului pentru R, din $Con_1(R)$ și schema adevărului putem deduce că numărul lui $Con_1(R)$, ca și numărul tuturor teoremelor lui R, aparțin clasei adevărului Tr. În consecință, am fi în măsură să demonstrăm $Con_2(R\#)$ în același mod în care demonstrăm $Con_2(R)$.

Pe scurt, dificultatea rezidă în inferența de la $Con_2(R)$ la $Con_1(R)$

[1] v. în § 2. la Wang [22] raționamentul prin care se demonstrează consistența relativă a lui N' în N.

[2] Așa cum am menționat în introducere, cercetările expuse în acest articol au fost motivate de un raționament similar în linii mari cu acesta.

TEOREMA 5. Dacă putem deriva $Con_1(R)$ din $Con_2(R)$ în R' atunci R' este inconsistent.

Cauza pentru care nu putem obține o asemenea derivare este, după cum se pare, următoarea. Vom spune că o mulțime sau o clasă este inductivă dacă ea conține O precum și succesorul fiecărui membru al ei. În R și R', clasa numerelor naturale este intersecția tuturor claselor inductive din R respectiv R'. Întrucît R' conține și alte clase și, deci, și alte clase inductive, intersecția acestora este mai mică decît intersecția corespunzătoare în R. Așadar, este posibil să avem unele modele non-standard pentru R care să conțină mai multe numere naturale decît orice model al lui R'. Ca atare, întrucît $Con\ (R)$ echivalează cu afirmarea faptului că nici un număr natural nu reprezintă o demonstrație de contradicție, putem concepe că deși nici un număr natural din R' nu prezintă această proprietate, unele numere naturale din R se bucură de ea. În orice caz, nu există un motiv evident pentru a crede că putem demonstra în R' că aceasta este imposibil.

Alternativ, putem dori să aplicăm în R' aceleași definiții pe care le-am dat în R noțiunilor aritmetice. Atunci, în locul celor două enunțuri aritmetice, avem numai enunțul $Con_1(R)$ pentru ambele sisteme. Dar atunci, nu mai putem demonstra $Con_1(R)$ așa cum am demonstrat $Con\ (S_3)$ în S_1 deoarece în R' avem, împreună cu aceste definiții, numai principiul inducției 5.7., în timp ce pentru demonstrarea enunțurilor analoge lui 2.40—2.42 se cere un principiu mai puternic. Într-adevăr, dacă am putea demonstra $Con_1(R)$ în R', R' ar fi inconsistent fie conform Teoremei 5, fie ca o consecință a enunțurilor 5.11 și 5.12. Prin urmare, folosind demonstrații similare celor date pentru 5.9 și 5.10, putem demonstra:

5.11. $\vdash_{R'} Con_1(R\#) \supset Con_1(R')$.

5.12. $\vdash_{R} Con_1(R) \supset Con_1(R\ \#)$.

Întrucît unicul impediment în calea demonstrării lui $Con_1(R)$ în R' îl constituie cele două aplicații ale inducției la propozițiile care conțin variabile notate prin litere mari, (așa cum am arătat deja în ultimul praragraf), avem următoarea teoremă[1]:

TEOREMA 6 Dacă R' este consistent și facem uz de aceleași definiții pentru numerele naturale ca în R, atunci principiul inducției în deplina sa generalitate este independent de axiomele lui R' și, în particular, există o propoziție φi din R' care conține variabile mari astfel încît $\varphi 0$ și $\forall n(\varphi n \supset \varphi\ (n + 1)$ este demonstrabilă în R' însă $\forall mm$ nu este demonstrabilă în R'.

Rezultă că dacă R' este ω—consistent, o propoziție $\forall m \varphi\ m$ de felul arătat mai sus trebuie să fie indecidabilă în R'.

Un alt exemplu de propoziție indecidabilă poate fi obținut făcînd uz de considerente similare celor folosite pentru 4.20. Fie $Pc_1(n)$ o propoziție arit-

[1] Această teoremă și un număr de alte concluzii din articolul prezent sînt rezumate în Wang [21]. În Teorema 9 din Wang [21] însă, care corespunde teoremei de aici, exemplul din paranteze trebuie omis. Totodată, raționamentele de la rîndurile 14—20 de la p. 451 din Wang [21] sînt și ele eronate și trebuie corectate în conformitate cu analizele mai amănunțite din acest articol.

metică din R și R' care simbolizează faptul că a n-a demonstrație din R este demonstrația unei propoziții infirmabile definite din R. Avem:

5.13. Dacă R' (etc. ca în Teorema 6) atunci pentru orice $\mathfrak{n}$, $Pc_1(\mathfrak{n})$ este demonstrabilă în R' dar $\forall m(-Pc_1(m) \supset -Pc_1(m+1))$ nu este demonstrabilă.

Dacă această din urmă propoziție ar fi demonstrabilă, am avea conform 5.7 o demonstrație pentru $Con_1(R)$ în R'

Mai mult, știm că chiar și atunci cînd aplicăm în R' aceeași definiție a lui Nn ca în R, principiul inducției în generalitatea sa poate fi derivat din următoarea formă a principiului reductibilității:

$R5.$ $\exists y \forall m(m \in y \equiv m\eta X)$, sau

$$\exists a \forall m(m \in a \equiv m\eta X).$$

În consecință, avem:

5.14. Axioma *R5* este independentă de axiomele lui R'.

Din motive similare, dacă $m \geqslant n$ stă pentru

$$\forall X((n\eta X \,\&\, \forall k(k\eta X \supset (k+1)\eta X)) \supset m\eta X),$$

atunci enunțul care urmează este de asemenea independent de axiomele lui R'.

$R6.$ $\forall m(m = 0 \vee \exists n(m = n+1)) \,\&\, \forall X \exists m \forall n(n\eta X \supset n \geqslant m)$.

In $R5$ și $R6$ presupunem , bineînțeles, că variabilele m, n etc. sînt introduse în R'' prin aceleași definiții ca în R.

O altă remarcă se referă la posibilitatea demonstrării ω—consistenței Conform 5.9 și teoremei lui Gödel, rezultă că $Con_2(R\#)$ nu este un enunț demonstrabil în R'. Știm însă [1] că dacă R este ω—consistent, atunci, $R\#$ este consistent. Prin urmare, sau (1) ω — consistența lui R nu este demonstrabilă în R' sau (2) nu putem formaliza în R' demonstrația aserțiunii că $R\#$ este consistent atunci cînd R este ω—consistent. Care din aceste două alternative este cea reală?

Răspunsul pare să depindă și în acest caz de modul în care am definit noțiunea de ω — consistență care este strîns legată de numerele naturale și de numerele pseudonaturale permise de axiomele și definițiile sistemului. Să considerăm numai cazul simplu în care admitem că R conține numai numerele naturale normale 0 (mulțimea vidă), $0+1$ sau 1 (mulțimea unitate a lui zero), $1+1$ sau 2 (mulțimea unitate a lui 1) etc. și numai aceste numere.

5.15. Enunțul aritmetic $WCon_2(R)$ al lui R' (R este ω—consistent) exprimă faptul că pentru fiecare φ din T, dacă $\varphi 0$, $\varphi 1$, $\varphi 2$ etc. sînt demonstrabile în R, atunci — $\forall m \varphi m$ nu este demonstrabil în R.

Făcînd uz de această definiție, putem demonstra prin raționamentele cunoscute [1]:

5.16. $\vdash_{R'} wCon_2(R) \supset Con_2(R\#)$.

Să luăm deci $\forall n - Pc_1(n)$ (vezi 5.13) în calitate de $Con_2(R)$. Dacă — $Con_2(R\#)$, atunci — $\forall n - Pc_1(n)$ ar fi teoremă a lui $R\#$, și, întrucît Vn —

[1] v. Wang [22], § 2.

— $Pc_1(n)$ este singura axiomă suplimentară a lui $R\#$, ar fi și ea teoremă a lui R. Dacă — $Pc(0)$, — $Pc(1)$, — $Pc(2)$ etc. sînt teoreme ale lui R, atunci conform 5.15, $WCon_2(R)$. Dacă există un numeral $\mathfrak{n}$ astfel încît $Pc(\mathfrak{n})$ este demonstrabil în R, atunci — $Con_2(R)$ și deci, conform 5.15, — $WCon_2(R)$. Nu este greu să formalizăm acest raționament în R'.

În consecință, putem infera de asemenea și următoarea concluzie:

Teorema 7. Deși R' conține o definiție normală a adevărului pentru R și putem demonstra consistența lui R (respectiv, $Con_2(R)$), nu putem demonstra ω-consistența lui R (respectiv $WCon_2(R)$) în R' dacă R' nu este inconsistent.

Cu acest prilej putem formula cîteva observații simple cu privire la conexiunea dintre definițiile adevărului și demonstrațiile de consistență. Tarski subliniază adesea importanța schemelor de adevăr. Fiind date două sisteme S și S', el pune de multe ori problema dacă există o clasă sau un predicat Tr din S' astfel încît fiecare enunț care cade sub schema de mai jos să fie teoremă a lui S':

(T) p dacă și numai dacă x aparține lui Tr (Sau, alternativ, p dacă și numai dacă $Tr(x)$).

În această schemă, litera p se poate înlocui prin orice enunț al sistemului S, iar litera x prin designația metalogică (denumirea, numărul Gödel etc.) a acestui enunț.

Vom spune că S' conține o definiție a adevărului pentru S dacă și numai dacă putem găsi o clasă sau un predicat Tr în S' și putem demonstra toate cazurile lui (T) și vom spune că S' conține o definiție normală a adevărului pentru S dacă S' conține atît o definiție a adevărului pentru S cît și, derivînd din aceasta, o demonstrație de consistență pentru S(sau altfel spus, în linii mari, S' conține o definiție a adevărului pentru S potrivit căreia toate teoremele lui S sînt adevărate). Evident,

5.17. Există sisteme S și S' astfel încît S' conține o definiție a adevărului pentru S dar nu conține nici o definiție normală a adevărului pentru S.

De exemplu, să considerăm că S este întreaga teorie a mulțimilor a lui Zermelo cu toate axiomele sale și că S' este sistemul S_1 (vezi § 2); întrucît ultimul sistem, după cum se poate constata cu ușurință, este „mai puternic" decît primul, nu poate exista nici o demonstrație de consistență pentru S în S'.

Totodată, spunînd că o definiție a adevărului pentru S este anormală dacă unele teoreme ale lui S devin false potrivit definiției, putem găsi și sisteme S și S' de așa natură încît S' conține o definiție anormală a adevărului pentru S. De exemplu, acesta ar fi cazul dacă luăm din nou întreaga teorie a lui Zermelo în calitate de S și luăm S_1 plus o contradictorie a axiomei infinitului pentru elementele lui S_1 (valorile variabilelor mici) în calitate de S'.

Se pune problema dacă S' este mai tare decît S sau dacă S' este traductibil în S în cazul cînd S' conține o definiție a adevărului pentru S. Pentru a răspunde, trebuie desigur să clarificăm mai întîi ce înțelegem prin a fi mai tare sau a fi traductibil într-un alt sistem. Să adoptăm definițiile folosite cu un prilej anterior [1], definiții care nu par să se abată prea mult față de accepția uzuală în care folosim termeni ca: modelare, traducere și tărie a sistemelor.

[1] v. Wang [22], § 1.

Așa cum am arătat acolo, rezultă atunci din teorema lui Gödel că dacă S' este suficient pentru teoria curentă a numerelor și conține o definiție normală a adevărului pentru S, atunci S' nu este traductibil în S și S' nu admite nici un model în S. Mai departe, dacă S' conține ca parte a sa pe S, atunci S' este mai tare decît S.

Cu toate acestea, aplicînd aceleași definiții, este perfect posibil ca S' să conțină o definiție a adevărului pentru S și să fie în același timp mai slabă decît S și totodată traductibil în S. De exemplu, S_1 conține o definiție a adevărului pentru întreaga teorie a lui Zermelo, dar se poate arăta cu ușurință că S_1 este traductibilă în această din urmă teorie fără însă ca și aceasta să fie traductibilă în S_1. Deși Tarski a demonstrat [1] că nici un sistem S' avînd aceeași notație ca un sistem S nu poate conține o definiție (normală sau nu) a adevărului pentru S, nu putem conchide că S' trebuie să fie mai tare decît S în cazul cînd S' conține vre o definiție a adevărului pentru S.

Pe de altă parte, este posibil ca S' și S să aibă aceleași forme lingvistice și totuși S' să conțină o definiție „transformată" a adevărului pentru S în sensul că avem o corelație a tuturor propozițiilor din S cu unele propoziții din S de anumite forme speciale și pentru care există ulterior o definiție (normală sau nu) a adevărului în S'. De exemplu, se pare că aceasta se întîmplă atunci cînd spunem că o definiție normală (transformată) a adevărului pentru un sistem al teoriei mulțimilor a lui Zermelo (de exemplu, sistemul inițial al lui Zermelo în forma sa perfecționată pe care i-a dat-o Skolem) poate fi găsită într-un alt sistem (de exemplu, în sistemul lui Zermelo-Fraenkel) care posedă aceleași forme lingvistice însă conține și alte axiome (axioma substituției în cazul exemplului nostru) [2].

§ 6. OBSERVAȚII EXPLICATIVE

Vom sistematiza mai jos într-un tabel, pentru referințe, caracteristicile principalelor sisteme studiate mai sus.

Dăm mai întîi în rezumat descrieri succinte ale principalelor sisteme considerate în paragrafele anterioare.

(1) S_3 este o teorie a mulțimilor foarte slabă, în care admitem numai mulțimea nulă, precum și mulțimile finite construite plecînd de la ea; S_3 are aceleași notații ca teoria obișnuită a mulțimilor a lui Zermelo (doar un singur predicat primitiv și doar un singur gen de variabile) și conține numai axioma de extensionalitate, axioma mulțimii nule, precum și o axiomă care afirmă că prin adăugarea unui nou membru la o mulțime dată obținem iarăși o mulțime. După cum știm, S_3 posedă un model simplu în teoria elementară a numerelor.

(2) S_1 este un calcul al predicatelor de ordin 2 cu S_3 ca teorie a indivizilor; S_1 conține atît clase predicative, cît și clase impredicative de mulțimi ale lui S_3 (Vezi și sistemele lui Quine [11] și Wang [19]). S_1 este tot atît de tare ca un calcul al predicatelor de ordinul 2, avînd ca teorie a indivizilor teoria obișnuită a numerelor.

[1] v. Tarski [16[.

[2] v. Tarski [17], p. 110 și Rosser-Wang [12], p. 128.

(3) S_6 se obține din S_3, prin adăugarea așa-numitei *Aussonderungsaxiom* (o schemă) care garantează existența fiecărei submulțimi a unei mulțimi date. S_6 posedă același model aritmetic ca S_3.

(4) S_2 se află față de S în relația lui S_1 față de S_3, exceptînd faptul că S_2 conține numai clase predicative (și nu conține nici o clasă impredicativă) de mulțimi ale lui S_6, precum și faptul că *Aussonderungsaxiom* în S_2 devine o axiomă individuală (intersecția unei mulțimi și a unei clase este de asemenea o mulțime), axiomă care cuprinde o variabilă de clase liberă; S_2 este sistemul parțial al sistemului von Neumann-Bernays determinat de axiomele grupelor I-III și a V-a din Bernays [1], și S_6 stă față de S_2 în relația sistemului lui Zermelo-Fraenkel față de sistemul von Neumann-Bernays.

(5) S_4 este , în linii mari, teoria obișnuită a mulțimilor a lui Zermelo (incluzînd pe lîngă axiomele lui S_6, axioma infinitului, axioma mulțimii putere și axioma mulțimii sumă), iar S_5 stă față de S_4 în relația lui S_3 față de S_1. Notăm că în S_5 *Aussonderungsaxiom* rămîne aceeași ca în S_4 și în definirea mulțimilor (sau elementelor) nu sînt permise referiri la clase. S' este o nouă extindere a lui S_5, în care restricția este abolită și noua *Aussonderungsaxiom* afirmă (ca și în S_2) că intersecția unei mulțimi și a unei clase este iarăși o mulțime.

(6) R este un sistem formulat în notația teoriei obișnuite a mulțimilor a lui Zermelo, dar este tot atît de tare ca o extindere a lui S_1 care stă față de S_1 în aceeași relație în care stă S_2 față de S_6 sau, alternativ, tot atît de tare ca un calcul al predicatelor de ordin 3, avînd la nivelul cel mai înalt numai clase predicative. O trăsătură importantă a lui R este că conține numai un număr finit de axiome proprii (adică axiome în afara teoriei cuantificării). R' este o extindere a lui R care stă față de acesta în aceeași relație ca S_1 față de S_3; $R\#$ se obține din R adăugînd $Con(R)$ ca axiomă nouă.

Notăm că S_2 stă față de S_6 în aceeași relație în care se află sistemul lui von Neumann-Bernays (cf. Bernays 1, care va fi notat prin NB) față de cel al lui Zermelo-Fraenkel (obținut din S_4 prin adăugarea axiomei de înlocuire și a axiomei fundării, și care va fi notat prin ZF). Atunci cînd două sisteme S'' și S stau în aceeași relație în care stă NB de ZF, spunem că S'' este o extindere predicativă a lui S. Prin urmare, teorema *II* (în § 2) și rezultatele 4.17 — 4.21 (în § 4.) privesc relațiile dintre sisteme și extinderile predicative ale acestora.

S_1 și S_3, S_5 și S_4, R' și R se află toate în relații similare. Cînd S' și S se află într-o astfel de relație, spunem că S' constituie o extindere impredicativă a lui S. Astfel, S_1 este o extindere impredicativă a lui S_3, S_5 o extindere impredicativă a lui S_4 și R' o extindere impredicativă a lui R. Toate rezultatele principale din acest articol (incluzînd teoremele 1, 4, 5, 6) privesc relațiile dintre sisteme și extinderile impredicative ale acestora din urmă. Interesul și validitatea acestor rezultate depinde, în mare măsură, de consistența relativă a unui sistem și a extinderii sale impredicative, demonstrate pentru prima oară de către autorul acestui articol (vezi Wang [21] și Wang [22]. Este cazul să spunem, după cum se pare, că consistența unui sistem relativ la extinderea sa predicativă este mult mai puțin surprinzătoare decît consistența unui sistem față de extinderea sa impredicativă. Într-adevăr, cea dintîi pare să fi fost acceptată pe scară largă înainte chiar de apariția demonstrațiilor riguroase date de dr. Novak și de alți autori; totodată, de regulă, ad-

mitem că $Con(S)$ nu poate fi demonstrat într-o extindere predicativă S'', deoarece avem nevoie de clase impredicative, chiar cînd chestiunea nu a fost încă formalizată precis. Ținînd seama de acești factori, sîntem încredințați că rezultatele principale din acest articol nu-și au analogi în studiile care se mărginesc să examineze relațiile dintre un sistem și extinderea sa predicativă.

În rîndul sistemelor clasificate la rubricile (1)—(6), relația dintre S_5' și S_4 este și ea un gen diferit. S_5' diferă de o extindere predicativă a lui S_4 prin faptul că conține în plus și clasele impredicative; totodată, el diferă de extinderea impredicativă S_5 a lui S_4 prin faptul că variabilele de clase sînt permise în cadrul definițiilor mulțimilor. Cu alte cuvinte, S_5' conține de fapt, toate axiomele ambelor extensiuni ale lui S_4. Atunci cînd S''' și S se află într-o asemenea relație, vom spune că S''' este o extindere *ireductibilă* a lui S. Prin urmare, S_5' constituie o extindere ireductibilă a lui S_4.

Așa cum am menționat mai sus (cf. 4.13 din § 4), consistența lui S_4 este demonstrabilă în S_5'. Totodată, dat fiind că în S_5' putem demonstra existența unei mulțimi inductive (cf. remarca făcută după teorema din § 5[37], precum și faptul că intersecția unei clase cu o mulțime este iarăși o mulțime, intersecția tuturor claselor inductive din S_5' coincide cu intersecția tuturor mulțimilor inductive din S_5'. În consecință, dacă definim în S_4 mulțimea Nn a tuturor numerelor naturale ca intersecție a tuturor mulțimilor sale inductive și aplicăm aceeași definiție formală în S_5'; putem face totuși în S_5' inducție asupra tuturor claselor și deci tuturor propozițiilor lui S_5'. (Vezi și observațiile cu privire la $R5$ în § 5). Așadar, raționînd la fel ca pentru stabilirea lui 5.10 (din § 5.), putem deduce $Con(S_4\#)$ din $Con\ (S_4)$ în S_5' unde $S_4\#$ stă față de S_4 în aceeași relație ca $R\#$ față de R. Așadar, $Con(S_4\#)$ este de asemenea o teoremă a lui S_5'. Știm însă (vezi și demonstrația lui 5.11 din § 5) că putem deduce totodată $Con(S_5)$ din $Con(S_4\#)$ în cadrul lui S_5. În consecință, $Con(S_5)$ este de asemenea demonstrabilă în S_5', iar $Con(S_4\#)$ nu este demonstrabilă în S_5. Așadar, S_5' este în mod demonstrabil mai puternic (în sensul din Wang [4]) decît S_5 (Vezi și teoremele 6, 11 și 12 din Wang [3]).

Fie NQ sistemul obținut din NB prin adăugarea tuturor claselor impredicative. Atunci NQ constituie o extindere ireductibilă a lui ZF care se află față de ZF în aceeași relație ca S_5' față de S_4. Raționînd la fel ca în paragraful precedent, putem demonstra $Con(ZF)$ și $Con(ZF\#)$ în NQ ($ZF\#$ este față de ZF ca $R\#$ față de R). Întrucît știm că $Con(ZF)$ nu poate fi demonstrată în NB, rezultă, că trebuie să existe anumite clase impredicative a căror existență nu poate fi demonstrată în NB. Într-adevăr, întrucît consistența lui NB relativ la ZF poate fi demonstrată în NQ, $Con(NB)$ se poate demonstra de asemenea în NQ. Nu este clar dacă $Con(NB)$ s-ar putea demonstra și în cadrul extinderii impredicative a lui ZF, extindere care în mod demonstrabil este mai slabă decît NQ (exact cum S_5 este mai slab ca S_5').

Exemplele cele mai obișnuite de extinderi ireductibile par să fie cazurile în care S este calculul uzual al predicatelor de ordinul n (n fiind 2, 3, 4, ...) și S''' este calculul de ordin $n+1$. Luînd numerele naturale ca indivizi

37 Aceasta depinde desigur de definițiile lui zero și a funcției succesor și de forma specială pe care o ia axioma infinitului. De exemplu, dacă facem uz de axioma inițială a infinitului introdusă de Zermelo și definim zero și funcția succesor ca în 2.1 și 2.2 (din §2.(, atunci mulțimea sumă a mulțimii infinite postulate este o mulțime inductivă.

(adică entități de primul sau cel mai coborît tip) ai acestor sisteme constatăm că tot ceea ce am spus cu privire la S_4, S_5, S_5' se aplică *(mutatis mutandis)* la sistemele S, S' (extinderea impredicativă a lui S) și respectiv S'''.

Un caz similar, însă puțin diferit, este următorul. Fie R^* sistemul care se obține din R' prin adăugarea axiomei noi $R5$ (care afirmă că orice clasă de numere naturale este echivalentă cu o mulțime de numere naturale; vezi § 5); constatăm atunci că R^* stă, de asemenea, în aceeași relație față de R și R', în care stă S_5' față de S_4 și S_5.

BIBLIOGRAFIE

[1] Paul Bernays, *A System of Axiomatic Theory*, în „Jour. Symbolic Logic", partea I, **2**, 1937, pp. 65—77; partea II, **6**, 1941, pp. 1—17.

[2] Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, în „Monatsch. Math. Phys.", **38**, 1931, pp. 173—198.

[3] David Hilbert și Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I, 1934, vol. **2**, 1939, Berlin, Springer.

[4] Leon Henkin, *The Completeness of Formal Systems, a Thesis at Princeton University Accepted in October*, 1947; abstract appeared on p. 61 of „Jour. Symbolic Logic", **13** (1948).

[5] Leon Henkin, *Completeness in the Theory of Types*, în „Jour. Symbolic Logic", **15**, 1950, pp. 81—91.

[6] A. Malcev, *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik*, în „Recueil Mathematique", N. S., **1**, 1936, pp. 323—336.

[7] John von Neumann, *Zur Einführung des transfiniten Zahlen, Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectia scientiarum mathematicarum*, **1**, 1923, pp. 199—208.

[8] Ilse L. Novak, *A Construction for Modele of Consistent Systems*, în „Fund. Math", **37**, 1950, pp. 87—110.

[9] John G. Kemeny, *Type Theory vs. Set Theory, a Thesis at Princeton University* (1949); abstract appeared on p. 78 of „Jour. Symbolic Logic", **15**, 1950.

[10] W. V. Quine, *Mathematical Logic*, New York, 1940; second printing, Cambridge, Mass., 1947.

[11] Idem, *Element and Number*, în „Jour. Symbolic Logic", **6**, 1941, pp. 135—149.

[12] J. Barkley Rosser și Hao Wang, *Non-standard Models for Formal Logics*, în „Jour. Symbolic Logic", **15**, 1950, pp. 113—129.

[13] Arnold Schmidt, *Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen*, în „Math. Ann.", **115**, 1938, pp. 485—506.

[14] Thoralf Skolem, *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik*, „Skrifter utgitt av Det. Norske Videnskaps-Akademi", I, nr. 4, 1929, 49 pp.

[15] Thoralf Skolem, *Über die Nicht-charakterisuerbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen*, în „Fund. Math." **23**, 1934, pp. 150—161.

[16] Alfred Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, în *„Studia Philosophica"*, **1**. 1936, pp. 261—405 (originalul în poloneză, 1933).

[17] Alfred Tarski, *On Undecidable Statements in Enlarged Systems of Logic and the Concept of Truth*, în „Jour. Symbolic Logic", **4**, 1939, pp. 105—112.

[18] Alfred Tarski, *The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics, Reading in Philosophical Analysis*, selected and edited by Herbert Feigl and Wilfred Sellars, New York, 1949, pp. 52—84; apărut inițial în *„Philosophy and Phenomenological Research"*, **4**, 1944.

[19] Hao Wang, *A New Theory of Element and Number*, și „Jour. Symbolic Logic", **13**, 1948, pp. 129—137.

[20] Idem, *On Zermelo's and von Neumann's Axioms for set Theory*, în „Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.", **35**, 1949, pp. 150—155.

[21] Idem, *Remarks on the Comparison of Axiom Systems*, în *loc. cit*, **36**, 1950, pp. 448—453

[22] Idem, *Arithmetic Translations of Axiom Systems*, în „Trans. Am. Math. Soc.", **71**, 1951, pp. 283—293.

CAPITOLUL XIX
TEORIA NUMERELOR ÎN RAPORT CU TEORIA MULŢIMILOR[1]

Voi discuta unele conexiuni dintre teoria numerelor (adică teoria numerelor naturale sau a întregilor nenegativi) şi unele sisteme de teoria mulţimilor. Las de o parte relaţiile dintre numerele transfinite şi mulţimile arbitrare.

În timp ce Dedekind şi Frege au încercat să-i dea un fundament teoriei numerelor prin consideraţii esenţialmente de teorie a mulţimilor, Kronecker şi Poincaré au insistat asupra faptului că în gîndirea noastră matematică momentul fundamental îl reprezintă numerele naturale.

Se pare că natura numerelor naturale o înţelegem mai bine decît pe cea a mulţimilor arbitrare. Ştim că teoria numerelor este consistentă într-un sens destul de bine definit, dar nu ştim în ce sens este consistentă teoria mulţimilor. Într-un anumit sens din teoria mulţimilor putem obţine, adică putem deriva teoria numerelor, dar invers nu.

Dacă ne limităm exclusiv la mulţimile finite, atunci teoria mulţimilor este echivalentă cu teoria numerelor. Dacă admitem şi mulţimi infinite, dar nu „impredicative", atunci teoria mulţimilor continuă să semene foarte mult cu teoria numerelor, deşi nu ştim dacă ele sînt în vreun fel riguros echivalente. Marea lacună provine din introducerea mulţimilor impredicative.

Toate acestea sînt bine cunoscute. Obiectul articolului de faţă îl constituie formularea mai exactă a conexiunilor dintre teoria numerelor şi teoria mulţimilor. Voi examina diferite sisteme de teoria mulţimilor, de tărie diferită, dar fiecare destul de tare pentru a ne permite să derivăm teoria numerelor.

Voi cerceta, printre altele, în ce măsură interpretările pentru fiecare sistem sînt determinate de o interpretare fixată a acelei părţi din sistem care corespunde teoriei numerelor.

Rezultatele obţinute mai jos ne vor oferi, după cum sperăm, noi aprofundări ale conexiunilor strînse care există între teoria numerelor şi teoria mulţimilor, precum şi ale particularităţilor mulţimilor impredicative.

În primul paragraf voi considera teoria generală a mulţimilor sau teoria mulţimilor a lui Zermelo minus axioma infinitului. Se face uz de mai multe sisteme. Sistemul G este sistemul de bază al teoriei generale a mulţimilor, incluzînd axioma de extensionalitate, *Aussonderungsaxiom* (axioma sepa-

[1] Acest capitol a apărut în „Math. Annalen", 126 1953, pp. 385—409.

rării), precum și o axiomă care asigură existența mulțimilor finite. Sistemul G' mai conține, pe lîngă axiomele lui G (notate prin $M1-M3$) și axiomele $M4-M8$ ale fundării, înlocuirii, mulțimii sumă, mulțimii putere și alegerii. Cu alte cuvinte, G' conține toate axiomele teoriei mulțimilor a lui Zermelo, cu excepția axiomei infinitului. Sistemul Z este sistemul curent al teoriei elementare a numerelor de care fac uz, de exemplu, Hilbert și Bernays.

Rezultatele principale obținute în primul paragraf sînt următoarele. (1) Se știe că G și G' admit un model numărabil simplu, comun. În însuși sistemul G este construit acum un predicat E, care servește la enumerarea tuturor mulțimilor în modelul simplu. (2) Folosind acest predicat E, putem exprima în G o axiomă de limitare:

ALG. Fiecare mulțime este limitată; sau, cu alte cuvinte, pentru orice x, există un număr natural m, astfel încît x este $E(m)$.

În consecință, putem considera sistemul G^* obținut din G prin adăugarea ca axiomă nouă a lui *ALG*. (3) Este demonstrat că toate teoremele lui G' sînt totodată teoreme ale lui G^*; cu alte cuvinte, prezența lui *ALG* face ca axiomele $M4-M8$ să fie redundante. (+) Sistemul G^* este categoric, relativ la teoria sa a numerelor, în sensul că două modele oarecare pentru G^* sînt izomorfe ori de cîte ori părțile lor pentru teoria numerelor în G^* sînt izomorfe. (5) G^* este efectiv traductibil în G.

În paragraful 2 voi considera mai întîi un sistem B', care reprezintă o extindere predicativă a lui G'. Fiecare predicat al lui G' definește o colecție de mulțimi și P' tratează atît mulțimile, cît și aceste colecții încît, de exemplu, în locul predicatului „$H(x)$“ putem scrie acum „$x\eta Y$“ (x aparține colecției Y definite de predicatul H). P' mai poate fi descris ca teoria mulțimilor a lui Bernays minus axioma infinitului. Se demonstrează următoarele concluzii. (i) Este știut că pot fi enumerate, în mod direct, toate colecțiile a căror existență este cerută de axiomele lui P'. Formalizînd acest fapt, definim acum un predicat η^* (m, n) de numere naturale, astfel încît, dacă adăugăm ca axiome la teoria numerelor Z, enunțuri care definesc (implicit) η^*, atunci P' este traductibil efectiv în sistemul rezultat. (ii). Se demonstrează că η^* nu poate fi un predicat general recursiv. (iii) Este posibil să exprimăm în P' un predicat $R(X, m)$ care, intuitiv vorbind, enumeră toate colecțiile lui P'. (iv) Dar definiția lui R conține variabile legate luînd valori din domeniul tuturor colecțiilor și deci, date fiind dificultățile pe care le suscită inducția, nu putem demonstra în P' că R servește la enumerarea *tuturor* colecțiilor cerute de axiomele lui P'.

În sfîrșit, în § 3 sînt examinate căile de evitare a dificultății legate de inducție. (a) Ar fi eficientă folosirea unei reguli de inducție infinită. (b) Introducerea colecțiilor impredicative ar elimina, la rîndul ei, această dificultate. Fie P extinderea lui G, care stă față de G în relația lui P' față de G' și fie Q sistemul obținut din P prin adăugarea unui principiu pentru formarea de colecții impredicative. Fie P^* sistemul obținut prin adăugarea axiomei *ALG*, precum și a axiomei *ALP* care afirmă că pentru fiecare colecție X avem un număr m, astfel încît X este $R(m)$. (c) Se demonstrează apoi că P^* este efectiv traductibil în Q. Rezultă că Q este mai tare ca P și că principiul pentru formarea colecțiilor impredicative este independent de axiomele lui P. (d) Sistemul P^* este, de asemenea, categoric relativ la teoria sa a numerelor, dacă ne restrîngem la modele ω—consistente (adică modele în care nu avem nici un

predicat $H(m)$, astfel încît $H(0)$, $H(1)$,... să fie toate adevărate, însă „pentru toți m, $H(m)$" să fie fals). (e) Sînt prezentate și discutate anumite forme noi de enunțuri indecidabile în teoria mulțimilor.

Cu aceasta, sumarul rezultatelor este încheiat. S-ar putea dovedi util și următorul index succint al noțiunilor și notațiilor definite în mod special în acest studiu: $\in^*$ (vezi 1.1), $a(n)$ (1.2), $b(n)$ (1.3), $L(x)$ (1.17). L-traducere (1.18), η^* (2.16), n^*(2.17), e (mulțimea sau colecția vidă). $Nn(y)$ (y este un număr natural), $H(n, Y)$ (2.18), $R(X, m)$ (2.20), $L(X)$ (3.7), R-traducere (3.8).

În cadrul acestui articol, atunci cînd vorbesc despre un model pentru un sistem de axiome sau pentru o parte a unui sistem, înțeleg, pur si simplu, un domeniu sau o mulțime de domenii de obiecte asociate unei atribuiri de valori de adevăr (adevărat sau fals) fiecărui enunț al sistemului sau al părții din sistem, astfel încît sînt satisfăcute următoarele condiții: (1) atribuindu-se enunțurilor valori de adevăr, funcțiile de adevăr și cuantorii primesc interpretarea lor normală, încît, de exemplu, p este adevărat, dacă și numai dacă negația lui p este falsă; (2) toate teoremele sistemului sau ale părții unui sistem sînt adevărate în conformitate cu atribuirea valorilor de adevăr. În particular, pentru ca să pot vorbi despre modele ale unei anumite părți dintr-un sistem de axiome nu sînt obligat să consider chestiunea, dacă partea formează și ea prin ea însăși un sistem de axiome sau, în cazul afirmativ, nu sînt obligat să-mi pun problema naturii acestui sistem de axiome.

În acest articol nu sînt obligat să iau conceptul „categoric" în sensul său uzual, impredicativ. Prin modul în care aplic acest concept evit impredicativitatea, deoarece în cazul teoremelor mele asupra categoricității, corespondența biunivocă poate fi construită efectiv.

§ 1. TEORIA GENERALĂ A MULȚIMILOR

Toate sistemele de teoria numerelor și teoria mulțimilor conțin ca parte a lor calculul predicatelor cu identitate, calcul care tratează proprietățile tipice ale funcțiilor de adevăr, cuantorilor și identităților (vezi Hilbert-Bernays, [8], p. 375 și p. 389). Folosim ca sistem de bază al teoriei numerelor faimosul sistem Z al lui Hilbert-Bernays (*ibidem*, p. 384) determinat prin axiomele lui Dedekind-Peano pentru numerele naturale și prin ecuațiile recursive pentru adunare și înmulțire. În cadrul sistemului Z ori de cîte ori întîlnim numere care se bucură de o proprietate dată putem introduce un termen descriptiv „cel mai mic dintre numerele care se bucură de această proprietate". Toate funcțiile și raționamentele curente din teoria numerelor pot fi obținute în Z.

Pentru început, vom examina sistemul axiomatic de teoria mulțimilor propus inițial de către Zermelo și modificat și rafinat ulterior de către alți autori. Pentru moment, vom omite axiomele infinitului, mărginindu-ne să studiem sistemul celorlalte axiome, care constituie ceea ce este denumit uneori teoria generală a mulțimilor. Este cunoscut faptul că teoria generală a mulțimilor și teoria numerelor sînt traductibile una în alta în următorul sens [2]. Există un mod efectiv de înlocuire a predicatului apartenenței din teoria generală a mulțimilor printr-un predicat din teoria numerelor astfel încît

[2] În legătură cu precizarea noțiunii de traducere, cf. Wang [14].

toate enunțurile care rezultă cînd efectuăm această înlocuire în locul teoremelor teoriei mulțimilor sînt teoreme ale teoriei numerelor; reciproc, există un mod efectiv de înlocuire a simbolurilor teoriei numerelor prin simboluri convenabil alese ale teoriei generale a mulțimilor, astfel încît teoremele primei teorii devin teoreme în cadrul celei de a doua.

În vederea aplicării și extinderii acestor rezultate, vom da mai întîi o descriere mai completă a sistemului teoriei generale a mulțimilor.

Această teorie conține un singur predicat cu două locuri $\in$ (apartenența, aparține la), variabilele x, y, z etc. pentru mulțimi și următoarele axiome[3].

M 1. *Axioma de extensionalitate.* Două mulțimi avînd aceleași elemente sînt identice; sau, dacă două mulțimi x și y au aceleași elemente și x aparține lui z, atunci și y aparține lui z.

M 2. *Axioma mulțimilor finite.* Unei mulțimi x i se poate alipi o mulțime y, care nu figurează încă în x; cu alte cuvinte, dacă avem două mulțimi x și y, atunci avem o mulțime z, astfel încît x se include în z (adică fiecare element al lui x este și element al lui z) și y este unicul element al lui z care nu aparține de asemenea lui x.

M 3. *Aussonderungsaxiom.* Fiind dată o mulțime oarecare x și un predicat oarecare $H(y)$ ale sistemului (sau o proprietate oarecare exprimabilă în sistem), există o submulțime a lui x care conține toate elementele și numai acele elemente y ale lui x astfel încît $H(y)$, adică y posedă proprietatea dată).

M 4. *Axioma fundării.* Fie dat un predicat oarecare $H(x)$ al sistemului, astfel încît există un x, $H(x)$. Există atunci o mulțime x astfel încît $H(x)$ și nu există nici o mulțime y care aparține lui x pentru care $H(y)$.

M 5. *Axioma înlocuirii.* Dacă domeniul unei corespondențe biunivoce este o mulțime, codomeniul este de asemenea reprezentat de o mulțime; cu alte cuvinte, dacă un predicat oarecare $U(x, y)$ al sistemului determină o corespondență biunivocă și colecția tuturor mulțimilor x, astfel încît există un y, cu $U(x, y)$ formează o mulțime, atunci și colecția tuturor mulțimilor y astfel încît există un x, cu $U(x, y)$ formează o mulțime.

M 6. *Axioma mulțimii sumă.* Fiind dată o mulțime x, există o mulțime y care este suma tuturor elementelor lui x.

M 7. *Axioma mulțimii putere.* Fiind dată o mulțime x, există o mulțime y, alcătuită din toate submulțimile lui x.

M 8. *Axioma alegerii.* Fiind dată o mulțime x de mulțimi nevide y disjuncte două cîte două există o mulțime z care conține un element și numai un element comun cu fiecare mulțime y din x.

[3] În loc de *M*2 se obișnuiește mai curînd să se folosească axioma mai slabă a formării mulțimii pereche. Pentru cele urmărite de noi convine însă mai curînd aplicarea lui *M*2.

După cum știm, avem două posibilități: sau folosim identitatea ca noțiune de bază și adoptăm teoria curentă a identității, sau definim $x = y$ ca însemnînd că x și y au aceiași membri și derivăm teoria identității din formulările alternative ale lui *M*2, date mai jos. Ori de cîte ori este convenabil, vom admite că identitatea este definită în termenii relației de apartenență. Aceasta simplifică uneori, într-o anumită măsură, unele considerații făcute cu privire la sistemele de teoria mulțimilor.

Vom numi G sistemul determinat prin $M1-M3$ și vom numi G' sistemul determinat prin $M1-M8$. În termenii sistemelor G și G', relațiile cunoscute dintre teoria numerelor Z și teoria generală a mulțimilor pot fi formulate mai precis.

În primul rînd, pe baza cercetărilor întreprinse de Zermelo, Grelling și alții*, știm că teoria numerelor este traductibilă în G și deci, *ipso facto*, este traductibilă în G'. Cu alte cuvinte, aplicînd definiții adecvate pentru numărul zero 0, succesorul $S\,x$ al lui x, predicatul de a fi un număr natural, adunare și înmulțire, putem deriva în G și G' toate axiomele lui Z.

Pe de altă parte, Ackermann a demonstrat[4] că G' (și prin urmare și G) sînt traductibile în teoria numerelor. Astfel, G' și G posedă un model comun simplu alcătuit din toate mulțimile finite e, $\{e\}$, $\{\{e\}\}$, $\{\{e\}\}$, $\{e, \{e\}, \{\{e\}\}\}$ și așa mai departe, obținut din mulțimea vidă e prin aplicări repetate (de un număr finit oarecare de ori) ale axiomei $M2$. Aceste mulțimi pot fi reprezentate totodată în mod biunivoc prin numere naturale. Numărul natural zero 0 reprezintă mulțimea vidă e, $2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots 2^{a_k} (a_1 > a_2 \ldots > a_k \geqslant 0)$ mulțimea alcătuită din cele k mulțimi reprezentate respectiv prin numerele $a_1 \ldots a_k$. Cu aceste reprezentări, a $m-1$ mulțime aparține celei de a n-a, atunci și numai atunci cînd, indiferent dacă există un rest, cîtul împărțirii lui n prin 2^m este impar. Dacă spunem că $m \in {}^*n$, dacă și numai dacă este impar cîtul împărțirii lui n prin 2^m, atunci ε^* este, în mod evident, un predicat definibil în teoria numerelor. Rezultatul lui Ackermann este că toate rezultatele înlocuirii predicatului $x \in y$ în toate axiomele lui G' prin predicatul $m \in {}^*n$ sînt teoreme ale teoriei numerelor.

1.1. Fie $\in^*$ predicatul de numere naturale, astfel încît $m \in {}^*n$ atunci și numai atunci cînd cîtul împărțirii lui n prin 2^m este impar, indiferent dacă există un rest.

Împreună luate, aceste rezultate conduc la anumite concluzii foarte interesante. Astfel, întrucît G conține atît teoria numerelor, cît și mulțimile finite construite pornind de la mulțimea vidă, se dovedește posibilă exprimarea în cadrul lui G însuși a corespondenței între mulțimi și numerele naturale. Această corelație duce, la rîndul ei, la o axiomă de limitare (*Beschränktheitsaxiom*, cf. Fraenkel [4] și von Neumann [9]) care, adăugată lui G, face ca sistemul să devină într-un anumit sens complet.

În reprezentarea Ackermann a mulțimilor finite există pentru fiecare ($n > 0$) cel puțin un număr m astfel, încît $m < n$, iar a n-a mulțime se obține din a m-a, adăugînd un membru în plus și numai unul. Cu alte cuvinte, pentru fiecare pozitiv n, există un m și un k astfel încît $n = m + 2^k$, iar cîtul împărțirii lui m prin 2^k este par (adică a k-a mulțime nu aparține la a m-a).

1.2. Fie $a\,(n)$ $(n > 0)$ cel mai mic m, astfel încît există un număr k, $n = m + 2^k$ și cîtul împărțirii lui m prin 2^k este par.

1.3. Fie $b(n)$ $(n > 0)$ numărul k astfel, încît $n = a(n) + 2^k$.

Utilizînd aceste noțiuni, putem enumera în G toate mulțimile modelului pentru G și G' printr-un predicat E astfel, încît $E(\mathrm{e}, 0)$ (sau $E(0)$ este mulțimea vidă e) și $E(n)$ $(n > 0)$ este mulțimea $\mathrm{s}\,E(a(n)) + \{E(b(n))\}$ obținută din

* Vezi Zermelo [16], Grelling [6] și Bernays [3].

[4] Vezi Ackermann [1]. Sistemul său nu include $M2$ $M4$ sau $M5$. Dar adăugarea acestor axiome nu suscită nici o dificultate specială (în legătură cu $M5$, vezi Peter [1]).

$E(a(n))$ prin adăugarea lui $E(b(n))$ ca unic membru adițional. Pentru găsirea acestui predicat E, nu avem nevoie decît de procedeul uzual de convertire a definițiilor recursive în definiții explicite (cf. Bernays [3], p. 13).

Avînd în vedere utilizarea viitoare ca și ilustrarea modului în care se pot defini în G funcțiile general recursive, descriem aici cîteva detalii privind definirea lui E.

Ca de obicei, perechea ordonată $\langle x, y\rangle$ a lui x și y este mulțimea $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, o mulțime relațională (diadică) este o mulțime de perechi ordonate, o mulțime funcțională este o relație unimultivocă, iar domeniul unei mulțimi funcționale y este mulțimea tuturor z, pentru care există un w cu $\langle w, z\rangle$ aparținînd lui y.

1.4. Fie E (x, m) desemnarea următorului enunț: $\langle x, m\rangle$ aparține unei mulțimi funcționale y cu succesorul Sm al lui m (care conform definiției adoptate este mulțimea tuturor numerelor naturale $\leqslant m$) ca domeniu, astfel încît $y(0)$ este e și pentru fiecare număr pozitiv n $(n \leqslant m)y(n)$ este $y(a(n)) + \{y(b(n))\}$.

Atunci putem demonstra în G, printr-o metodă cunoscută (vezi Bernays [3]), că pentru fiecare m există un x, $E(x, m)$ și că pentru orice x, y, m, dacă $E(x, m)$ și $E(y, m)$, atunci $x = y$. Putem scrie deci $x = E(m)$ în locul lui $E(x, m)$ și să considerăm că E definește o funcție.

Sistemul G conține formele obișnuite ale principiului inducției privitor la toate proprietățile exprimabile în G:

1.5. Pentru fiecare proprietate exprimabilă (prin $H(x)$, să zicem), în G, dacă $H(0)$ și pentru toți n, $H(n)$ implică $H(Sn)$, atunci pentru toate numerele naturale m, $H(m)$.

1.6. Dacă $H(0)$ și dacă $H(m)$, cu condiția că pentru toți n mai mici ca m, avem $H(n)$: atunci, oricare ar fi m, $H(m)$; cu alte cuvinte, dacă o proprietate aparține lui 0 și aparține unui n arbitrar, în cazul cînd aparține tuturor numerelor mai mici ca acesta, atunci aceeași proprietate aparține tuturor numerelor naturale.

Aplicînd aceste principii, precum și noțiunile introduse la 1.1. — 1.4, putem demonstra foarte ușor în G următoarele teoreme:

1.7. Pentru nici un j, $j \in {}^*0$.

1.8. $E(0)$ este mulțimea vidă e.

1.9. Pentru orice număr pozitiv k și pentru orice m, $m \in {}^*k$, dacă și numai dacă sau $m \in {}^*a(k)$ sau m este $b(k)$.

1.10. Pentru orice număr pozitiv n, $E(n) = E(a(n)) + \{E(b(n))\}$.

1.11. Pentru toți m și n pozitivi, $m = n$, dacă și numai dacă $a(n) = a(n)$ și $b(m) = b(n)$.

1.12. Pentru toți m și n pozitivi, $E(m) = E(n)$, dacă și numai dacă $E(a(m)) = E(a(n))$ și $E(b(m)) = E(b(n))$.

1.13. Pentru toți m și n, $E(m) = E(n)$, dacă și numai dacă $m = n$.

Demonstrație. Așa cum am observat mai sus, dacă $E(x, m)$ și $E(y, m)$, atunci $x = y$. Așadar, dacă $m = n$, $E(m) = E(n)$. Așadar, avem de demonstrat numai faptul că dacă $E(m) = E(n)$, atunci $m = n$. Demonstrăm aceasta prin inducție. Conform 1.10, dacă $k > 0$, $E(k)$ conține cel puțin un membru $E(b(k))$. Prin urmare, $E(k)$ este mulțimea vidă e atunci și numai atunci cînd $k = 0$. În consecință, 1.13 este adevărat, cînd sau m sau n este 0. Fie m un întreg pozitiv arbitrar ales și să presupunem că (1) „$E(m) = E(n)$ implică $m = n$" este adevărat pentru toate valorile lui n mai mici ca j. Vrem să arătăm că enunțul este adevărat și cînd $n = j$. Să presupunem că $E(m) = E(j)$. Atunci, conform 1.12, $E(a(m)) = E(a(j))$ și $E(b(m)) = E(b(j))$. Conform ipotezei inducției, dat fiind că $a(j) < j, b(j) < j$, (1) este adevărat cînd $n = a(j)$ sau $n = b(j)$. Deci $a(m) = a(j)$ și $b(m) = b(j)$. Așadar, conform 1.11, (1) este adevărat cînd $n = j$, prin inducție, (1) este demonstrat. Prin urmare, 1.13 este demonstrat.

Putem demonstra în G și:

Teorema 1. Pentru toți m și n, $E(m) \in E(n)$, dacă și numai dacă $m \in^* n$.

Demonstrație. Facem inducție asupra lui n. Dacă $n = 0$, teorema este adevărată conform cu 1.7 și 1.8. Să admitem că teorema este adevărată pentru toți $n < j$. Întrucît $a(j) < j$, avem: pentru toți m, $E(m) \in E(a(j))$ dacă și numai dacă $m \in^* a(j)$. Conform 1.13, $E(m)$ este $E(b(j))$ dacă și numai dacă m este $b(j)$. Așadar, în conformitate cu 1.9 și 1.10, $E(m) \in E(j)$ dacă și numai dacă $m \in^* j$. Așadar, în conformitate cu 1.6, teorema este demonstrată.

Din teorema 1 și rezultatul sus-menționat al lui Akermann obținem:

1.14. Dacă înlocuim predicatul $x \in y$ prin predicatul $E(m) \in E(n)$ în toate axiomele lui G', toate rezultatele sînt teoreme în G.

În continuare, să considerăm o axiomă de limitare pentru G și G', care restrînge mulțimile la acelea enumerate de E:

ALG. Pentru orice x, există un m, cu $x = E(m)$.

Este ușor de văzut că *ALG* este independentă de axiomele lui G și G', deoarece, de exemplu, axiomele lui G și G', nu interzic mulțimile infinite, spre deosebire de *ALG*.

1.15. Dacă sistemul rezultat din G, prin adăugarea unei axiome a infinitului este consistent, atunci *ALG* este independentă de axiomele lui G și G'.

Demonstrație. În mod evident, $E(0)$ nu este o mulțime infinită. Să presupunem că pentru orice n mai mic decît j, $E(n)$ este o mulțime finită. Deoarece $a(j)$ este mai mic ca j, $E(a(j))$ este deci finită. Prin urmare și $E(j)$ este finită, deoarece se deosebește de $E(a(j))$ printr-un element în plus. Prin inducție, oricare ar fi k, $E(k)$ este o mulțime finită. Prin urmare, *ALG* contrazice axiomele infinitului și este independentă de axiomele lui G și G'.

Vom trece acum la examinarea sistemului rezultat din G prin adăugarea lui *ALG*.

1.16. Fie G^* sistemul rezultat din G prin adăugarea lui *ALG* ca o nouă axiomă.

1.17. Să convenim: $L(x)$ sau x este limitat dacă și numai dacă există un număr natural m, astfel încît x este $E(m)$.

1.18. Fie L — traducerea unui enunț arbitrar din G și G' rezultatul obținut prin restrîngerea domeniului variabilelor la mulțimile limitate: cu alte cuvinte, L — traducerea unui enunț este rezultatul obținut prin substituirea enunțului „pentru toți x, dacă $L(x)$ atunci $H(x)$" în locul fiecărei clauze „pentru toți x, $H(x)$" și substituirea enunțului „pentru unii x, $L(x)$ și $H(x)$" în locul fiecărei clauze „pentru unii x, $H(x)$".

Utilizînd aceste noțiuni, putem demonstra:

1.19. Se poate demonstra în G și G^*: L — traducerea unui enunț din G este valabilă dacă și numai dacă este valabil rezultatul obținut din ea prin substituirea predicatului $E(m) \in E(n)$ pretutindeni în locul lui $x \in y$.

Demonstrație. Conform cu 1.17 și cu legile obișnuite ale logicii, „pentru toți x, dacă $L(x)$, atunci $H(x)$" este echivalent cu „pentru toți m și x, dacă x este $E(m)$ atunci $H(x)$". Totodată, „pentru toți m și x, dacă x este $E(m)$, atunci $H(x)$" este în mod evident echivalent cu „pentru toți m, $H(E(m))$". Așadar, „pentru toți m, $H(E(m))$" este echivalent L — traducerii lui „pentru toți x, $H(x)$". Similar putem demonstra că „pentru unii k, $H(E(k))$" este echivalent L — traducerii lui „pentru unii y, $H(y)$". În consecință, 1.19 este demonstrat.

1.20. Un enunț este demonstrabil în G^*, dacă și numai dacă L — traducerea sa este demonstrabilă în G^*.

Demonstrație. Ținînd seama de ALG, „pentru toți x, $H(x)$" este echivalent în G^* cu „pentru toți x, dacă $L(x)$ atunci $H(x)$", iar „pentru unii x, $H(x)$" este echivalent cu „pentru unii x, $L(x)$ și $H(x)$". Așadar, 1.20 este demonstrat.

Dacă în demonstrațiile pentru 1.19 și 1.20 considerăm că enunțul inițial este dat în forma normală *prenex* (adică într-o astfel de formă, încît toate expresiile „pentru toți x", „pentru unii y" și altele asemănătoare stau la începutul enunțului și acțiunea lor se extinde pînă la capătul enunțului), atunci putem constata într-un mod chiar mai direct că demonstrațiile sînt corecte.

Din 1.14, 1.19 și 1.20 rezultă imediat:

Teorema 2. Axiomele M4—M8 din G' sînt teoreme ale lui G^*. Pentru ca să exprimăm mai exact legătura strînsă dintre G^* și teoria numerelor, introducem noțiunea de categoricitate relativ la teoria numerelor:

Definiția 1. Un sistem în care este derivabilă teoria numerelor, se spune că este categoric relativ la teoria numerelor dacă și numai dacă oricare două modele pentru sistem sînt izomorfe ori de cîte ori sînt izomorfe părțile lor pentru teoria numerelor în sistem [5].

Definiția poate fi făcută mai clară pe exemplul lui G^*.

Teorema 3. Sistemul G^* este categoric relativ la teoria numerelor.

[5] Teoria numerelor dintr-un sistem este acea parte a sistemului care conține numai noțiuni corespunzătoare celor din Z. Prin urmare, un enunț care cuprinde atît noțiuni ale teoriei numerelor, cît și noțiuni dinafara acesteia din urmă nu este considerat drept un enunț al teoriei numerelor din cadrul sistemului. În timp ce este clar că orice enunț p din sistem este echivalent unui enunț de tipul mixt (de exemplu, „p și $0 = 0$"), nu este întotdeauna evident dacă orice enunț al unui sistem specific este echivalent unui enunț din teoria numerelor a acestui sistem.

Demonstrație. Să considerăm două modele pentru G^* care sînt izomorfe privitor la teoria numerelor din G^*. Cu alte cuvinte, avem o corespondență biunivocă între obiectele care reprezintă numerele naturale în cele două modele și totodată orice enunț al lui G^* cuprinzînd numai variabile și noțiuni ale teoriei numerelor este sau adevărat în ambele modele, sau fals în ambele. Conform lui *ALG* și 1.13, există o corespondență biunivocă între numerele naturale și toate mulțimile lui G^*. Există deci o corespondență biunivocă între obiectele celor două modele. De asemenea, conform lui 1.20, 1.19 și teoremei 1, pentru orice enunț p din G^* există un enunț p', echivalent — după cum se poate demonstra — cu p și obținut din acesta prin substituirea predicatului $m \in^* n$ pretutindeni în locul predicatului $x \in y$. Întrucît toate teoremele lui G^* trebuie să fie adevărate în modelele pentru G^*, „p dacă și numai dacă p'" trebuie să fie adevărat în ambele modele pentru G^*. În orice caz însă, p' este un enunț al teoriei numerelor și, prin ipoteză, este sau adevărat în ambele modele, sau fals în ambele. Întrucît p' trebuie să ia aceeași valoare de adevăr ca p, p la rîndul său este sau adevărat în ambele modele, sau fals în ambele. Cele două modele sînt deci izomorfe, ceea ce era de demonstrat.

După cum știm, teorema de incompletitudine a lui Gödel se aplică și ea la sistemul G^*. Prin urmare, avem enunțuri indecidabile de teoria numerelor în G^*, și este posibil să găsim un model pentru G^*, în care un enunț indecidabil, să fie adevărat, precum și un alt model în care același enunț să fie fals. Teorema 3 nu contrazice acest fapt, ci arată doar că o dată ce *adoptăm* pentru un model al lui G^* o atribuire definită de valori de adevăr pentru toate enunțurile indecidabile de teoria numerelor din G^*, valorile de adevăr ale tuturor enunțurilor din G^* sînt atunci univoc determinate.

În fapt, 1.20, 1.19 și teorema 1 luate la un loc arată, de asemenea, că, prin completarea teoriei numerelor din G^* cu o regulă neconstructivă de inferență, sistemul G^* însuși devine și el complet. Așadar, după cum știm, teoria numerelor poate fi făcută completă prin adăugarea următoarei reguli de inducție infinită [6]:

1.21. Fiind dat orice predicat H al teoriei numerelor, dacă $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$, ... sînt teoreme, atunci „pentru toți m, $H(m)$" este la rîndul său o teoremă.

Adăugînd 1.21. lui G^*, obținem deci un sistem complet, în care orice enunț este sau demonstrabil, sau infirmabil. Acest lucru este demn de remarcat, deoarece adăugarea lui 1.21 nu este suficientă pentru ca să facă complete anumite sisteme puternice (vezi Rosser [11]).

[6] Aserțiunea devine evidentă, dacă ne gîndim la faptul că toate enunțurile adevărate care nu conțin nici o variabilă sînt demonstrate în teoria numerelor și că 1.21 ne dă toate enunțurile adevărate ale teoriei numerelor așa cum sînt ele determinate de către definiția adevărului la Hilbert-Bernays (cf. [8], p. 333).

În ce privește regula de inducție infinită, avem următoarele două modalități diferite de a o construi. Pe de o parte, regula poate fi construită ca o parte a unei definiții, ca să spunem așa, metamatematice a sistemului de enunțuri „adevărate" ale teoriei numerelor (în sens clasic), exprimînd o proprietate de închidere. Pe de altă parte, regula mai poate fi construită și ca regulă de derivare, care diferă de regulile uzuale de derivare prin faptul că cere admiterea schemelor de demonstrație ca generatoare de demonstrații. Tocmai pe baza primei interpretări a inducției infinite, teoria numerelor devine completă și ω — completă prin adăugarea lui 1.21. Dacă am fi adoptat a doua interpretare, nu am fi putut spune decît că, după adăugarea inducției infinite, nu avem nici o — incompletitudine *demonstrabilă*, deoarece orice raționament general care demonstrează, să spunem, că toate enunțurile $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$, ... sînt demonstrabile ar produce totodată, conform inducției infinite, o demonstrație pentru „oricare ar fi m, $H(m)$".

În continuare, cercetăm problema dacă *ALG* este consistentă cu axiomele lui *G*. Într-un sens, răspunsul este imediat, întrucît modelul simplu pentru *G* și *G'* descris mai sus satisface și *ALG*, fiind deci și un model pentru *G**. Pe de altă parte, mai putem demonstra, nu atît de direct, consistența relativă a lui *G** față de *G* într-un sens mai riguros. Putem demonstra că *G** este traductibil în *G* și că, prin urmare, dacă am avea o contradicție oarecare în *G**, am putea determina efectiv o contradicție corespunzătoare în *G*. (Pentru o discuție generală a acestei noțiuni de traducere cf. Wang [14]).

Teorema 4. Sistemul G este traductibil în G.*

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că *L* — traducerile tuturor axiomelor lui *G** sînt demonstrabile în *G*. Conform cu 1.19 și 1.14, toate *L* — traducerile lui *M*1—*M*3 sînt demonstrabile în *G*. Așadar, singura problemă este să demonstrăm că *L* — traducerea lui *ALG* este și ea demonstrabilă în *G*.

Mai explicit, dacă *Nn* este predicatul de a fi număr natural, așa cum s-a definit în *G*, problema constă în a demonstra:

1.22. *L* — traducerea enunțului „pentru toți *x*, există o mulțime *y*, astfel încît *Nn*(*y*) și *x* este *E*(*y*)" este o teoremă în *G*.

Cu alte cuvinte, fie *Nn**(*y*) *L* — traducerea propoziției *Nn*(*y*) din *G* și fie $y = E^*(x)$ *L* — traducerea propoziției $y = E(x)$; atunci, problema este de a demonstra:

1.23. Pentru toți *x*, dacă *L*(*x*), atunci există o mulțime *y* astfel, încît *L*(*y*) și *Nn**(*y*) și $x = E^*(y)$.

Demonstrația acestei afirmații constă din patru pași:

(i) Pentru toți *y*, dacă *Nn*(*y*), atunci *L*(*y*).
(ii) Pentru toți *x*, dacă *Nn*(*x*), atunci *Nn**(*x*).
(iii) Pentru toți *x* și *m*, dacă *L*(*x*) și $x = E(m)$, atunci $x = E^*(m)$.
(iv) Pentru toți *x*, dacă *L*(*x*), atunci există un *y* astfel, încît *Nn*(*y*) și $x = E(y)$.

Prin urmare, din (iv) și (iii), pentru toți *x*, dacă *L*(*x*), atunci există un *y* astfel, încît *Nn*(*y*) și $x = E^*(y)$. Așadar, în virtutea lui (i) și (ii), avem 1.23. Prin urmare, fiind date (i) — (iv), 1.23, 1.22 și teorema 4 pot fi demonstrate.

Înainte de a schița demonstrațiile lui (i) — (iv), intercalăm o observație explicativă. Axioma *ALG* este de același gen ca axioma IV 2 a lui von Neumann [10] și ca enunțul $V = L$ al lui Gödel [5]. Demonstrația traductibilității lui *G** în *G* urmează și ea modelul demonstrațiilor acestora cu privire la consistența enunțurilor lor. Firește însă că enunțul și demonstrația noastră privesc un sistem mult mai elementar. Ca atare, considerentele la care recurgem sînt mult mai simple.

Demonstrațiile pentru (i) — (iv) pot fi efectuate în aceea manieră ca demonstrațiile de „completitudine" la Gödel [5].

Pentru demonstrarea pașilor (i) și (ii), trebuie să revedem mai întîi definiția predicatului *Nn* adoptată în *G*. Astfel, dacă utilizăm $y \neq y$ ca *H*(*y*) în *M*3, atunci putem să demonstrăm că există mulțimea vidă *e* astfel, încît nu există nici un *x* care să aparțină lui *e*. Această mulțime *e* este identificată cu numărul zero 0. Conform lui *M*2, pentru fiecare mulțime *x* există și mulțimea $x + \{x\}$ obținută din *x* prin adăugarea lui *x* însuși ca număr adițional.

Mulțimea $x + \{x\}$ este luată ca succesorul Sx al acestei mulțimi x. Principalul pas dificil este să găsim predicatul Nn care ar singulariza exact acele mulțimi care intră în șirul O, SO, SSO etc. (adică în șirul e, {e}, {e} + {e} etc.).

Predicatul Nn se definește astfel: pentru orice mulțime x, $Nn(x)$, dacă și numai dacă sînt satisfăcute toate cele patru condiții de mai jos: (1) x este tranzitiv sau, pentru orice y și z, dacă y aparține la z și z aparține la x, atunci y aparține la x; (2) pentru doi membri distincți oarecari y și z din x, sau y aparține la z sau z aparține la y; (3) dacă y este x sau un membru al lui x, atunci y este sau 0, sau succesorul Sz al unei mulțimi z; (4) Pentru fiecare submulțime nevidă y a lui x, lui y îi aparține o mulțime z care nu are nici un membru comun cu y.

Demonstrăm (i) prin inducție. Dacă y este 0, avem în mod evident: dacă $Nn(y)$, atunci $L(y)$. Să presupunem acum că pentru unii x, $Nn(x)$, avem ($L(x)$ și x este $E(k)$. Atunci, conform definiției succesorului, Sx este tocmai $E(k + 2^k)$ și deci $L(Sx)$. În consecință, (i) este demonstrat.

Demonstrația lui (iv) rezultă direct din 1.17.

Utilizînd predicatul Nn caracterizat mai sus, putem efectua demonstrația lui (ii) în G. Prin urmare, condițiile (1) și (2) sînt imediate, deoarece orice lucru adevărat cu privire la toate mulțimile este adevărat și cu privire la toate mulțimile limitate. L — traducerea condiției (3) poate fi, la rîndul său, demonstrată, întrucît, în baza definiției funcției succesor, z este limitată dacă Sz este limitată. L — traducerea condiției (4) este și ea valabilă deoarece putem demonstra prin inducție că dacă $L(y)$ și z aparțin lui y, atunci $L(z)$ și deci, pentru fiecare submulțime nevidă limitată y a lui x, membrul z al lui y care nu are nici un membru comun cu y este, la rîndul său, o mulțime limitată.

Omitem detaliile complicate, dar nu deosebit de dificile, ale demonstrației lui (iii). De exemplu, ar fi necesar să tratăm definițiile explicite ale lui $a(n)$ și $b(n)$ în G. Ne mărginim să observăm că pentru a demonstra că $x = E^*(m)$ sau că $E^*(x, m)$, vom utiliza în locul mulțimii funcționale y din definiția 1.4 mulțimea alcătuită din membrii z ai lui y astfel încît $L(z)$.

§ 2. TEORIA PREDICATIVĂ A MULȚIMILOR

Sistemele G, G'^1 și G^* considerate mai sus prezintă o caracteristică comună: în fiecare dintre ele se poate demonstra că există numai mulțimi finite (adică mulțimi cu un număr finit de membri) nici unul dintre aceste sisteme neincluzînd o axiomă care să asigure existența vreunei mulțimi infinite. Cu toate acestea, avem în genere o infinitate de mulțimi, iar în sistem există proprietăți exprimabile care sînt adevărate despre o infinitate de mulțimi. Aceste proprietăți definesc colecții infinite. De exemplu, proprietatea de a fi identic cu sine definește o colecție infinită de mulțimi. La fel definește o colecție infinită de mulțimi și predicatul Nn. Dacă introducem variabile care iau ca valori nu numai mulțimile din teoria generală a mulțimilor, ci și toate colecțiile (sau varietățile) definibile prin predicate ale sistemelor G, G' și G^*, obținem teoria predicativă a mulțimilor, care este mai mult sau mai puțin sistemul dezvoltat de către von Neumann și Bernays (vezi [9], [2], [3] —, mai puțin axioma infinitului.

În vederea unui examen mai amănunțit, considerăm mai întîi un sistem P' corespunzător lui G'. Acesta este tocmai sistemul lui Bernays (vezi [2], [3],) minus axioma infinitului din acest sistem. El conține, pe lîngă predicatul $\in$ și variabilele teoriei generale a mulțimilor, variabilele X, Y, ... care iau ca valori toate colecțiile definibile în G', precum și un predicat η între mulțimi și colecții de așa natură, încît $x\eta Y$, $y\eta Y$ etc. sînt combinații simbolice cu sens din P'. Sistemul mai conține calculul predicatelor cu identitate pentru ambele genuri de variabile.

Axiomele lui P' sînt cu aproximație axiomele lui G' plus cîteva axiome care specifică modalitățile de formare a colecțiilor. Le putem numerota ca $N1$—$N10$. $N1$, $N2$ și $N6$—$N8$ sînt exact aceleași ca $M1$, $M2$ și $M6$ — $M8$. $N3$—$N5$ corespund lui $M3$ — $M5$, însă sînt formulate întrucîtva altfel, dat fiind prezența variabilelor noi:

$N3$. Fiind dată o mulțime y și o colecție X, colecția tuturor mulțimilor care aparțin atît la y, cît și la X este și ea o mulțime.

$N4$. Fiind dată o colecție nevidă X, există o mulțime în X care nu are nici un membru comun cu X.

$N5$. Dacă X este o colecție de perechi ordonate $\langle x, y\rangle$, astfel încît nu există două perechi care să aibă un același prim membru sau un același al doilea membru și dacă colecția tuturor primilor membri este o mulțime, atunci colecția tuturor membrilor secunzi este și ea o mulțime.

$N9$ și $N10$ se referă la proprietăți generale ale colecțiilor. $N9$ este numai o axiomă subsidiară de extensionalitate pentru mulțimi care afirmă că, pentru toate colecțiile Y, dacă două mulțimi, x și y au aceiași membri și $x\eta Y$, atunci $y\eta Y$. $N10$ este mai complexă, dar revine la afirmația că fiecare predicat al lui G' definește o colecție în P':

$N10$. Dacă $H(x)$ este un predicat din P' care nu conține nici o variabilă mare legată (adică nu conține nici o expresie ca „pentru toți X“, „pentru unii Z“ ... ; sau care nu conține nici o referire la totalitatea tuturor colecțiilor), atunci există o colecție Y care conține toate acele mulțimi x pentru care $H(x)$ și numai pe ele.

Un element important privitor la $N10$ de care vom face uz este reductibilitatea acestei axiome la cîteva cazuri specifice. Putem deriva în P', folosind în fapt numai $N1$—$N3$ și $N9$, axioma $N10$ din următoarele cazuri speciale ale ei (cf. Bernays [2] și Gödel [5]):

N 10.1. Fiecare mulțime este o colecție.

N 10.2. Există o colecție X a tuturor perechilor ordonate $\langle x, y\rangle$, astfel încît x aparține lui y.

N 10.3. Fiind date două colecții X și Z, există o colecție Y care conține toate acele mulțimi care aparțin atît lui X, cît și lui Z și numai pe ele (intersecția).

N 10.4. Fiind dată o colecție oarecare X, există o colecție Y care conține toate acele mulțimi care nu aparțin lui X și numai pe ele (complementara).

N 10.5. Fiind dată o colecție X de perechi ordonate $\langle x, y\rangle$ există o colecție Y, care conține toate acele mulțimi, astfel încît pentru unii x, $\langle x, y\rangle$ aparține lui X și numai pe ele.

N 10.6. Fiind dată o colecție X de mulțimi y, există o colecție Y care conține toate perechile ordonate $\langle x, y\rangle$, pentru care y aparține lui X și numai pe acelea.

N 10.7. Fiind dată o colecție X de triplete ordonate $\langle x, y, z\rangle$ (adică $\langle x, \langle y, z\rangle\rangle$), există o colecție Y a tuturor tripletelor $\langle y, z, x\rangle$ pentru care $\langle x, y, z\rangle$ aparține lui X și numai a lor.

N 10.8. Fiind dată o colecție X de triplete ordonate $\langle x, y, z\rangle$, există totodată o colecție Z a tuturor tripletelor ordonate $\langle y, x, z\rangle$ pentru care $\langle x, y, z\rangle$ aparține lui X și numai a lor.

Dintre aceste opt axiome, primele două exprimă, în mod necondiționat, existența anumitor colecții, în timp ce fiecare axiomă dintre cele rămase enunță faptul că, fiind dată o anumită colecție sau anumite colecții, există o altă colecție care stă față de colecția dată (față de colecțiile date), într-o relație bine definită și specifică. În plus, în nici una dintre condițiile de introducere a colecțiilor noi nu ne referim la totalitatea colecțiilor. În consecință, putem enumera cît se poate de ușor toate colecțiile a căror existență este cerută de către axiome, obținînd astfel un model numărabil foarte simplu pentru sistemul P'.

Pentru descrierea în termeni mai precizi a modelului, vom introduce predicate de numere naturale, care vor servi ca modele pentru predicatele $\in$ și η. Întrucît mulțimile lui P' sînt aceleași cu mulțimile teoriei generale a mulțimilor, modelul pentru $\in$ este tocmai predicatul aritmetic e* folosit mai sus. Modelul pentru η este un predicat η^*, care poate fi descris în modul următor.

Putem reprezenta colecțiile din P' prin următorul șir de triade de numere naturale: (0, 0, 0), (1, 0, 0), ... (7, 0, 0), (0, 0, 1), ... (7, 0, 1), (0, 1, 0), ..., (7, 1, 0), (0, 1, 1), și așa mai departe. Prin urmare, oricare ar fi m și n, triada $(0, m, n)$ reprezintă $E(m)$, sau mulțimea pusă în corespondență cu m prin enumerarea din 1.4. Pentru orice m și n, $(1, m, n)$ reprezintă colecția de perechi ordonate cerută de *N* 10. 2. Pentru orice m și n, $(2, m, n)$ reprezintă colecția care este intersecția (cf. *N* 10.3) a celor două colecții reprezentate prin a m-a și a n-a triadă din șirul de mai sus. Similar, oricare ar fi m și n, $(3, m, n)$, reprezintă complementarea colecției reprezentate de a m-a triadă. Și așa mai departe. (Compară cu Gödel [5] și Wang [13].) Atunci, predicatul η^* este în genere: $m\eta^*n$, dacă și numai dacă mulțimea reprezentată de m (adică, mulțimea $E(m)$ aparține colecției reprezentate de a n-a triadă).

După cum știm, funcțiile recursive sau calculabile obișnuite pot fi definite toate în mod explicit în cadrul sistemului Z de teoria numerelor. În particular, sînt definibile următoarele funcții simple de numere naturale. (Vezi Hilbert — Bernays [7], § 7.) Putem enumera toate diadele (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (0, 3), ... definind:

2.1. O funcție $\sigma(m, n)$ astfel încît $\sigma(m, n)$ este k, dacă și numai dacă diada (m, n) este a k-a ($k = 0, 1, 2, ...$) în cadrul șirului.

2.2. Două funcții $\sigma_1(k)$ și $\sigma_2(k)$ astfel încît $(\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ este a k-a diadă. Alte funcții definibile de care vom face uz sînt:

2.3. Funcția $\beta(n)$ care ia valorile 1 și 0, după cum n este 0 sau nu.

2.4. Funcția $\alpha(m, n)$ care ia valorile 0 și 1, după cum $m = n$ sau nu.

2.5. Funcția $m \dot{-} n$, care este 0 cînd $m < n$ și este $m - n$ în caz contrar.

2.6. Funcția $\rho(m, n)$ care să restul împărțirii lui m prin n.

2.7. Funcția, $\pi(m, n)$ care dă cîtul împărțirii lui m prin n.

2.8. Dacă (m, n, k) este a j-a triadă în enumerarea de mai sus, atunci $\tau(m, n, k) = j$; $\tau(m, n, k) = 8\sigma(n, k) + \rho(m, 8)$. Dacă $m > 7$, identificăm (m, n, k) cu $(\rho(m, 8), n, k)$.

2.9. Dacă $\tau(m, n, k) = j$, atunci $\tau_1(j) = m$, $\tau_2(j) = n$, $\tau_3(j) = k$: $\tau_1(j) = \rho(j, 8)$; $\tau_2(j) = \sigma_1(\pi(j, 8))$; $\tau_3(j) = \sigma_2(\pi(j, 8))$.

2.10. Dacă $E(m)$ este x și $E(n)$ este y, atunci $E(\gamma(m, n))$ este $\langle x, y\rangle$: $\gamma(m, n,) = 2^{(2^m)} + (\alpha(m, n) \cdot 2^{(2^m+2^n)})$. $\gamma(m, n, k) = \gamma(m, \gamma(n, k))$.

2.11. Dy(m), dacă și numai dacă $E(m)$ este o pereche ordonată (adică există un n și un k, astfel încît $m = \gamma(n, k)$). Tri(m), dacă și numai dacă există j, n, k, astfel încît $m = \gamma(j, n, k)$.

2.12. Atunci cînd k este pozitiv $\mu(k)$ este cel mai mare număr j, astfel încît k este divizibil prin 2 și $\mu(0) = 0$.

2.13. Dacă $E(m)$, $E(n)$, $E(k)$ sînt respectiv x, y, z și z este $\langle x, y\rangle$, atunci $\gamma_1(k)$ este m, $\gamma_2(k)$ este n(k fiind $2^{(2^m)}$, cînd $m = n$ și $2^{(2^m)}(1+2^{(2^n)})$ în caz contrar):

$$\gamma_1(k) = \mu(\mu(k)).$$

$$\gamma_2(k) = \mu(\mu(\pi(k, 2^{(2^{\gamma_1(k)})}) \dot{-} 1)) + (\gamma_1(k) \cdot \beta(k \dot{-} 2^{(2^{\gamma_1(k)})})).$$

2.14. Dacă $E(k)$ este $\langle x, y, z\rangle$, atunci $E(K_1(k))$ este $\langle y, z, x\rangle$ și $E(K_2(k))$ este $\langle y, x, z\rangle$:

$$K_1(k) = \gamma(\gamma_1(\gamma_2(k)), \gamma_2(\gamma_2(k)), \gamma_1(k)).$$

$$K_2(k) = \gamma(\gamma_1(\gamma_2(k)), \gamma_1(k), \gamma_2(\gamma_2(k))).$$

2.15. $Cr(m)$, dacă și numai dacă $E(m)$ este o pereche $\langle x, y\rangle$ astfel, încît x aparține lui y; cu alte cuvinte, $Cr(m)$, dacă și numai dacă există un n și un k astfel încît $m = \gamma(n, k)$ și $n \in {}^*k$.

Cu aceste predicate și funcții putem descrie, în sfîrșit, în mod mai exact, predicatul $m\eta^* n$ sau $\eta^*(m, n)$.

2.16. $\eta^*(m, n)$, dacă și numai dacă este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

(1) $\tau_1(n) = 0$ și $m \in {}^* \tau_2(n)$;
(2) $\tau_1(n) = 1$ și $Cr(m)$;
(3) $\tau_1(n) = 2$, $\eta^*(m, \tau_2(n))$ și $\eta^*(m, \tau_3(n))$;
(4) $\tau_1(n) = 3$, nu este cazul ca $\eta^*(m, \tau_2(n))$;
(5) $\tau_1(n) = 5$, Dy(m) și $\eta^*(\gamma_2(m), \tau_2(n))$;
(6) $\tau_1(n) = 6$, Tri (m) și $\eta^*(K_1(m), \tau_2(n))$;
(7) $\tau_1(n) = 7$, Tri (m) și η^* $(K_2(m), \tau_2(n))$;
(8) $\tau_1(n) = 4$ și există un număr k, astfel încît η^* $(\gamma(k, m), \tau_2(n))$.

Ne putem convinge singuri că dacă nu ar fi alternativa (8), am putea decide efectiv pentru orice m și n dați, dacă $\eta^*(m, n)$ sau nu. Condiția (8) are un caracter neefectiv, deoarece în acest caz, spre a decide efectiv dacă $\eta^*(m, n)$

sau nu, ar trebui să îndeplinim mai întîi sarcina imposibilă de verificare pentru o infinitate de numere k, dacă $\eta^*(\gamma(k, m), \tau_2(n))$. Prin urmare, pare rezonabil să presupunem că η^* nu este predicat recursiv (sau efectiv calculabil). În fapt, vom demonstra imediat că η^* nu poate fi recursiv.

2.17. Să numim a η^*-a traducere a unui enunț p a lui P' rezultatul obținut prin substituirea în p a predicatelor $m \in^* n$ și $m\eta^* n^*$ (unde n^* este cel mai mic k, astfel încît oricare ar fi j, $j^*\eta^* n$, dacă și numai dacă $j\eta^* k$) respectiv pentru $x \in y$ și $x\eta Y$.

Observăm că dacă extindem sistemul Z de teoria numerelor, prin adăugarea lui η^* la predicat primitiv nou și a lui 2.16. ca axiomă nouă, atunci η^* — traducerile tuturor teoremelor din T' sînt demonstrabile în sistemul obținut.

TEOREMA 5. η^* — traducerile tuturor teoremelor lui P' sînt demonstrabile în sistemul obținut din Z prin adăugarea lui η^* și 2.16.

Demonstrație. Așa cum am remarcat mai sus, se știe că G' este traductibil în teoria numerelor, dacă înlocuim $x \in y$ prin $m \in^* n$. În consecință, traducerile axiomelor $N1$, $N2$ și $N6 - N8$, care conțin numai simboluri ale lui G', sînt demonstrabile în Z și deci sînt demonstrabile și în sistemul mai bogat.

Traducerile lui $N3-N5$ pot fi demonstrate prin inducție, întrucît prin adăugarea lui η^* ca primitivă nouă permitem totodată aplicarea inducției asupra propozițiilor care îl conțin pe η^*. De exemplu, traducerea lui $N3$ este:

$N3^*$. Pentru orice j și m, există un n astfel, încît pentru toți k, $k \in^* n$, dacă și numai dacă $k \in^* j$ și $k\ \eta^* m^*$.

Pentru demonstrarea lui $N3^*$, facem inducție asupra lui j. Dacă j este 0, n este 0, indiferent de m. Să presupunem că $N3$ este adevărată pentru toți $j < i$. În particular, $N3$ este adevărată pentru $j = a(i)$. Fie dat un m arbitrar. Să presupunem că valoarea lui n pentru $a(i)$ este n_1. Sau $b(i)\ \eta^* m^*$ sau nu. Dacă $b(i)\eta^* m^*$, atunci $N3$ este adevărată, dacă luăm $n_1 + 2^{b(i)}$ ca n; în caz contrar, $N3^*$ este adevărată, dacă luăm n_1 ca n.

Traducerea lui $N9$ poate fi demonstrată pe baza definiției lui j^*, care este cel mai mic k, astfel încît pentru orice m, $m\eta^* j$, dacă și numai dacă $m\eta^* k$.

Traducerile lui $N10.1 - N10.8$. rezultă imediat din 2.16.

Așadar, teorema 5 este demonstrată.

Ne întoarcem acum la problema dacă η^* este recursiv:

TEOREMA 6. Predicatul η^* nu este recursiv.

Demonstrație. Știm că sistemul Z al teoriei numerelor este traductibil în G. Prin urmare, fiind dat un enunț p din Z, avem un enunț corespunzător p' din P', care nu conține nici o variabilă mare (adică nu conține nici una dintre variabilele X, Y,..., luînd ca valori colecții în general) astfel încît p și p' sînt sau ambele adevărate sau ambele false. Putem admite fără pierdere de generalitate că p' este sau de formă „există unii y, $H(y)$" sau de forma „pentru orice y, $F(y)$", unde $H(y)$ și $F(y)$ nu conțin nici ele variabile mari. Derivarea lui $N10$ din $N10.1 - N.10.8$. (vezi Bernays [2], p. 72, sau Gödel [5], p. 8) și reprezentarea noastră a colecțiilor prin numere naturale ne permit să constatăm că, pentru orice $H(y)$ și $F(y)$ date, putem găsi în mod efectiv numere definite m_1 și n_1, astfel încît colecția perechilor ordonate $\langle x, y\rangle$ care satisfac „$H(y)$ și $x = x$" este reprezentată de a m_1 — a

triadă, și colecția de perechi ordonate $<x, y>$ care satisfac „F(y) și $x = x$" este reprezentată de a n_1-a triadă. Rezultă atunci că putem găsi efectiv și două numere definite m_2 și n_2, astfel încît colecția mulțimilor x care satisfac „pentru unii y, $H(y)$ și $x = x$" este reprezentată de a m_2-a triadă, și colecția de mulțimi x care satisfac „pentru toți y, $F(y)$ și $x = x$" este reprezentată de a n_2-a triadă. Așadar, mulțimea vidă e, de exemplu, aparține la a m_2-a colecție a lui P', dacă și numai dacă, pentru unii y, $H(y)$ și $e = e$. În consecință, e aparține la a m_2-a colecție dacă și numai dacă, pentru unii y, $H(y)$. În mod similar, e aparține la a n_2-a colecție, dacă și numai dacă pentru toți y, $F(y)$.

Prin urmare, în orice caz, fiind dat un enunț arbitrar p din Z, deci și traducerea lui p', putem găsi un numeral definit k_1, astfel încît e aparține la a k_1-a colecție, dacă și numai dacă p'. Cu alte cuvinte, întrucît e este $E(0)$, $0\eta^* k_1$, dacă și numai dacă p'. În consecință, pentru orice enunț p din Z, putem găsi efectiv un număr natural corespunzător n, astfel încît p este adevărat, dacă și numai dacă $0\eta^* n$ este adevărat.

Dacă însă η^* ar fi recursiv, am avea un mod efectiv de a decide pentru orice n dat, dacă $0\eta^* n$ este valabil sau nu. Prin urmare, am dispune de o metodă de decizie care să ne spună dacă un enunț din Z dat în mod arbitrar este adevărat sau fals. Atunci luînd ca axiome toate enunțurile adevărate din Z, am avea un sistem formal complet, contrar celebrei teoreme a lui Gödel cu privire la incompletitudinea teoriei numerelor. Prin urmare, η^* nu poate fi un predicat recursiv.

În consecință, teorema 6 este demonstrată [7].

O problemă deschisă este următoarea: putem oare găsi în Z un predicat $K(m, n)$, astfel încît substituind K pentru η^* în 2.16., rezultatul să devină o teoremă în Z? Dacă putem, atunci rezultă din teorema 5 că P' este traductibil în Z. Ținînd seama de similaritatea dintre 2.16 și propozițiile care definesc predicate ce nu pot fi obținute în Z (Cf. Hilbert Bernays [8], p. 339), pare natural să credem că nu putem găsi nici un asemenea predicat K pentru η^* în Z. Totuși nu cunoaștem nici un mod de demonstrare a acestei aserțiuni.

Așa cum am observat, sistemul P' corespunde lui G'. Sistemul P care corespunde lui G nu conține $N4$—$N8$, ci conține numai $N1$—$N3$ și $N9$—$N10$. Putem demonstra că, în mai multe privințe, P ne dă tot atît de mult ca P'. Desigur, orice model pentru P' este totodată un model pentru P.

Într-un anumit sens mai slab, putem obține η^* în P. Prin urmare, putem găsi în P un predicat $K(m, n)$, astfel încît, deși rezultatul substituirii lui K pentru η^* în 2.16., nu este el însuși demonstrabil în P, toate cazurile particulare $K(m, 0)$, $K(m, 1)$, $K(m, 2)$ etc. sînt demonstrabile în P. În genere, pentru un m arbitrar, putem defini în P o colecție care conține toate perechile ordonate și numai perechile ordonate (m, k), astfel încît $k \leqslant n$ și $\eta^*(m, k)$,

[7] Există următoarea demonstrație mai directă a teoremei G. Dacă $P(x)$ este un predicat aritmetic oarecare, atunci un număr t al unei triade poate fi efectiv determinat astfel încît, pentru orice număr m, avem $m\eta^* t$, dacă și numai dacă $P(E(m))$. În consecință, dacă η^* ar fi recursiv, am putea decide efectiv, pentru fiecare număr k, (pentru care m poate fi într-adevăr efectiv determinat, astfel încît $k = E(m)$ dacă $P(k)$ este valabil. Prin urmare, fiecare predicat aritmetic ar fi recursiv, ceea ce conform binecunoscutelor rezultate ale lui Kleene, nu poate fi cazul.

Păstrez demonstrația de mai sus, deoarece ea ar putea fi considerată ca fiind mai elementară, întrucît nu depinde de rezultatul lui Kleene.

și atunci spunem că $K(m, n)$, dacă și numai dacă $\langle m, n\rangle$ aparține la a n-a colecție de acest fel[8].

În discutarea teoriei generale a mulțimilor am considerat un predicat aritmetic $\in^*$ și un predicat E, care oferă o enumerare a mulțimilor modelului. Relativ la teoria predicativă a mulțimilor, predicatul η^* corespunde lui $\in^*$. Trecem acum la introducerea unui predicat R, care corespunde lui E și oferă o enumerare a tuturor colecțiilor reprezentate prin triplete de numere naturale din paragraful precedent.

Definiția predicatului $R(X, m)$ este întrucîtva similară definiției 1.4 pentru $E(x, m)$. În principiu, pentru orice X și m, $R(X, m)$, dacă și numai dacă X este a m-a colecție din P' (adică dacă X este reprezentat prin al m-lea triplet de numere naturale descris mai sus). În vederea definirii lui R, definim mai întîi un predicat $F(\langle x, n\rangle)$ astfel încît $F(\langle x, n\rangle)$ atunci și numai atunci cînd X aparține la a n-a colecție. Mai exact, definițiile pentru F și R sînt după cum urmează (compară Wang [13], p. 481)[9]:

2.18. Fie $H(n, Y)$ formula care reprezintă: Y este o relație și domeniul lui Y este conținut în Sn (adică $\langle x, m\rangle$ aparține lui Y numai dacă $m \leqslant n$) și pentru toți $k \leqslant n$ și pentru toți x, $\langle x, k\rangle\ \eta Y$ dacă și numai dacă este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

(1) $\tau_1(k) = 0$ și $x \in E(\tau_2(k))$;
(2) $\tau_1(k) = 1$ și x este o pereche $\langle y, z\rangle$ astfel încît $y \in z$;
(3) $\tau_1(k) = 2$ și $\langle x, \tau_2(k)\rangle\ \eta Y$ și $\langle x, \tau_3(k)\rangle\ \eta Y$;

(4) $\tau_1(k) = 3$ și $\langle x, \tau_2(k)\rangle$ nu aparține lui Y;
(5) $\tau_1(k) = 4$ și există un y, astfel încît $\langle\langle y, x\rangle, \tau_2(k)\rangle\ \eta Y$;
(6) $\tau_1(k) = 5$ și x este o pereche $\langle y, z\rangle$ și $\langle z, \tau_2(k)\rangle\ \eta Y$,
(7) $\tau_1(k) = 6$ și x este un triplet $\langle y, z, w\rangle$ și $\langle\langle z, w, y\rangle, \tau_2(k)\rangle\ \eta Y$;
(8) $\tau_1(k) = 7$ și x este un triplet $\langle y, z, w\rangle$ și $\langle\langle z, y, w\rangle, \tau_2(k)\rangle\ \eta Y$.

2.19. $F(\langle x, n\rangle)$ dacă și numai dacă $\langle x, n\rangle$ aparține unei colecții B astfel încît $H(n, B)$.

2.20. $R(X, m)$, dacă și numai dacă X este colecția tuturor mulțimilor x și numai a mulțimilor x, astfel încît $F(\langle x, m\rangle)$.

Folosind aceste definiții, putem demonstra:

2.21. Pentru orice constantă n, putem demonstra în P că pentru orice X și Y, dacă $R(X, n)$ și $R(Y, n)$, atunci $X = Y$.

2.22. Pentru orice constantă n, putem demonstra în P că există o colecție R astfel încît $R(X, n)$.

Să scriem ori de cîte ori aceasta convine, $X = R(m)$ în locul lui $R(X, m)$.

[8] Omitem detaliile definiției lui k și demonstrațiilor cazurilor pentru $K(n, 0)$, $K(n, 1)$ etc., din următoarele motive: (1) detaliile unor definiții și demonstrații similare sînt tratate la Wang [15] în cazul general; (2) cazul lui R pe care îl vom considera imediat este de asemenea similar, deși oarecum mai complex.

[9] Trebuie observat că definiția care urmează combină de fapt două lucruri diferite: (1) traducerea condițiilor din 2.16. privitor la relația η^* în condiții privitor la o colecție de perechi; (2) demonstrația prin metoda Dedekind a existenței unei colecții de perechi care satisfac acele condiții.

Pentru orice număr dat n, putem demonstra, de asemenea, că $R(n)$ are proprietățile dorite. De exemplu, dacă $\tau_1(n) = 0$, putem demonstra în P că, oricare ar fi x, $x\eta\ R(n)$, dacă și numai dacă $x \in E(\tau_2(n))$; dacă $\tau_1(n) = 3$, se poate demonstra în P că pentru orice x, $x\eta\ R(n)$, dacă și numai dacă x nu aparține la $R(\tau_2(n))$; și așa mai departe.

În plus, compararea lui 2.16 cu 2.18—2.20 ne va convinge că următorul enunț poate fi demonstrat și el cu ajutorul teoremei 2.

2.23. Pentru orice n dat ($n = 0,1, 2,...$), putem demonstra în T că, oricare ar fi m, $E(m)\eta R(n)$, dacă și numai dacă $m\eta^* n^*$.

Ar trebui subliniat că, deși putem demonstra în P cu privire la R și η^* majoritatea rezultatelor dorite pentru fiecare dintre numerele constante 0, 1, 2,...; nu există nici o modalitate evidentă de a demonstra în P rezultatele generale „pentru orice m, --m--“ în aceste cazuri (ca 2.21—2.23). Lucrul cel mai firesc ar fi să facem o inducție matematică. Totuși, în această ordine de idei, aceasta nu este posibil în P (și nici măcar în P'), deoarece axiomele lui P și P' nu ne asigură decît existența unor colecții definite din propoziții care nu conțin variabile mari legate (adică colecțiile predicative definite fără referire la totalități care se conțin pe ele înseși ca element) și prin urmare, în P și P' nu putem face inducție decît asupra unor atare colecții și asupra propozițiilor lor definitorii. Întrucît atunci cînd definim η^* și R în P folosim variabile mari legate (de exemplu, expresia „o colecție B“ în 2.19), nu avem în P și P' nici o modalitate de a face inducție asupra propozițiilor care conțin predicatele $\eta^*(m, n)$ și $R(X, n)$. Pentru a demonstra însă, de exemplu, 2.16 și teoremele generale corespunzătoare lui 2.21—2.23. ar trebui să facem inducție asupra propozițiilor care conțin aceste predicate.

În paragraful următor vom discuta moduri de extindere a sistemului P, astfel încît teoremele generale să devină derivabile.

§ 3. COLECȚII IMPREDICATIVE ȘI ω — CONSISTENȚA

După cum știm, se spune că un sistem S este ω — consistent, dacă pentru fiecare predicat $H(m)$ al lui S, „pentru unii m, nu este cazul că $H(m)$'' este o teoremă a lui S, numai dacă unele din enunțurile $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$,... nu sînt teoreme ale lui S. În consecință, dacă un sistem S este ω — consistent, atunci este consistent și sistemul S' obținut din S prin adăugarea la teoremele lui S a următoarei reguli de inducție infinită.

3.1. Pentru fiecare predicat $H(m)$ al sistemului S, dacă $H(0)$, $H(1)$,... sînt teoreme ale lui S, atunci „pentru toți m, $H(m)$“ este o teoremă a lui S'.

Fie W sistemul obținut din p prin adăugarea lui 3.1 (înlocuind S și S' prin P și W) ca o nouă regulă de inferență. Atunci putem deriva în W atît 2.16, cît și, din 2.21—2.23, următoarele teoreme:

3.2. Pentru toți X, Y și n, dacă $R(X, n)$ și $R(Y, n)$, atunci $X = Y$.

3.3. Pentru fiecare n există o colecție X cu $R(X, n)$.

3.4. Pentru toți m și n, $E(m)\eta R(n)$, dacă și numai dacă $m\eta^* n^*$.

În acest mod am găsit o extindere a lui P, în care teoremele generale căutate devin demonstrabile. În plus, consistența lui W decurge din ω—consistența lui P. Dar W este nesatisfăcător într-o anumită privință: regula 3.1 cuprinde o infinitate de premise și nu poate fi considerată ca parte a unui sistem formal sau logistic obișnuit.

Un mod mai uzitat de extindere a sistemului P constă în introducerea colecțiilor impredicative. Astfel, fie Q sistemul obținut din P prin înlocuirea lui $N10$ prin axioma mai puternică:

$N10'$. Dacă $H(x)$ este un predicat *oarecare* al lui P, atunci există o colecție Y, care conține toate mulțimile x pentru care $H(x)$ și numai pe ele.

Cu alte cuvinte, Q folosește aceleași simboluri și notații ca cele ale lui P și P', dar conține ca axiome $N1$—$N3$, $N9$ și $N10'$. Putem dezvolta teoria numerelor în Q în același mod ca în P și P', dar, ținînd seama de $N10'$, nu ne este permis să facem inducție asupra tuturor propozițiilor acestor sisteme.

În particular, formulînd în mod adecvat demonstrațiile lui 2.21—2.23 și cazurile speciale ale lui 2.16, teoremele 3.2—3.4 și 2.16 pot fi demonstrate în Q prin inducție.

Comparînd W și Q ca două modalități alternative de extindere a lui P, în scopul obținerii lui 2.16 și 3.2—3.4, găsim următorul fenomen interesant: în timp ce Q este un sistem mai formal și deci mai pur într-un anumit sens, el prezintă mai puțină încredere decît W, deoarece nu știm nimic despre consistența lui Q, însă știm că W este consistent, întrucît putem demonstra ω—consistența lui P făcînd uz de un model intuitiv adecvat ales [10].

Acest exemplu ne permite să sperăm că alte moduri de raționament care, deși sînt impure din punct de vedere formalist sînt mai transparente din punct de vedere intuitiv, pot servi în vederea tuturor scopurilor la care servesc în matematică clasele impredicative. De exemplu, s-ar putea să fie posibilă demonstrarea multor alte teoreme din Q care nu pot fi obținute în P, în cadrul sistemului W', ale cărui teoreme includ toate teoremele lui P, precum și acelea deductibile prin regula mai puternică:

3.5. Pentru fiecare $H(m)$ din P, dacă $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$,... sînt teoreme ale lui W', atunci „pentru toți m, $H(m)$“ este de asemenea o teoremă a lui W'.

Sistemul W', obținut în acest fel, conține mult mai multe teoreme decît W, însă putem constata că și el este consistent, dacă folosim un model intuitiv adecvat pentru sistemul P.

Atît în ceea ce privește presupunerile.

Trecem acum la conexiunile dintre P și Q și la problema extinderii lui P spre a obține un sistem categoric relativ la teoria numerelor.

Să considerăm acum următoarele două axiome de limitare [11]:

ALG. Pentru toți x, există un m, $x = E(m)$.

ALP. Pentru toți X, există un n, $X = R(n)$.

Prin considerente similare celor de care am făcut uz în cadrul demonstrațiilor lui 1.15 și 1.23, putem demonstra că *ALG* este independentă de axiomele lui P și P' și totodată compatibilă cu aceste axiome.

[10] Nu înțeleg prin aceasta un model constructiv (intuiționist).

[11] Notăm că în P și P' putem defini o colecție E de perechi ordonate $\langle x, n\rangle$ astfel încît $\langle x, n\rangle \eta E$, dacă și numai dacă $E(x,n)$ conform cu 1.4. Cu toate acestea, nu vom sublinia distincția dintre colecția E și predicatul corespunzător $E(x, n)$.

Folosind colecții impredicative, putem demonstra:

3.6. Dacă Q este consistent, atunci ALP este independentă de axiomele lui P.

Demonstrație. Putem demonstra, pe baza axiomei $N10'$, existența în Q a unei colecții C, astfel încît, pentru toate numerele naturale n, $n\eta C$, dacă și numai dacă n nu aparține la $R(n)$. Dacă pentru unii n, $C = R(m)$, am avea: $m\eta R(m)$, dacă și numai dacă m nu aparține la $R(m)$. Așadar, nu există nici un m, astfel încît $C = R(m)$. Așadar, negația lui ALP este demonstrabilă în Q. În consecință, dacă Q este consistent, atunci negația lui ALP este consistentă cu axiomele lui P. În consecință, 3.6 este demonstrat.

În mod similar, putem demonstra și că dacă Q plus celelalte axiome ale lui P' este consistent, atunci ALP este independentă de axiomele lui P'.

Fie P^* sistemul obținut din P prin adăugarea lui ALG și ALP ca axiome suplimentare.

3.7. Să convenim: $L(X)$ sau X este limitată, dacă și numai dacă există un număr natural m, astfel încît X este $R(m)$.

3.8. Fie R—traducerea unui enunț arbitrar al lui P și Q, rezultatul obținut prin restrîngerea domeniului variabilelor mici la mulțimile limitate și prin restrîngerea domeniului variabilelor mari la colecțiile limitate. (Vezi și 1.18)[12].

Prin considerații similare celor din demonstrația lui 1.19, putem demonstra:

3.9. Se poate demonstra în P și Q: R—traducerea unui enunț al lui P și Q este adevărată dacă și numai dacă rezultatul provenit din ea prin substituirea predicatului $E(m) \in E(n)$ în locul lui $x \in y$ și a predicatului $E(k)\eta R(j)$ în locul lui $z\eta y$ este adevărat.

În consecință, dat fiind că putem demonstra 3.4 și teorema 1 în Q, putem demonstra și:

3.10 R—traducerea unui enunț al lui P și Q este o teoremă a lui Q dacă și numai dacă η^*—traducerea sa este și ca teoremă a lui Q.

Prin urmare, întrucît 2.16 este demonstrabilă în Q pentru un predicat corespunzător, avem, conform teoremei 5:

3.11. η^*—traducerile și R—traducerile tuturor teoremelor lui P' sînt teoreme ale lui Q.

În continuare, vrem să demonstrăm:

Teorema 7. Sistemul obținut din P^* prin adăugarea celorlalte axiome ale lui P' este traductibil în Q.

Spre a simplifica oarecum considerațiile noastre, împărțim demonstrația în două părți.

[12] Expresia „enunțul lui P și Q", folosită aici și oriunde, este stîngace, deoarece enunțurile din P și Q sînt aceleași. Expresia poate fi înțeleasă ca însemnînd „enunț al lui P" sau „enunț al lui Q", după cum se potrivește mai bine în contextul respectiv. L—traducerea unui enunț al lui P și Q diferă de R—traducerea sa prin faptul că într-o L—traducere, variabilele mari nu sînt restrînse la colecțiile limitate. Vezi și nota următoare.

3.12. L—traducerile (cf. 1—18) [13] tuturor teoremelor sistemului Q' obținut din Q prin adăugarea lui ALG ca axiomă nouă, sînt teoreme în Q.

Demonstrație. Pe baza considerentelor din demonstrația teoremelor 4, L—traducerile lui $N1$—$N3$ și ALG sînt demonstrabile în Q. În plus, L—traducerile lui $N9$ și $N10'$ sînt, de asemenea, teoreme ale lui Q, deoarece L — traducerea unui predicat al lui Q este de asemenea un predicat al lui Q și tot ce este adevărat pentru toate mulțimile este adevărat și pentru toate mulțimile limitate. Pentru $N9$ va trebui să folosim și faptul că membrii oricărei mulțimi limitate sînt, la rîndul lor, mulțimi limitate. Așadar, 3.12 este demonstrată.

Teorema 7 rezultă din 3.12 și din următoarea aserțiune:

3.13. R—traducerile tuturor teoremelor lui P^* plus P' sînt demonstrabile în Q'.

Demonstrație. Conform 3.11, R—traducerile tuturor teoremelor lui P' sînt teoreme ale lui Q'. Totodată, R—traducerea lui ALG este demonstrabilă în Q' prin considerente similare celor întrebuințate în cadrul demonstrației lui 1.23. Așadar, pentru demonstrarea afirmației 3.13, trebuie să demonstrăm numai că R—traducerea lui ALP este demonstrabilă în Q'.

Cu alte cuvinte, dacă R—traducerile lui $Nn(y)$ și $R(X, m)$ sînt $Nn \# (y)$ și $R \# (X, m)$, atunci vrem să demonstrăm în Q':

3.14. Pentru fiecare X, dacă $L(X)$, atunci există o mulțime y, astfel încît $L(y)$, $Nn \# (y)$ și $R \# (X, y)$.

Demonstrație. Conform 2.19 și 2.20, $R(X, m)$ dacă și numai dacă: oricare ar fi x, $x \eta X$ atunci și numai atunci cînd există o colecție B, astfel încît $H(m,B)$ și $\langle x, m\rangle \eta B$. În conformitate cu 2.18, predicatul $H(m, B)$ nu conține nici o altă variabilă mare în afară de B. Așadar, raționînd ca în demonstrația lui 1.20, întrucît ALG este o axiomă a lui Q', pentru toți m și B, $H(m, B)$ este echivalent cu L—traducerea sa $H \# (m, B)$. Dintr-un motiv similar, $Nn(y)$ dacă și numai dacă $Nn \# (y)$. Așadar, utilizînd și (i) din demonstrația lui 1.24, trebuie să demonstrăm doar: Pentru fiecare X, dacă $L(X)$, atunci există un m astfel încît pentru toate mulțimile limitate x, x aparține la X, dacă și numai dacă există o colecție B, astfel încît $L(B)$, $H(m, B)$ și $\langle x, m\rangle \eta B$. Așadar, exprimînd în formă dezvoltată $L(X)$ conform cu 2.19, 2.20 și 3.7, vedem că tot ce avem de demonstrat este: (1) Pentru toți m și B, dacă $H(m, B)$, atunci $L(B)$.

Pentru demonstrarea acestui lucru, facem inducție asupra lui m. Conform 2.18, $H(0, A_0)$ dacă și numai dacă A_0 este colecția vidă e. Evident, putem găsi un număr natural definit m_0 astfel încît $R(e, m_0)$. Să admitem că (1) este adevărat, atunci cînd $m = j$. Mai concret, să admitem că A_j este colecția pentru care $H(j\ A_j)$, și că m_j este un număr pentru care $R(A_j, m_j)$. Atunci putem defini A_{sj} în termeni de A_j: Pentru toți x și k, $\langle x, k\rangle \eta A_{sj}$, dacă și numai dacă $k \leqslant Sj$ și una dintre condițiile (1)—(8) în 2.18 (cu A_j înlocuind Y) este satisfăcută. Atunci putem demonstra imediat: $H(Sj, A_{sj})$. Totodată,

[13] Presupunem că în L—traducerea unui enunț care conține și variabile mari, aceste variabile rămîn neschimbate.

datorită felului în care A_{Sj} este definit în termeni de A_j, putem găsi o funcție aritmetică elementară f, astfel încît, oricare ar fi j, dacă A_j este $R(i)$, atunci A_{Sj} este $R(f(i))$. Așadar, prin inducție, (1) este demonstrat în Q'.

Aceasta completează demonstrația lui 3.14 și astfel și demonstrația lui 3.13 și a teoremei 7.

Din teorema 7 avem imediat:

3.15. Dacă Q este consistent, atunci sistemul obținut din P^* prin adăugarea celorlalte axiome ale lui P' este consistent.

3.16. Dacă Q este consistent, atunci $N\,10'$ este independentă de axiomele lui P și P'.

Demonstrație. Dacă $N10'$ ar fi demonstrabilă în P', am fi în măsură să demonstrăm în P' existența unei colecții C, astfel încît, pentru toți n, $n\eta C$ dacă și numai dacă n nu aparține la $R(n)$. Atunci, ALP ar fi infirmabilă în P' (confruntă demonstrația lui 3.6), contrar lui 3.15.

Notăm următoarea deosebire între P și Q în ce privește colecția Cantor a tuturor numerelor naturale n, astfel încît n nu aparține la $R(n)$. Conform teoremei lui Löwenheim — Skolem, dacă Q este consistent, el trebuie să posede un model numărabil și există colecția tuturor numerelor naturale n, astfel încît n nu aparține la a n-a colecție a modelului. Existența unei asemenea colecții nu poate fi demonstrată în Q. Întrucît se poate demonstra (conform $N10'$) existența fiecărei colecții de numere naturale care este definită printr-o proprietate exprimabilă în Q, proprietatea definitorie a colecției Cantor trebuie să fie inexprimabilă în Q. Colecția Cantor din 3.16 diferă prin faptul că este definită printr-o proprietate exprimabilă în cadrul sistemului însuși. Am putea spune că Q posedă un anumit gen de completitudine, pe care P și P' nu-l au.

Independența lui $N10'$ poate fi întrevăzută în alt mod. Prin metode cunoscute (cf., de exemplu, observații în Wang [15]), se poate formaliza în Q o demonstrație de consistență a lui G. Totodată, McNaughton a demonstrat recent[14] o teoremă generală, din care urmează că putem deduce în mod formal în Q consistența lui P din consistența lui G. În consecință, avem:

3.17. Putem formaliza în Q o demonstrație de consistență a lui P.

Așadar, conform teoremei lui Gödel despre demonstrațiile de consistență, Q trebuie să fie diferit de P. Întrucît $N10'$ este singurul principiu din Q care nu figurează încă în P, $N10'$ trebuie să fie independent de axiomele lui P.

Întrucît ALG și ALP oferă enumerarea tuturor mulțimilor și colecțiilor lui P^*, pare natural să întrebăm dacă P^* este categoric relativ la teoria numerelor (vezi și definiția 1 și teorema 3).

Să admitem că facem două presupuneri: (1) 3.4 este demonstrabilă în P^*; (2) predicatul η^* este definibil în sistemul Z al teoriei numerelor. Atunci putem demonstra prin raționamente strict analoge celor la care am recurs pentru a demonstra 1.19, 1.20 și teorema 3, că P^* este categoric relativ la teoria numerelor. Dar întrucît nu dispunem de nici o demonstrație pentru (1) sau (2), situația este mai complicată.

[14] Vezi Robert McNaughton, în „Jour. Symbolic Logic", **18**, 1953, pp. 136—144.

Să considerăm mai întîi (1). Așadar, cum am arătat mai sus, 3.4 este demonstrabilă în Q și aceeași demonstrație nu poate fi utilizată în P sau P^*, deoarece o anumită inducție nu poate fi efectuată. După cîte știm pînă acum, 3.4 poate fi independentă de axiomele lui P^*.

Presupunerea (2) este mai puternică decît (1). Dacă (2) este adevărată, atunci (1) este și ea adevărată, deoarece dificultatea privitoare la inducție nu ar mai exista. Așa cum am remarcat în continuarea teoremei 6, probabil că (2) nu este adevărată. În orice caz nu avem nici o demonstrație a faptului că (2) este adevărată. Dacă (2) nu este adevărată, η^* este în afara părții lui P^* care corespunde sistemului Z de teoria numerelor. Cu toate acestea, conform 2.23, în P^* sînt demonstrabile cazuri particulare ale lui 2.4. Așadar, dacă sau (1), sau (2) este falsă, avem, ca și la enunțurile indecidabile ale lui Gödel, un caz cînd „pentru toți $nH(n)$“ ($H(n)$ fiind „pentru toți m, $E(m)\eta R(n)$, dacă și numai dacă $m\eta^* n^*$“) nu este teoremă a lui P^*, deși toate enunțurile $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$, ..., pentru toate numerele 0, 1, 2, ..., sînt teoreme ale lui P^*. În consecință, dacă P^* este consistent, adăugînd ca axiomă la P^* negația lui „pentru orice n, $H(n)$“, obținem, iarăși, un sistem consistent, dar care este ω—inconsistent. În orice model pentru un atare sistem trebuie să existe un obiect care reprezintă un număr natural, dar nu corespunde nici unuia dintre numerele obișnuite. Ținînd seama de asemenea modele, devine greu de văzut dacă fiecare enunț al lui P^* are aceeași valoare de adevăr în cadrul a două modele ale lui P^*, care dau aceeași interpretare pentru noțiunile teoriei numerelor.

Pentru evitarea unor atare anomalii este suficient să ne restrîngem la modele ω—consistente pentru P^*:

3.18. Spunem că un model pentru un sistem arbitrar S este ω—consistent, dacă și numai dacă, pentru orice predicat $H(x)$ din S, ori de cîte ori acesta este adevărat pentru toate numerele obișnuite, enunțul „oricare ar fi m, $H(m)$“ este, de asemenea, adevărat [15].

În orice modele ω—consistente pentru P^*, 3.4 este desigur adevărat [16]. Dacă ne restrîngem la modele ω—consistente pentru P^*, putem demonstra prin raționamente similare celor uzitate în cursul demonstrației teoremei 3, că P^* este categoric relativ la teoria numerelor. Pe scurt, putem exprima această stare de lucruri prin următoarea teoremă:

Teorema 8. Sistemul P^* este categoric relativ la o teorie a numerelor ω—consistentă.

Problema dacă P^* este simplu categoric relativ la teoria numerelor rămîne deschisă.

Pe de o parte, conform teoremei 8, P^* posedă un anumit gen de categoricitate. Pe de altă parte, conform teoremei lui Gödel, dacă P^* este consistent, există anumite enunțuri ale teoriei numerelor, care sînt indecidabile în P^*. Este interesant să cercetăm, dacă în afară de aceste enunțuri mai există și

[15] În general, „oricare ar fi m, $H(m)$“ poate fi o prescurtare introdusă printr-o definiție contextuală.

[16] În treacăt fie spus, nu este greu de văzut că toate axiomele lui P' sînt adevărate în cadrul fiecărui model ω — consistent pentru P^*. În particular, adevărul lui $N4$ și $N5$ decurg din adevărul cazurilor lor speciale și din adevărul lui ALP.

enunțuri ale lui P^* privitoare la mulțimi și colecții în general, care sînt indecidabile în P^*.

Intuitiv vorbind, o colecție X există, conform cu P^*, dacă și numai dacă există un m, $X = R(m)$. Admițînd că totalitatea tuturor numerelor naturale este dată și fixată, totalitatea T a tuturor colecțiilor X astfel încît $L(X)$ (adică există un m, $X = R(m)$) este, de asemenea, fixată. În consecință, pe baza axiomelor lui P^*, existența oricărei colecții a mulțimilor limitate (adică a mulțimilor x, astfel încît pentru unii m, $x = E(m)$) este decisă complet, după cum aparține sau nu la totalitatea T de mai sus. Cu toate acestea, de aici nu rezultă că toate enunțurile privitoare la existența sau nonexistența colecțiilor sînt decidabile în P^*. Deși, oricare ar fi X, sau „X aparține la T“, sau „X nu aparține la T“ este adevărat, nu urmează că cel puțin unul dintre aceste două enunțuri ar fi demonstrabil în P^*.

Altfel spus: fie dată o colecție arbitrară X pentru care este valabil, de exemplu, $F(X)$. Putem demonstra sau infirma că „există un X, $F(X)$“ în P^*, *cu condiția* ca să putem decide în P^* dacă există sau nu un m, $X = R(m)$. Nu avem însă nici o garanție că, oricare ar fi X, putem decide în P^*, dacă există sau nu un m pentru care $X = R(m)$. De fapt, aplicînd teorema lui Gödel, putem demonstra că trebuie să existe cazuri pe care nu le putem decide.

Fie deci p un enunț cunoscut indecidabil al lui P^* (de exemplu, enunțul aritmetic $Con(P^*)$ care exprimă consistența lui P^*). Să considerăm următorul enunț de existență: (α) există o colecție X, astfel încît pentru toți n, $n\eta X$ dacă și numai dacă p este fals și n nu aparține la $R(n)$. Atunci putem demonstra echivalența lui (α) și p în P^*: Dacă p, atunci (α) este valabil dacă luăm colecția vidă drept X. Dacă p este fals, atunci este valabilă negația lui (α), deoarece putem demonstra în P^* că nu există nici o colecție X, astfel încît pentru toți n, $n\eta X$ dacă și numai dacă n nu aparține lui X (vezi și 3.16). Așadar, avem [17].

3.19. Enunțul de existență (α) este indecidabil în P^*.

Pe baza lui ALP, rezultă imediat:

3.20. Următorul enunț de existență este, de asemenea, indecidabil în P^*: Există un m astfel, încît colecția X definită prin (α) este $R(m)$.

Mai există și un alt gen de enunțuri indecidabile derivate în P^*. Pentru un predicat dat $H(x)$ din P^* care cu conține nici o variabilă mare, putem găsi un numeral determinat k, pentru care se poate demonstra că apartenența lui k la colecția mulțimilor care satisfac $H(x)$ este indecidabilă în P^*. Să operăm, așadar, în P^* o aritmetizare a sintaxei lui P^* și să definim în P^* predicatul aritmetic (β) „$s(x, x)$ nu este o teoremă a lui P^*“ (adică predicatul „rezultatul substituirii numeralului x pentru variabila „x“ în expresia lui P^* al cărei număr Gödel este x nu este o teoremă a lui P^*“ — cf. Hilbert-Bernays [8], §5. b)). Predicatul este de forma $H(x)$ și nu conține variabile mari. În consecință, conform $N10$, există o colecție Y a lui P^*, astfel încît, pentru toți x, $x\eta Y$ dacă și numai dacă $s(x, x)$ nu este o teoremă a lui P^*. Întrucît este

[17] Notăm că aceleași considerente se aplică și la G^*. De exemplu, dacă p este un enunț indecidabil dat, atunci enunțul „există o mulțime y astfel încît pentru toți x, $x \in y$, dacă și numai dacă p este fals și $x = x$“ este, de asemenea, indecidabil. După cîte știm, metoda generală de generare a unor enunțuri indecidabile echivalente în maniera de mai sus a fost introdusă, pentru prima dată, într-un alt context de idei, de către W. V. Quine (vezi „Jour. Symbolic Logic“, **6**, p. 140).

știut că „$s(m, m)$ nu este o teoremă a lui P *“, unde m este numărul Gödel al lui (β), este indecidabil în P * (Hilbert-Bernays, *op. cit.*), enunțul „m aparține colecției Y (descrisă înainte)“ este de asemenea indecidabil în P *:

3.21. Este indecidabil în P *, dacă mulțimea m, care este numărul Gödel al expresiei (β), aparține colecției Y din P *, alcătuită din toate mulțimile x care satisfac predicatul (β).

Bineînțeles, în 3.21 avem nevoie, ca de obicei, de ipoteza ω—consistenței lui P *. În mod similar, mai putem găsi un enunț indecidabil corespunzător celui al lui Rosser (Hilbert-Bernays, *op. cit.*, p. 275) utilizînd numai ipoteza consistenței lui P *.

Din aceste considerente reiese că în toate teoriile mulțimilor care nu sînt mai slabe decît P se pot obține enunțuri indecidabile de forma „o (anumită) mulțime (specială) aparține unei colecții (anumite speciale)“.

Înainte de a încheia acest paragraf [18] facem cîteva observații privitor la modele și numere naturale.

Strîns legate de modelele ω—consistente sînt modelele cu numere naturale regulate.

3.22. Spunem că un model al unui sistem S este model cu numere naturale regulate, dacă numerele naturale ale modelelor (adică obiectele care satisfac predicatul Nn de a fi un număr natural în sistem) sînt exact obiectele corespunzătoare numerelor 0, 1, 2 etc.

Este clar că orice model cu numere naturale regulate este totodată un model ω—consistent. Reciproca nu este însă adevărată. În adevăr, este posibil să putem dispune de un model ω — consistent, în care există un număr natural ce nu este desemnat de nici o denumire sau descripție (expresie cu articol hotărît) a sistemului [19]. Putem demonstra totuși o relație mai slabă:

3.23. Un model în care fiecare obiect este desemnat de un termen al sistemului dat este model cu numere naturale regulate dacă și numai dacă este ω — consistent.

Demonstrație. Să admitem că am avea un obiect desemnat prin t, care este un număr natural în model, dar este distinct de toate obiectele desemnate de către numerale. Atunci toate enunțurile „$0 \neq t$“, „$1 \neq t$“ etc. ar fi adevărate, însă „pentru toți m, $m \neq t$“ ar fi fals în cadrul modelului. În consecință, modelul ar fi ω — inconsistent.

În termeni de modele cu numere naturale regulate, putem exprima și domeniul de variabilitate al axiomelor *ALG* și *ALP* în felul următor.

3.24. Să admitem ca dat un șir de termeni standard, din G * și P *, unul pentru fiecare dintre toate mulțimile finite e, $\{e\}$, $\{\{e\}\}$, $\{e, \{e\}\}$ etc. Atunci, în fiecare model ω — consistent al lui G * sau P *, dacă „pentru unii x, $F(x)$“ este adevărat, atunci există un termen t din șirul de mai sus, astfel încît este adevărat enunțul „pentru unii x, $F(x)$ și $x = t$“.

[18] Multe dintre considerentele expuse în acest paragraf, precum și în cele anterioare se pot generaliza, aplicîndu-se la noi extinderi predicative ale lui P și P' sau la sisteme de teoria ramificată a tipurilor fără axioma reductibilității.

[19] Cu titlu de exemplu, vezi G. Kreisel, în „Math. Reviews“, **16**, 1955, p. 103.

3.25. Fie dată o enumerare a tuturor predicatelor $H(y)$ ale lui P^*, care nu conțin variabile mari. Atunci, în fiecare model ω—consistent pentru P^*, dacă „pentru unii X, $F(X)$" este teoremă, atunci există un $H_i(y)$ din șirul de mai sus, astfel încît este adevărat „pentru unii X, $F(X)$ și pentru toți y, $y\eta X$, dacă și numai dacă $H_i(y)$".

BIBLIOGRAFIE

[1] Wilhelm Ackermann, în „Math. Ann., **114**, 1937, pp. 305—315. Recenzie de Rosza Pétar în „.Jour. Symbolic Logic", **2**, 1937, pp. 167.

[2]—[3] Paul Bernays, în „Jour. Symbolic Logic", **2**, 1937, pp. 65—77; **6**, 1941, pp. 1—17.

[4] A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, ed. a 3-a, 1928.

[5] Kurt Gödel, *Consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton, 1940.

[6] Kurt Grelling, *Die Axiome der Arithmetik*, Disertație, Göttingen, 1910.

[7]—[8] D. Hilbert și P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, 1934; vol. 2, 1939.

[9]—[10] J. von Neumann, în *„Jour. Reine Angew. Math.,"* **154**, 1925, pp. 219—240; **160** 1929, pp. 227—241.

[11] J. B. Rosser, în *„Jour. Symbolic Logic"*, **2**, 1937, pp. 129—137.

[12] Roman Suszko, „Studia Philosophica", **4**, 1951, pp. 301—330.

[13]—[15] Hao Wang, în „Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.," **36**, 1950, pp. 479, 484; „Trans. Am. Math. Soc.," **71**, 1951 pp. 283—293; „Jour. Symbolic Logic", **18** 1953, pp. 49—59.

[16] E. Zermelo, în „Acta Math.," **32**, 1909, pp. 185—193.

CAPITOLUL XX
UNELE SISTEME PARŢIALE

§ 1. CÎTEVA DETALII FORMALE CU PRIVIRE LA AXIOMELE CLASELOR

Acest capitol este dedicat, în principal, unui rezumat succint al tezei de doctorat a autorului (Harvard, 1948), teză care se ocupă în mare măsură de elaborarea unui ansamblu de axiome mai economic în comparaţie cu cel din cartea lui Quine *Mathematical Logic* şi de dezvoltarea matematicii dincolo de punctul la care se ajunge acolo. În acest capitol ne vom referi adesea la ediţia din 1940 a cărţii lui Quine, cu care se presupune că cititorul este familiarizat. O mare parte a materialului expus a fost publicat în articole separate. Paragraful prezent este extras din „Journal of Symbolic Logic", 15, 1950, pp. 103—110. Paragraful 2 este extras din *loc. cit.*, 13, 1948, pp. 129—137. Paragraful 3 este din *loc. cit.*, 15, pp. 241—247.

Acest tip de cercetare i-a preocupat ani îndelungaţi pe matematicienii din aşa-numita şcoală logistică. În ultimii ani, pe măsură ce logica matematică s-a transformat într-o disciplină matematică mai obişnuită, interesul faţă de asemenea detalii formale a scăzut în mod rapid. Se pare totuşi că perspectiva promiţătoare a demonstrării teoremelor matematice de către maşini poate crea necesitatea reală a efectuării cu toată seriozitatea a unor formalizări oarecum excesive.

Reprezentanţii tipici ai acestei tradiţii sînt, se pare, Frege, Peano, Whitehead şi Russell, Chwistek, Carnap, Quine, Church, grupul din Münster condus de Scholz şi Hermes, Rosser, Fitch. În general, matematicienii nu nutresc prea multă simpatie faţă de cercetările de acest profil.

În matematică, de regulă, dacă vrem să introducem clase care îndeplinesc anumite condiţii, demonstrăm în prealabil că clasele care satisfac aceste condiţii există şi că aceste clase sînt determinate univoc de către condiţii. Enunţurile care exprimă o astfel de unicitate şi existenţă a claselor sînt în logica matematică consecinţe ale principiilor de extensionalitate şi de existenţă a claselor. Pentru ilustrarea modului în care aceste principii ne permit să introducem clase în cadrul sistemelor de logică matematică să considerăm un exemplu.

Astfel, de pildă, înaintea introducerii definiţiei perechii neordonate a două clase,

1.1 *Dfn* $x \in [yz]_{\cdot} \equiv :(\exists u)\ (x \in u) : x = y_{\cdot} \vee_{\cdot} x = z$,
sînt stipulate, ca justificare a acestei definiții, următoarele două axiome:

*A*3. $(x)\ (x \in w_{\cdot} \equiv_{\cdot} x \in y) \supset_{\cdot} w = y$.

*A*4. $(y)\ (z)\ (\exists w)\ (x)\ (x \in w_{\cdot} \equiv :(\exists u)\ (x \in u) :\ x = y_{\cdot} \vee_{\cdot} x = z)$.

Conform *A*4, pentru oricare două clase y și z există cel puțin o pereche neordonată w a acestora; conform *A*3, w este univoc determinată în *A*4.

După ce clasele au fost introduse în acest mod, se consideră că ele cad în domeniul de valori al variabilelor și avem dreptul să conchidem că un enunț este adevărat pentru aceste clase, dacă este adevărat pentru toate valorile unei variabile. Cu alte cuvinte, dacă numim expresia corespunzătoare unei clase *abstracta* acesteia, se aplică tacit următorul principiu de specificare:

PS. Dacă $\vdash \ulcorner(\alpha)\Phi\urcorner$, și ψ este asemenea lui Φ, cu excepția faptului că conține intrări libere ale unei variabile sau abstracte ζ pretutindeni unde Φ conține intrări libere ale lui α, atunci $\vdash \psi$.

După cum se pare, această procedură este perfect riguroasă în cazul cînd luăm ca primitivă noțiunea de clasă și facem convenția că 'x', 'y', 'z', ... sînt variabile al căror domeniu este alcătuit din toate clasele [1].

Să considerăm acum, în locul claselor, abstractele lor corespunzătoare. Cum decidem dacă expresii ca '$[yz]$' introduse prin definiții contextuale ca 1.1 sînt abstracte (adică expresii care desemnează clase) sau nu sînt? Răspunsul pe care l-am da ar fi acela că o expresie η introdusă printr-o definiție

$$DC. \quad \ulcorner \alpha \in \eta_{\cdot} \equiv \Phi \urcorner$$

este o abstractă dacă *A*3 și închiderea lui

EC. $\ulcorner(\exists\beta)\ (\alpha)\ (\alpha \in \beta_{\cdot} \equiv \Phi)\urcorner$($\beta$ nu este liberă în Φ și este distinctă de α) sînt, fiecare în parte, o teoremă sau o axiomă. Prin urmare, '$[yz]$' este o abstractă, întrucît *A*3 și *A*4 sînt axiome. Interpretînd abstractele în acest mod, cazurile particulare ale lui *PS* în care ζ este o abstractă, sînt demonstrabile ca metateoreme sau teoreme. Pentru demonstrarea principiului *PS* pentru un ζ specific, avem nevoie, se pare, în locul lui *A*3, de un principiu special de extensionalitate, care se aplică în mod specific la acel gen de clase corespunzătoare lui ζ. Dar un atare principiu decurge din definiția identității pentru abstracte, definiție enunțată la nota 1. De exemplu, dacă ζ este '$[yz]$', putem demonstra *PS* pentru el, dacă admitem 1.1, *A*4 și, în locul lui *A*3, următoarea axiomă:

*A*4'. $(x)(x \in w_{\cdot} \equiv_{\cdot} x \in [yz]) \supset_{\cdot} w = [yz]$.

Dar *A*4' este o consecință directă a definiției identității pe care am menționat-o mai sus.

[1] În cele mai multe locuri, notația din acest articol este împrumutată de la Quine, *Mathematical Logic* (New York, 1940) lucrare pe care o vom indica prin abrevierea *ML*.
Mai precis, *Dfn*. 1.1 trebuie suplimentată cu reguli care explică, de exemplu: '$[yz] \in x$' și '$x = [yz]$' precum și '$x \in [yz]$', înainte ca să putem vorbi de substituirea unei abstracte pentru o variabilă α într-o *formulă arbitrară* Φ. Putem utiliza reguli ca:

$x = [yz] \equiv (w)\ (w \in x \equiv w \in [yz])$,

$[yz] \in x \equiv (\exists w)\ (w = [yz]_{\cdot}\ w \in x)$.

Demonstrația lui *PS* pentru '$[yz]$'. care în afară de 1.1 *A4* și *A4'* mai utilizează numai logica elementară [2], decurge după cum urmează:

A4(și *Dfn* 1.1) $(\exists w)\ (x)\,(x \in w_{\cdot} \equiv_{\cdot} x \in [yz])$ (1)

* 149 $[(w)A4' \supset_{\cdot} 1 \supset]\,(\exists w)\,(w = [yz])$ (2)

* 104 $(x)\,fx \supset fw$ (3)

* 220 $[w = yz]_{\cdot} \supset :[3 \equiv_{\cdot}](x)\,fx \supset f[yz])$ (4)

(4), * 163 $[4 \supset_{\cdot}](x)\,f(x) \supset f([yz])$ (5)

Prin urmare, conform (5) și *modus ponens* (* 105), *PS* este demonstrat pentru cazul cînd ζ este '$[yz]$'. Evident, *PS* poate fi demonstrat similar pentru alte abstracte.

În *ML*, Quine demonstrează un principiu * 231 corespunzător lui *PS*:

* 231. Dacă ψ stă față de Φ în aceeași relație ca în *PS*, atunci $\vdash \ulcorner(\alpha)\Phi \supset \psi\urcorner$.

Modul în care Quine demonstrează * 231 în *ML*, pe baza lui *D*9, * 202 și *D*10 de acolo se aseamănă întrucîtva cu modul în care am demonstrat *PS* pentru '$\{yz\}$' pe baza lui 1.1, *A4* și *A4'*. Cu toate acestea, în mai multe privințe, Quine merge pe o altă cale. În primul rînd, el nu introduce clase și abstracte una cîte una, ci introduce toate genurile de clase și de abstracte prin ceea ce am putea numi o „metadefiniție" unică.

*D*9. $\ulcorner(\beta \in \hat{\alpha}\Phi)\urcorner$ pentru $\ulcorner(\exists\gamma)(\beta \in \gamma = (\alpha)(\alpha \in \gamma_{\cdot} \supset \Phi))\urcorner$
(γ fiind nouă), în conformitate cu care definiția pentru '$[yz]$' ar fi:

1.1'. *Dfn* $x \in \hat{x}\ (x = y_{\cdot} \vee_{\cdot} x = z)$

$$\cdot\equiv (\exists u)\,(x \in u_{\cdot}\,(x)\,(x \in u_{\cdot} \supset :x = y_{\cdot} \vee_{\cdot} x = z))$$

care este diferită de 1.1.

În al doilea rînd, în loc să utilizeze axiome speciale ca *A4*, axiome care privesc toate exclusiv un anumit gen specific de clase, Quine adoptă un principiu general (o „metaaxiomă") * 202 care afirmă că pentru fiecare formulă '... x ...' există o clasă ai cărei membri sînt numai toate acele elemente x astfel încît ... x ...:

* 202. Dacă β nu este α și nu este liberă în φ, atunci $\vdash \ulcorner(\exists\beta)\,(\alpha)\,(\alpha \in \beta_{\cdot} \equiv \equiv_{\cdot} \alpha \in \vee_{\cdot} \varphi)\urcorner$.

Dacă înlocuim '$\alpha \in \vee$' prin '$(\exists\gamma)\,(\alpha \in \gamma)$' ($\gamma$ distinctă de α)[3] în * 202, vom avea ca un caz particular al său axioma *A4*.

[2] Prin „logica elementară" înțeleg acea porțiune a logicii care cuprinde calculul propozițional, calculul funcțional restrîns, precum și principiile de substitivitate și reflexivitate pentru identitate. În cele ce urmează voi face uz de metateoremele și teoremele logice elementare demonstrate în *ML*. Numeralele prevăzute cu asterisc sau cu semnul † vor fi utilizate ca în *ML* spre a indica metateoremele și teoremele sale. Pentru concizie, am recurs în demonstrația următoare la unele notații diferite de cele din *ML*. *220 implicată în demonstrația care urmează ar trebui demonstrată printr-o demonstrație oarecum diferită de cea dată în *ML*. Putem obține o asemenea demonstrație, utilizînd teoria identității și definiția lui '$w = [yz]$' dată la nota anterioară.

[3] În *ML*, $\vdash \ulcorner\alpha \in \vee \equiv (\exists\gamma)\,(\alpha \in \gamma)\urcorner$. Vezi p. 178, † 255.

În al treilea rînd, în loc de a lua identitatea ca termen primitiv, Quine o definește în termenii relației de apartenență încorporînd astfel principiul general al extensionalității pentru toate clasele în definiția

*D*10. $\ulcorner(\zeta = \eta)\urcorner$ pentru $\ulcorner(\alpha)(\alpha \in \zeta_{\cdot} \equiv_{\cdot} \alpha \in \eta)\urcorner$, unde ζ și η pot fi, fiecare în parte, o variabilă sau o abstractă. O consecință a *D* 10 corespunzătoare axiomei *A*4′ este:

$$A4''.\ (x)\,(x \in w_{\cdot} \equiv_{\cdot} x \in \hat{x}(x = y =_{\cdot} \vee_{\cdot} x = z))$$

$$\supset_{\cdot} w = \hat{x}(x = y_{\cdot} \vee_{\cdot} x = z).$$

Să folosim $'\Phi[\alpha\zeta]'$ ca abreviere pentru expresia ψ, care este asemenea lui Φ', exceptînd faptul că conține intrări libere ale lui ζ pretutindeni unde Φ' conține intrări libere ale lui α, Φ' fiind o variantă alfabetică (arbitrar specificată) a lui Φ pentru care există o atare ψ'. În general, asemenea variante alfabetice Φ' ale lui Φ există, deoarece orice expresie în care nu este legată nici o variabilă liberă în ζ ar fi adecvată în acest scop. În particular, cerem ca specificarea să fie făcută astfel, încît $\Phi[\alpha, \zeta]$ este Φ cînd ζ este α.

Să presupunem acum că înlocuim *D*9 din *ML* prin [4]:

*D*9′. $\ulcorner(\beta \in \hat{\alpha}\Phi)\urcorner$ pentru $\ulcorner((\exists\gamma)\,(\beta \in \gamma)_{\cdot}\,\Phi[\alpha, \beta])\urcorner$ (γ distinctă de β).

Să deosebim o metateoremă în genul metateoremei * 230 a lui Quine și metateorema. $\bigcap$ * 230, obținută din ea prin transformarea fiecărui semn $'\wedge'$ în semnul $'\bigcap'$. Atunci constatăm cu ușurință că $\bigcap$* 231 poate fi derivată din *D*9′, $\bigcap$* 202 și $\bigcap D10$ exact la fel cum cazul special al lui *PS* unde ζ este $'[yz]'$ era derivat din 1.1, *A*4 și *A*4′. Derivarea lui $\bigcap$* 231 din *D*9′, $\bigcap$* 202 și $\bigcap D10$ este mai directă decît derivarea lui * 231 din *D*9, * 202 și *D*10.

În fapt, putem arăta că în sistemul din *ML*, *D*9 și *D*9′ sînt definiții echivalente, în sensul că nu putem demonstra niciodată teoreme diferite, dacă utilizăm o definiție în locul celeilalte. Putem demonstra că bicondiționalii corespunzători lui *D*9 și *D*9′ sînt reciproc derivabili pe baza lui * 202 sau $\bigcap$* 202 și a logicii elementare, păstrînd $\bigcap D10$ și $\bigcap D15$ neschimbați din punctul de vedere al notației la fel ca *D*10 și *D*15 în *ML*, cu excepția faptului că în locul lui $'\wedge'$ conține $'\frown'$.

Pe de o parte, *D*9′ nu oferă mai mult decît *D*9, deoarece bicondiționalul $\overline{*}D9'$ corespunzător lui *D*9′ poate fi demonstrat ca metateoremă pe baza lui *D*9, * 202, *D*10, *D*15 și a logicii elementare. Întrucît * 235 și † 255 se demonstrează în *ML* ca fiind demonstrabile pe aceeași bază, demonstrația lui * *D*9′ se desfășoară astfel:

$$*\,D9' \vdash \ulcorner\beta \in \hat{\alpha}\,\Phi_{\cdot} \equiv_{\cdot} (\exists\gamma)\,(\beta \in \gamma)_{\cdot}\,\Phi[\alpha,\ \beta],\urcorner \text{ dacă } \gamma \text{ nu este } \beta.$$

[4] Ar fi relevant, se pare, să reliefăm strînsa conexiune existentă între *D*9′ și un alt mod de introducere a denumirilor de clase în teoria mulțimilor prin intermediul unor definiții contextuale, — și anume prin utilizarea unui operator al descripției. Într-un sistem ce conține un asemenea operator, abstractele se pot introduce prin definiția directă: $\ulcorner\hat{\alpha}\Phi\urcorner$ pentru $\ulcorner(\bigcap\eta)\,(\alpha)\,(\alpha \in \eta \equiv \Phi)\urcorner$. Făcînd uz de *A*3 și *EC*, precum și de teoremele standard pentru simbolul $'\bigcap'$, obținem cu ușurință, pe baza logicii elementare, o metateoremă corespunzătoare lui *D*9′.

Demonstrație.

$$* 235 \vdash \ulcorner \beta \in \hat{\alpha}\Phi \,.\equiv.\, \beta \in \vee \,.\, \Phi[\alpha, \beta]\urcorner \tag{1}$$

$$\dagger 255, * 123 \vdash \ulcorner [1 \equiv]\ D9'\urcorner.$$

Pe de altă parte, $D9'$ nu oferă mai puțin decît $D9$, deoarece bicondiționalul $\cap * D9$ corespunzător lui $D9$ poate fi demonstrat ca metateoremă pe baza lui $D9'$, $\cap * 202$, $\cap D10$, $\cap D15$ și a logicii elementare. Pentru început, dacă utilizăm $D9'$ în locul lui $D9$, putem demonstra un principiu $\cap * 230$ cu $\cap D10$, $\cap D15$ și logica elementară:

$$\cap * 230. \vdash \ulcorner \alpha \in \hat{\alpha}\Phi \,.\equiv.\, \alpha \in \vee \,.\Phi\urcorner.$$

Demonstrație.

$$* 100(\&\ D9') \vdash \ulcorner \alpha \in \hat{\alpha}\Phi \,.\equiv.\, (\exists\gamma)\ (\alpha \in \gamma) \,.\, \Phi\urcorner. \tag{1}$$

$$* 100\ (\&\ D10) \vdash \ulcorner \alpha = \hat{\alpha}\urcorner \tag{2}$$

$$(1)\ (\&\ D15) \vdash \ulcorner \alpha \in \vee \,.\equiv.\, (\exists\gamma)\ (\alpha \in \gamma)[\,.\,2]\urcorner \tag{3}$$

$$(3)\ * 123 \vdash \ulcorner 230\ [\equiv 1]\urcorner.$$

Așa cum am remarcat însă mai sus, $\cap * 231$ este, de asemenea, derivabilă, atunci cînd $D9$ este înlocuită prin $D9'$. Așadar, se poate da o demonstrație pentru $\cap * D9$ în felul următor:

$\cap * D9$. Dacă γ nu este nici α, nici β, nici liberă în Φ, atunci $\vdash \ulcorner \beta \in \hat{\alpha}\Phi \,.\equiv \equiv (\exists\gamma)\ (\beta \in \gamma \,.\, (\alpha)\ (\alpha \in \gamma \,.\supset \Phi))\urcorner$.

Demonstrație.

$$* 100 \vdash \ulcorner [230\,.]\ \alpha \in \hat{\alpha}\Phi \,.\supset \Phi\urcorner \tag{1}$$

$$* 135 \vdash \ulcorner \beta \in \gamma \,.\, (\alpha)\ (\alpha \in \gamma \,.\supset \Phi) \,.\supset (\exists\gamma)\ (\beta \in \gamma \,.\, (x)\ (\alpha \in \gamma \,.\supset \Phi))\urcorner \tag{2}$$

$$\cap * 231\ (\&\ \mathrm{hp}) \vdash \ulcorner [(\gamma)2 \supset :]\ \beta \in \hat{\alpha}\Phi \,.\, (\alpha)\ (\alpha \in \alpha\Phi \,.\supset \Phi) \,.\supset \mathrm{R}2\urcorner \tag{3}$$

$$* 135 \vdash \ulcorner \beta \in \gamma \,.\supset (\exists\gamma)\ (\beta \in \gamma)\urcorner. \tag{4}$$

Fie Φ' o variantă alfabetică a lui Φ, astfel încît $\Phi[\alpha, \beta]$ este asemenea cu ea, exceptînd faptul că ea conține intrări libere ale lui β oriunde aceasta conține intrări libere ale lui α.

$$* 104 \vdash \ulcorner (\alpha)\ (\alpha \in \gamma \,.\supset \Phi') \supset :\, \beta \in \gamma \,.\supset \Phi[\alpha, \beta]\urcorner \tag{5}$$

$$* 171 \vdash \ulcorner [5 \equiv :\,.\,]\ (\alpha)\ (\alpha \in \gamma \,.\supset \Phi) \supset :\, \beta \in \gamma \,.\supset \Phi\ [\alpha, \beta]\urcorner \tag{6}$$

$$* 100, * 163\ (\&\ D9',\ \mathrm{hp})$$

$$(\gamma) \vdash \ulcorner (\exists\gamma)\ ([4\,.\,6\,.\,]\ \beta \in \gamma \,.\, (\alpha)\ (\alpha \in \gamma \,.\supset \Phi)) \supset \,.\, \beta \in \hat{\alpha}\Phi\urcorner \tag{7}$$

$$* 100 \vdash \ulcorner [(\alpha)1\,.\,3\,.\,7\,.\supset]\ D9\urcorner.$$

Totodată, dacă adoptăm $D9'$ în locul lui $D9$, putem deriva $\bigcap^* 202$ din $^* 231$ cu ajutorul lui $\bigcap^* 230$ care a fost demonstrată înainte independent de $D9$ și $\bigcap^* 202$:

Demonstrația lui $\bigcap^* 202$.

$$^* 135 \vdash \ulcorner(\alpha)\ (\alpha\in\beta \,.\equiv.\, \alpha\in V \,.\, \Phi) \supset 202\urcorner \tag{1}$$

$$^* 231 \vdash \ulcorner[(\beta)\ 1 \supset .\ (\alpha)\ \bigcap 230 \supset] 202\urcorner.$$

Dar de îndată ce avem $\bigcap^* 231$, $\bigcap^* D9$ poate fi de asemenea demonstrată fără să utilizăm $\bigcap^* 202$. În consecință, nu numai că $^* 231$ și $^* D9'$ sînt derivabile din $^* 202$ și $D9$, ci și $\bigcap^* 202$ și $\bigcap^* D9$ sînt, la rîndul lor, derivabile din $\bigcap^* 231$ și $D9'$. Cu alte cuvinte, $D9'$ și principiul $\bigcap^* 231$ de specificare pot lua (în calitate de „metadefiniție" și „metaaxiomă") locul lui $D9$ și a principiului $^* 202$ al existenței claselor în cadrul oricărui sistem, fără ca să afecteze ansamblul consecințelor deductibile prin intermediul logicii elementare.

Acest rezultat poate prezenta un anumit interes, deoarece, spre deosebire de $D9$ și $^* 202$, $D9'$ și $\bigcap^* 231$ par a fi mai intuitive și mai direct legate de tradiție.

În cele de mai sus, $^* 202$ a fost aplicată în deplina ei generalitate în scopul derivării lui $^* 231$ din axiomele de existență a claselor, fie împreună cu $D9$, fie împreună cu $D9'$. Uneori putem întîlni un sistem în care nu dispunem de un principiu de existență a claselor atît de puternic cum este $^* 202$; uneori vrem să demonstrăm un principiu general pe baza unui număr finit de axiome de existență a claselor și vrem, eventual, să avem la dispoziția noastră $^* 231$, înainte de a fi obținut principiul general de existență a claselor. Se poate menționa, în treacăt, că $^* 231$ este demonstrabilă pe baza logicii elementare și a $D10$ plus o consecință a lui $^* 202$ care garantează existența clasei nule.

$$AN.\ (z)\ (\exists y)\ (x)\ (x\in y \,.\equiv.\, x\in V \,.\, x\in z \,.\, x\widetilde{\in}z),$$

cu singura condiție ca să înlocuim definiția $D9$ din ML prin

$$D9''.\ulcorner(\beta\in\hat{\alpha}\Phi \text{ pentru } \ulcorner(\exists\gamma)\ (\beta\in\gamma \,.\, (\alpha)\ (\alpha\in\gamma \,.\equiv.\, (\delta)\ (\alpha\in\delta) \,.\, \Phi))$$

(γ fiind o variabilă nouă și δ fiind o variabilă oarecare, distinctă de α).

Pe baza logicii elementare și a principiului $^* 202'$ (rezultatul obținut din $^* 202$ prin substituirea lui $'(\exists\gamma)\ (\alpha\in\gamma)'$ pentru $'\alpha\in V'$), putem demonstra o metateoremă care arată că, la urma urmelor, nu are nici o importanță pentru puterea deductivă a unui sistem ca ML faptul că folosim $D9$ sau $D9''$.

MT. Dacă γ nu este α și nici liberă în Φ, iar δ nu este α, atunci

$$\vdash \ulcorner(\exists\gamma)\ (\beta\in\gamma \,.\, (\alpha)\ (\alpha\in\gamma \,.\supset \Phi)) \equiv (\exists\gamma)\ (\beta\in\gamma \,.\, (\alpha)$$

$$(\alpha\in\gamma \,.\equiv.\, (\exists\delta)\ (\alpha\in\delta) \,.\, \Phi))\urcorner \tag{i}$$

Demonstrație. $^* 100 \vdash \ulcorner\alpha\in\gamma \,.\equiv.\, (\exists\delta)\ (\alpha\in\delta) \,.\, \Phi :\supset: \alpha\in\gamma \,.\supset \Phi\urcorner$ (1)

$$^* 102 \qquad \vdash \ulcorner[(\alpha)1 \supset .] (\alpha)\, L1 \supset (\alpha)\, R1\urcorner \tag{2}$$

* 100 $\vdash \ulcorner[2\,.]\ \beta\in\gamma\,.\,(\alpha)\ L1\,.\supset.\,\beta\in\gamma\,.\,(\alpha)\ R1\urcorner$ (3)

* 149 $\vdash \ulcorner[(\gamma)\,3\supset.\,](\exists\gamma)\ L3\supset(\exists\gamma)\ R3\urcorner.$ (4)

Fie δ' distinct de α și β.

* 134 $\vdash \ulcorner\beta\in\gamma\,.\supset(\exists\delta')\,(\beta\in\delta')\urcorner$ (5)

* 104 $\vdash \ulcorner(\alpha)\,(\alpha\in\gamma\,.\supset\Phi)\supset:\beta\in\gamma\,.\supset\Phi\,[\alpha,\ \beta]\urcorner$ (6)

* 100, * 163 (& hp) $\vdash \ulcorner(\exists\gamma)\,([5\,.\,6\,.]\ \beta\in\gamma\,.\,(\alpha)\,(\alpha\in\gamma\,.\supset\Phi))\supset$
$.\,(\exists\delta')\,(\beta\in\delta')\,.\,\Phi\,[\alpha,.\,\beta]\urcorner$ (7)

* 202′ $\vdash \ulcorner(\exists\gamma)\,(\alpha)\,(\alpha\in\gamma\,.\equiv.\,(\exists\delta)\,(\alpha\in\delta)\,.\,\Phi)\urcorner$ (8)

* 104 $\vdash \ulcorner(\alpha)\,(\alpha\in\gamma\,.\equiv.\,(\exists\delta')\,(\alpha\in\delta')\,.\,\Phi)\supset:\beta\in\gamma$
$.\equiv.\,(\exists\delta')\,(\beta\in\delta')\,.\,\Phi\,[\alpha,\ \beta]\urcorner$ (9)

* 171 $\vdash \ulcorner[9\equiv.]\,(\alpha)\,(\alpha\in\gamma\,.\equiv.\,(\exists\delta)\,(\alpha\in\delta\,.\,\Phi)\supset R9\urcorner$ (10)

* 100 $\vdash \ulcorner[10\,.]\,L10\,.\supset:R7\supset.\,\beta\in\gamma\,.\,L10\urcorner$ (11)

* 149 $\vdash \llcorner[\,(\gamma)\ 11\supset.\,8\,](\exists\gamma)R11\urcorner$ (12)

* 160 (*D*& 4) $\vdash \ulcorner[12\equiv.]\ R7\supset(\exists\gamma)\ RR11\urcorner$ (13)

* 100 $\vdash \ulcorner[4\,.\,7\,.\,13.\supset]i\urcorner.$

Ca lemă pentru demonstrarea lui * 231, avem[5]

† 189. $(x)\ x=\hat{y}(y\in x)$.

Demonstrație. * 134 $y\in x\,.\supset(\exists z)\ (y\in z)$ (1)

* 100 $[1\supset:]\ y\in x\,.\equiv.\,(\exists z)\ (y\in z)\,.\,y\in x$ (2)

* 134 (& *D*9″) $y\in x\,[.\,(y)2]\,.\supset.\,y\in\hat{y}(y\in x)$ (3)

* 104 $(y)\,(y\in w\,.\equiv.\,(\exists z)\,(y\in z)\,.\,y\in x)\supset:y\in w$
$.\equiv.\,(\exists z)\,(y\in z)\,.\,y\in x$ (4)

* 100, * 163 $(\exists w)\ ([4\,.\,]\ y\in w\,.\,(y)\,(y\in w$
$.\equiv.\,(\exists z)\,(y\in z)\,.\,y\in x))\supset y\in x$ (5)

* 100 (&*D*9″)$[3\,.\,5\,.\supset:]\,y\in x\,.\equiv.\,y\in\hat{y}\ (y\in x)$ (6)

* 100 (&*D*10) $[(y)\,6\equiv.\,]\,x=\hat{y}(y\in x)$.

Demonstrația lui * 231.

Cazul 1*:* ζ este o variabilă. * 104.

Cazul 2: ζ este o abstractă $\ulcorner\hat{\delta}\chi\urcorner$. Fie α' și γ variabile noi și distincte.

[5] În cele două demonstrații care urmează admitem că abstractele au fost introduse prin intermediul definiției *D*9″.

$$* 100\ (\&D9'',\ D10),\ * 123 \vdash \ulcorner \hat{\delta}\chi = \hat{\delta}((\exists\gamma)\ (\delta\in\gamma)\ .\ \chi)\urcorner \tag{1}$$

$$* 121,\ * 117\ (\&D9'',\ D10) \vdash \ulcorner(\delta)\ (\delta\in\alpha'\ .\equiv.\ (\exists\gamma)\ (\delta\in\gamma)\ .\ \chi)$$
$$\supset .\ \hat{\delta}(\delta\in\alpha') = \hat{\delta}((\exists\gamma)\ (\delta\in\gamma)\ .\ \chi)\urcorner$$

$$* 223 \qquad \supset :: [189 \equiv .]\ \alpha' = \hat{\delta}((\exists\gamma)\ (\delta\in\gamma)\ .\ \chi)\urcorner$$

$$* 223 \qquad \vdots \supset :: [1 \equiv .]\alpha' = \hat{\delta}\chi\urcorner \tag{2}$$

$$* 149 \qquad \vdash \ulcorner[(\alpha')\ 2 \supset .]\ (\exists\alpha')\ L2 \supset (\exists\alpha')\ R2\urcorner \tag{3}$$

$$* 100 \qquad \vdash \ulcorner \delta\in\alpha'\ .\ L2\ .\supset L2\urcorner \tag{4}$$

$$* 149\ (\&D9'') \qquad \vdash \ulcorner[(\alpha')\ 4 \supset ::]\ \delta\in\hat{\delta}\chi\ .\supset (\exists\alpha')\ L2\urcorner \tag{5}$$

$$AN \qquad \vdash \ulcorner(\exists\alpha')(\delta)\ (\delta\in\alpha'\ .\equiv.\ \delta\in\vee\ .\ \delta\in\gamma .\ \delta\widetilde{\in}\gamma)\urcorner \tag{6}$$

$$* 100,\ * 117 \qquad \vdash \ulcorner\sim(\exists\alpha')\ L2 \supset (\delta)\ (\gamma)\ ([5 \supset ::]\ \delta\in\vee\ .\ \delta\in\gamma$$
$$.\ \delta\widetilde{\in}\gamma\ .\equiv.\ \delta\in\hat{\delta}\chi)\urcorner$$

$$* 121\ (\&D10) \qquad \supset .\ [6 \equiv]\ (\in\alpha')\ (\alpha' = \hat{\delta}\chi)\urcorner \tag{7}$$

$$* 100 \qquad \vdash \ulcorner[3\ .\ 7\ .\supset]\ (\exists\alpha')\ (\alpha' = \hat{\delta}\chi)\urcorner \tag{8}$$

$$* 223\ (\&hp) \qquad \vdash \ulcorner\alpha' = \hat{\delta}\chi\ .\supset :: [104 \equiv .](\alpha)\Phi \supset \psi\urcorner \tag{9}$$

$$(9),\ * 163 \qquad \vdash \ulcorner[8\supset]\ 231\urcorner.$$

Printre axiomele teoriei mulțimilor, principiul de extensionalitate $A3$ are efectul de a exclude integral nonclasele și de a admite că fiecare valoare a unei variabile este o clasă. Aceasta se datorează faptului că, în conformitate cu interpretarea normală a lui '$\in$', $A3$ poate fi citită: 'Două entități oarecari sînt identice, dacă au aceeași membri', întrucît numai clasele se presupune că sînt capabile de a avea membri. Totodată, este evident că și $D10$ are același efect, deoarece $A3$ este consecința imediată a definiției $D10$ a identității. Acest efect poate fi evitat fie prin reinterpretarea lui '$\in$', fie prin atenuarea cerințelor puse pentru identitatea a doua entități. Totuși, în măsura în care este vorba despre matematică și logică matematică, este posibil să ne dispensăm de nonclase.

Uneori, este de dorit să restrîngem încă și mai mult domeniul entităților, concentrîndu-ne atenția asupra unui anumit gen specific de clase. De exemplu, după ce am identificat numerele naturale cu anumite clase, dorim eventual să dezvoltăm aritmetica numerelor naturale pe baza logicii și să tratăm pentru moment aproape în mod exclusiv acest gen specific de clase. Atunci devine indicat să introducem un nou gen de variabile, al căror domeniu este compus numai din toate acele clase care sînt numere naturale. Utilizînd '$P(x)$' ca abreviere pentru 'x este număr natural', putem introduce variabile pentru numere naturale pe baza următoarei definiții contextuale:

$$DU.\ {<}(\bar{\alpha}_1)\ \ldots\ (\bar{\alpha}_n)\Phi'\urcorner \text{ pentru } \ulcorner(\alpha_1)\ \ldots\ (\alpha_n)\ (P(\alpha_1)\ .\ \ldots\ .\ P(\alpha_n)\ .\supset \Phi)\urcorner$$

($n \geqslant 1$; Φ' este asemenea lui Φ, exceptînd faptul că ea conține intrări libere ale $\ulcorner\alpha_1\urcorner, \ldots, \ulcorner\alpha_n\urcorner$ pretutindeni unde Φ conține intrări libere ale $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$). Evident, am fi putut utiliza '$P(x)$' ca abreviere pentru anumite alte matrice, cum sînt 'x este un element (sau o mulțime)' sau 'x este un număr real' etc.

§ 2. O NOUĂ TEORIE A ELEMENTULUI ȘI NUMĂRULUI

2.1. Logica de bază și axiomele proprietății de a fi element

Quine a remarcat că sistemul din cartea sa, lăsînd la o parte * 200, este o logică de bază absolut sigură. Axiomele acestei logici de bază sînt date de * 100—*105 și *201—* 202 din *ML*. Pentru teoria relațiilor și teoria numerelor, avem nevoie de unele axiome noi, care să ne garanteze că anumite entități sînt elemente. În articolul său *EN*[6], Quine a propus să adoptăm ca axiome † 610 și următoarele două enunțuri:

*EA*1. $(x) \quad \iota x \in \mathrm{V}$.

*EA*2. $(x)\,(y)\ x, y \in \mathrm{V} \,.\supset.\, \bar{x} \cap \bar{y} \in \mathrm{V}$.

În acest articol, el a mai subliniat și că pentru scopurile urmărite în *ML* sînt suficiente două axiome mai slabe, după o modificare corespunzătoare a definițiilor. Axiomele sînt *EA*1 și

*EA*3. $(x)\,(y)\ x, y \in \mathrm{V} \,.\supset.\, \bar{x} \cap \bar{y} \in \mathrm{V}$.

O cercetare mai amănunțită arată că putem adopta chiar și axiome mai slabe pentru problemele elucidate în *ML*. În particular, putem utiliza ca axiome, pur și simplu, următoarele două enunțuri:

*EA*4 $\quad \wedge \in \mathrm{V}$.

*EA*5. $(x)\,(y)\ x, y \in \mathrm{V} \,.\supset.\, \iota x \cup \iota y \in \mathrm{V}$.

De asemenea, se poate demonstra că o singură axiomă

*EA*6. $(x)\ (y)\ \iota x \cup \iota y \in \mathrm{V}$

va servi în același scop ca *EA*4 și *EA*5 luate împreună. Aceasta se vede din faptul că *EA*6 și conjuncția lui *EA*4 și *EA*5 sînt deductibile una din alta în cadrul logicii de bază.

Cu toate acestea, înainte de a trece la deducții, să presupunem că am parcurs capitolul IV din *ML*, cu simpla omisiune a lui * 200 și a acelor teoreme și metateoreme care depind de * 200, și anume *200, † 210— † 212, † 241, * 253, * 254, * 256—* 259, † 261, * 263, † 272— † 274 † 359— † 361 și * 363.

[6] *Element and Number*, în „Jour. Symbolic Logic", vol. 6.

După aceea, aflăm că *EA*6 poate fi demonstrată prin logica de bază, dacă adoptăm *EA*4 și *EA*5 ca axiome:

*Demonstrația lui EA*6. *EA*5, $x, x \in V . \supset . \imath x \cup x \in \mathrm{V}$

† 277, *224 $\supset . \imath x \in \mathrm{V}$ (1)

† 343 $x \widetilde{\in} \mathrm{V} . \supset . \imath x = \Lambda$

* 224 $\supset :: \imath x \in \mathrm{V}$ [. ≡ EA4] (2)

† 343 $y \widetilde{\in} \mathrm{V} . \supset . \imath y = \Lambda$

* 224 $\supset :: \imath x \cup \imath y \in \mathrm{V} . \equiv . \imath x \cup \Lambda \in \mathrm{V}$

† 297, * 224 $\supset :: \imath x \cup \imath y \in \mathrm{V} . \equiv . \imath x \in \mathrm{V}$ (3)

* 100 [1 . 2 . 3 . *EA*5 . ⊃] *EA*6.

Pe de altă parte, dacă adoptăm *EA*6 ca axiomă, este ușor să demonstrăm *EA*4 și *EA*5 cu logica de bază:

*Demonstrația lui EA*4 *EA*6

$\imath\hat{x}(x \widetilde{\in} x) \cup \imath\hat{x}(x \widetilde{\in} x) \in \mathrm{V}$ (1)

† 277, * 224 [1 ≡ .] $\imath\hat{x}(x \widetilde{\in} x) \in \mathrm{V}$ (2)

† 343 [260 ≡ .] $\imath\hat{x}(x \widetilde{\in} x) = \Lambda$ (3)

* 223 [3 ⊃ . 2 ≡] *EA*4.

*Demonstrația lui EA*5

* 100 [*EA*6 ≡] *EA*5.

În cele ce urmează vom încerca să dezvoltăm aritmetica numerelor naturale pe fundamentul logicii de bază și a singurei axiome pentru proprietatea de a fi element: *EA*6.

Pentru început, introducem *EA*6 ca axiomă și deducem consecințele acestea într-un *addendum* la capitolul IV, utilizînd caractere diferite pentru a distinge noua utilizare a numerelor de referință de numerele de referință a căror utilizare rămîne cea din text.

Avem astfel

† 300. (*x*) (*y*) $\imath x \cup \imath y \in \mathrm{V}$. († 360)

† 370. $\Lambda \in \mathrm{V}$ *Demonstrația* dată mai sus († 211)

† 371 (*x*) (*y*) $x, y \in \mathrm{V} . \supset . \imath y \in \mathrm{V}$ *Demonstrația* dată mai sus.

† 372. (*x*) $\imath x \in \mathrm{V}$ († 359)

Demonstrație.

† 300 $\iota x \bigcup \iota x \in V$ (1)

† 277, * 224 $[1 \equiv]372$

† 373. (y) $(\exists x)(x \neq y)$ († 212)

* 374. Dacă α nu este liberă în Φ, $\vdash \ulcorner \hat{\alpha}\Phi = V \,.\equiv \Phi \urcorner$. (*253)

* 375. Dacă α nu este liberă în Φ, $\vdash \ulcorner \Phi = \Lambda \,.\equiv \sim \Phi \urcorner$. (*254)

* 376. $\vdash \ulcorner (\alpha) \sim \Phi \supset . \hat{\alpha}\Phi \in V \urcorner$. (*257)

Demonstrațiile lui **†373—*376** sînt asemănătoare celor date în articolul *EN* la **†410** *g'*, * **410** *e'*, * **410***f'* și * **410** *d'* (dar cu '**410** *a'* schimbat în '**370**').

Se constată ca utilizarea lui * **200** de-a lungul întregului capitol V este mediată de **†211**, **†359**, * **360**. În conformitate cu aceasta, capitolul V rămîne intact după revizuire, cu excepția transformării celor cîteva apariții ale lui '**211**', '**359**', '**360**' în demonstrații pentru '**370**', '**372**', '**300**'.

2.2. Aritmetica numerelor naturale

Interpretînd succesorul unui număr natural ca o clasă unitate a acestuia, vom obține o teorie a numerelor naturale care evită orice ipoteză cu privire la proprietatea de a fi element, în afară de **†300**. Numărul 0 este identificat cu clasa nulă. În conformitate cu aceasta, *D***36**—*D***39** sînt înlocuite prin noile definiții:

*D*36. '0' pentru 'Λ'
*D*37. '1' pentru '$\iota 0$'.
*D*38. '2' pentru '$\iota 1$'.
*D*39. 'S' pentru '$\lambda_x \iota x$'.

În locul lui **†610** și **†614** avem teorema mai puternică **†372** și

†614. (x) $S'x = \iota x$ *Demonstrație.* †546 (&*D*39).

Teoremele **†611—†613**, **†615—†617** și demonstrațiile lor rămîn neschimbate ca notație, cu excepția modificărilor evidente ale referirilor: **†359**, **†610**, **†614**, *D***36**—*D***39** lasă locul lor la **†370**, **†372**, **†614**, *D***36**—*D***39**.

†621 și **†624** sînt înlocuite prin următoarele teoreme †621 și †624:

†621. $S'\Lambda = 1$ Demonstrație prin †615 (&*D*36).

†624. (x) $x \in V \,.\equiv .\, S'x \neq 0$.

Demonstrație. †614, * 223 (&*D*36) $[343 \equiv :]$ $x \,\tilde{\in}\, V \,.\equiv .\, S'x = 0$ (1)

* 100 $[1 \equiv]$ 624.

Definiția *D***40** a clasei tuturor numerelor naturale rămîne neschimbată ca notație:

*D*40. '*Nn*' pentru '$({}_*S''\iota 0)$'.

Alături de *D*40, teoremele și metateoremele †630 — *637, precum și demonstrațiile lor rămîn ca în *ML*, cu excepția unor schimbări minore ale referirilor: uzitarea lui †372 și *D*39 în locul lui †610 și *D*39.

Teorema crucială care rămîne să fie dedusă, în scopuri aritmetice, este teorema †677, care arată că nu există două numere naturale care să aibă același succesor. Aici se demonstrează o teoremă †677 mai puternică.

†677. $(x)(y)\ x \in \mathrm{V} . \supset : S`x = S`y . \equiv . x = y.$

Demonstrație †614, *224 677 [≡ 358].

Iar acum toate definițiile, teoremele și demonstrațiile din §§ 47—49 din *ML* care urmează, cu privire la puterile relațiilor și algoritmul aritmeticii, pot fi efectuate fără nici o modificare cu excepția utilizării teoremelor †624 (cu complicații minore în cadrul demonstrațiilor lui †682 și †683) și †677 în locul lui †624 și †677.

Alte patrusprezece teoreme privind în special *aplicarea* numerelor naturale sînt †618—†620, †622, †623, †625—†629, †638—†641 din *ML*. Un număr natural n este construit în *ML* ca clasa tuturor claselor cu n membri: în consecință, a spune că o clasă x conține n membri revine la a spune, pur și simplu, că $x \in n$. Aici, teoria nu prezintă acest avantaj. Totuși putem defini clasa # n a tuturor claselor cu n membri, făcînd uz de teoria puterilor relațiilor stabilită în § 47 din *ML*. Definiția împreună cu consecințele sale poate fi anexată la § 49 și numerotată în mod corespunzător.

Din punct de vedere intuitiv [7], n este numărul lui x, dacă putem cupla membrii lui x unul cîte unul, cu toate numerele naturale z, astfel încît $0 < z \leqslant n$, x însuși cuplîndu-l cu 0. Definiția formală a lui # n se dovedește a fi cît se poate de clară:

*D*49. '$\mathfrak{S}$' pentru '$x\hat{w}\ (\exists y)(y \in x . w = x \cap \overline{\imath y})$'.

*D*50. '#z' pentru '$\mathfrak{S}^{z}{}^{\iota}\Lambda$'.

Teoremele pot fi derivate apoi cu ajutorul teoremelor în legătură cu puterile relațiilor. În locul celor patrusprezece teoreme menționate mai sus †618—†620, †622, †623, †625—†629, †638—†641, avem respectiv †730—†732, †734, †733, †735—†739, †740—†743 după cum urmează:

†730. $(x)(z) \quad z \in Nn . \supset : x \in \#(S`z) . \equiv . (\exists y)\,(y \in x . x \cap \overline{\imath y} \in \# z) .$

$$x \in \mathrm{V}.$$

Demonstrație. *685 $z \in Nn . \supset . \mathfrak{S}^{s}{}^{z} = \mathfrak{S} \mid (\mathfrak{S}^{z})$

*226 $\supset . (\mathfrak{S}^{s}{}^{z})`` {}^{\iota}\Lambda = (\mathfrak{S} \mid (\mathfrak{S}^{z}))`` {}^{\iota}\Lambda$

*495, *224 (&*D*50) $\supset . \# (S`z) = \mathfrak{S}``(\#z)$

[7] După cum se pare, am fi putut să definim matricea 'xNy', fără să recurgem la puterile relațiilor, după cum urmează:

'$x_n \subset y$' pentru '$(\exists z)\ (\lambda_w(z\,w)``y = x)$', '$x_n = y$' pentru

'$x_n \subset y . y_n \subset x$', '$x\,N\,y$' pentru '$x \in Nn . * \in ``x_n = y$'.

Derivarea teoremelor căutate cu această definiție este însă dificilă.

*223 $\supset : x \in \#(S`z) . \equiv . x \in \mathfrak{S}``(\#z)$

* 230 (&D28), *123 $\supset : x \in \#(S`z) . \equiv . (\exists w)(\mathfrak{S}(x, w)$
$w \in \#z) . x \in V$

*433(&D49), *123 $\supset : x \in \#(S`z) . \equiv . (\exists w)(x, w \in V . (\exists y)$
$(y \in x . w = x \cap \overline{\imath y}) . w \in \#z) . x \in V$

*158, *123 $\supset : x \in \#(S`z) . \equiv . x \in V . (\exists w)(w \in V . (\exists y)$
$(y \in x . w = x \cap \overline{\imath y}) . w \in \#z) . x \in V$

*100, *123 $\supset : x \in \#(S`z) . \equiv . (\exists w)((\exists y)(y \in x .$
$w = x \cap \overline{\imath y}) . w \in V . w \in \#z) . x \in V$

†191, *123 $\supset : x \in \#(S`z) . \equiv . (\exists w)((\exists y)(y \in x .$
$w = x \cap \overline{\imath y}) . w \in \#z) . x \in V$

* 158, * 123 $\supset : x \in \#(S`z) . \equiv . (\exists w)(\exists y)(y \in x .$
$w = x \cap \overline{\imath y} . w \in \#z) . x \in V$

*138, * 123 $\supset : x \in \#(S`z) . \equiv . (\exists y)(\exists w)(y \in x .$
$w = x \cap \overline{\imath y} . w \in \#z) . x \in V$

* 158, *123 $\supset : x \in \#(S`z) . \equiv . (\exists y)(y \in x . (\exists w)$
$(w = x \cap \overline{\imath y} . w \in \#z)) . x \in V$

* 234 b, *123 $\supset$ R730.

†731. $(x)(z)$ $z \in Nn . x \in \#(S`z) . \supset (\exists y)(y \in x . x \cap \overline{\imath y} \in \#z)$.

†732. $(x)(z)$ $z \in Nn . y \in x . x \cap \overline{\imath y} \in \#z . x \in V . \supset . x \in \#(S`z)$.

Demonstraţiile lui **†731** şi **†732** din **†730** rezultă imediat, utilizînd ***100** şi ***135**.

†733. (x) $x \in \#0 . \equiv . x = \Lambda$.

Demonstraţie.

†682, *224(&D50) $x \in \#0 . \equiv . x \in I``\imath\Lambda$

†558, * 224 $\equiv . x \in \imath\Lambda$

†345 $\equiv . [370 .] x = \Lambda$.

734. $\Lambda \in \#0$ *Demonstraţie:* †733, †182.

735. $\# 1 = \hat{x}(\exists y)(y \in x . x \subset \imath y)$.

Demonstrație.

†683 $[632 \supset .] \mathfrak{S}^{s`0} = \mathfrak{S}^0 \mid \mathfrak{S}$

†682, *227 $= I \mid \mathfrak{S}$

†559 $= \mathfrak{S}$

†182 (& *D*50) $\# 1 = \mathfrak{S}^{1``}{}_{\iota}\Lambda$

†621 (&*D*36), * 227 $= \mathfrak{S}^{s`0}{}``{}_{\iota}\Lambda$

(1), *227 $= \mathfrak{S}``{}_{\iota}\Lambda$

†182(&*D*28) $= \hat{x}\ (\exists w)(\mathfrak{S}(x, w) . w \in {}_{\iota}\Lambda)$

*433, *188 (& *D*49) $= \hat{x}(\exists w)(x, w \in V . (\exists y)(y \in x . w = x \cap \overline{\iota y}) . w \in {}_{\iota}\Lambda)$

* 246 $= \hat{x}(\exists w)(w \in V . (\exists y)(y \in x . w = x \cap \overline{\iota y}) . w \in {}_{\iota}\Lambda)$

*100, *188 $= \hat{x}(\exists w((wy)(y \in x . w = x \cap \overline{\iota y}) . w \in V . w \in {}_{\iota}\Lambda)$

†191, *188 $= \hat{x}(\exists w)((\exists y)(y \in x . w = x \cap \overline{\iota y})(. w \in {}_{\iota}\Lambda)$

*158, *188 $= \hat{x}(\exists w)(\exists y)(y \in x . w = x \cap \overline{\iota y} . w \in {}_{\iota}\Lambda)$

*138, *188 $= \hat{x}(\exists y)(\exists w)(y \in x . w = x \cap \overline{\iota y} . w \in {}_{\iota}\Lambda)$

* 158, *188 $= \hat{x}(\exists y)(y \in x . (\exists w)(w = x \cap \overline{\iota y} . w \in {}_{\iota}\Lambda)$

*234 b, *188 $= \hat{x}(\exists y)(y \in x . x \cap \overline{\iota y} \in {}_{\iota}\Lambda)$

*345, *188 $= \hat{x}(\exists y)(y \in x . [370 .] x \cap \overline{\iota y} = \Lambda)$

*321, * 188 $= \hat{x}(\exists y)(y \in x . x \subset \overline{\iota y})$

†275, * 227 $= R\ 735.$

†736—739 rezultă din **†735** la fel cum **†626—629** rezultă din **625**, exceptînd faptul că '1' devine '#1'.

†740. $(w)(x)(y)(z)$ $z \in Nn . \supset :: y, w \in x . x \in V . x \cap \overline{\iota w} \in z \# x . \supset . x \cap \overline{\iota y} \in \# z$

†741. $(x)(y)(z)$ $z \in Nn . y \in x . \cap : x \in \#(S^{`}z) . \equiv . x \cup \overline{\iota y} \in \# z . x \in V$

†742. $(x)(y)(z)$ $z \in Nn . y \in \bar{x} . \supset :: x \cup {}_{\iota}y \in V . x \in \# z . \equiv . x \cup {}_{\iota}y \in \#(S^{`}z)$

†743. $(x)(y)(z)$ $z \in Nn . \supset :: x \in \# z . y \in \# z . x \subset y . \supset . x = y.$

Demonstrațiile lui †740—743 sînt asemănătoare celor ale teoremelor †638—641 în *ML* cu unele complicații neînsemnate, ca înlocuirea lui '$z \in V$' prin '$z \in Nn$' și a lui '$\in z$' prin '$\in \# z$'.

Am omis aproape integral §§ 45—46 din *ML*, privitoare la mulțimile contor și infinitudine. O teorie a mulțimilor contor ca cea dată în *ML* nu poate fi obținută, după cum se pare, în această variantă revizuită, așa cum trebuie să ne așteptăm, avînd în vedere faptul că axiomele noastre nu garantează nici măcar un element cu mai mult decît doi membri. În fapt, pentru orice număr natural, n, putem concepe clasa ${}_*\epsilon'' n$ în calitate de mulțime contor a acestui număr în cadrul teoriei noastre. Prin urmare, Λ, $\iota\Lambda$, $\iota\Lambda \cup u\Lambda$, $\iota\Lambda \cup u\Lambda \cup uu\Lambda$ sînt respectiv mulțimile contor pentru 0, 1, 2, 3. Dificultatea este însă că nu știm despre nici o clasă cu mai mult de 2 membri (de exemplu, clasa $\iota\Lambda \cup u\Lambda \cup uu\Lambda$) dacă este element sau nu. În consecință, sîntem privați de privilegiul definirii clasei tuturor acestor mulțimi contor, întrucît membrii oricăror clase trebuie să fie elemente (conform cu †190). În mod similar, în absența unei alte axiome privitoare la proprietatea de a fi element, funcția $\lambda_x({}_*\epsilon'' x)$, în virtutea lui †536, nu va da neapărat mulțimea contor dorită pentru orice x mai mare ca 2.

În § 46 din *ML*, clasa Fin a tuturor claselor finite este identificată cu clasa tuturor membrilor numerelor naturale și se demonstrează existența unor elemente infinite. În cadrul teoriei prezente, nu avem nici o garanție că clasa $\hat{x}(\exists y)(x \in \# y)$ ne-ar da clasa căutată Fin. Mai mult, o demonstrație în cadrul teoriei noastre revizuite pentru existența oricărui element infinit depășește, fără îndoială, posibilitățile noastre, avînd în vedere că nu putem demonstra nici măcar existența vreunui element cu trei membri.

Cu toate acestea, știm că avem o infinitate de elemente și utilizînd noțiunile de mai mare și mai mic definite pentru numerele naturale, sîntem în măsură să obținem *axioma infinitului* în una dintre numeroasele sale forme, pe bază celor trei teoreme care urmează

*D*41, $\quad$ '$x < y$' pentru '$x, y \in Nn \,.\, ({}_*\epsilon \mid \epsilon)(x, y)$'.

665. $(x)(y)(z) \quad x < y \,.\, y < z \supset .\, x < z.$

Demonstrație. *100(&*D*41) $x < y \,.\, y < z \supset .\, x, z \in Nn \,.\, ({}_*\epsilon \mid \epsilon)(x, y) \,.\, ({}_*\epsilon \mid \epsilon)(y, z)$ (1)

†519 $\quad {}_*\epsilon \mid \epsilon \subset {}_*\epsilon$ (2)

†446 $\quad [2 \eqsim](x)(y)(({}_*\epsilon \mid \epsilon)(x, y) \supset {}_*\epsilon(x, y))$ (3)

* 116 $\quad [3 \supset .\,]({}_*\epsilon \mid \epsilon)(x, y) \supset {}_*\epsilon(x, y)$ (4)

*100 $\quad [1 \,.\, 4 \,.\,] x < y \,.\, y < z \,.\, \supset .\, x, z \in Nn \,.\, {}_*\epsilon(x, y) \,.\, ({}_*\epsilon \mid \epsilon)(y, z)$

*135 $\quad \supset (\exists y)(x, z \in Nn \,.\, {}_*\epsilon(x, y) \,.\, ({}_*\epsilon \mid \epsilon)(y, z))$

*158 $\quad \supset .\, x, z \in Nn \,.\, (\exists y)({}_*\epsilon(x, y) \,.\, ({}_*\epsilon \mid \epsilon)(y, z))$

†486, *123 $\quad \supset .\, x, z \in Nn \,.\, ({}_*\epsilon \mid ({}_*\epsilon \mid \epsilon))(x, z)$

†491, *224 $\supset . x, z \in Nn . ((_*\in|_*\in)|\in)(x, z)$

†517, *224(&D41) $\supset . x < z$

†666. (x) $x \in Nn . \supset (\exists y)(x < y)$.

Demonstrație

†190 $x \in Nn . \supset . x \in V$

†555 $\supset I(x, x)$

†566 $\supset \in(x, \imath x)$ (1)

†512 $\in \subset_* \in | \in$ (2)

†446 $[2 \equiv](x)(w)(\in(x, w) \supset (_*\in|\in)(x, w))$ (3)

*233 $[3 \supset .] \in(x, \imath x) \supset (_*\in|\in)(x, \imath x)$ (4)

†614, *224 $[631 \equiv :] x \in Nn . \supset . \imath x \in Nn$ (5)

* 100 (&D41) $[1 . 4 . 5 . \supset :] x \in Nn . \supset . x < \imath x$

* 232 $\supset (\exists y)(x < y)$

†667. (x) $\sim (x < x)$.

Demonstrație

†564 $\in(x, \Lambda) \equiv . x \in \Lambda$ [. 370] (1)

* 100 $[1 . 192 . \supset] \sim (_*\in(\Lambda, x) . \in(x, \Lambda))$ (2)

* 131 $\sim (\exists x)(_*\in(\Lambda, x) . \in(x, \Lambda))$ [≡ (x)2] (3)

†486, *123(&D36) $\sim (_*\in|\in)(0, 0)$ [≡ 3] (4)

†564 $\in(y, \imath x) \equiv . y \in \imath x$ [. 372] (5)

*223 $x = y . \supset . _*\in(\imath x, x) \equiv _*\in(\imath x, y)$ (6)

*100, *163 $(\exists y)(_*\in(\imath x, y) . \in(y, \imath x)$ [. 5 . 6 . 555 . 345])

$\supset . I(x, x) . _*\in(\imath x, x)$

†566, * 123 $\supset . \in(x, \imath x) . _*\in(\imath x, x)$

†487 $\supset (\in|_*\in)(x, x)$

†524, *224 $\supset (_*\in|\in)(x, x)$ (7)

*100 $[7 .] \sim (_*\in|\in)(x, x) . \supset \sim (\exists y)(_*\in(\imath x, y) . \in(y, \imath x))$

†486, *123 $\supset \sim (_*\in|\in)(\imath x, \imath x)$

* 614, *224 $\supset \sim (_*\in|\in)(S^{\iota}x, S^{\iota}x)$ (8)

$$*636 \qquad [(x)\,8\,.\,4\,.\,]\ x\in Nn\,.\supset\sim({}_*\epsilon|\epsilon)\,(x,\ x)$$

$$*100(\&D41) \qquad \supset\sim(x<x) \tag{9}$$

$$*100\ (\&D41) \qquad x\widetilde{\in}Nn\,.\supset\sim(x<x) \tag{10}$$

$$*100 \qquad [9\,.\,10\,.\,\supset]\sim(x<x).$$

2.3. Model și Enumerare a Elementelor

Este clar că axioma noastră asupra proprietății de a fi element este cît se poate de incompletă; cu alte cuvinte, există numeroase enunțuri cu privire la proprietatea de a fi element pe care nu le putem nici demonstra, nici infirma în cadrul teoriei noastre. Un exemplu simplu îl constituie enunțul '$\iota\Lambda\cup u\Lambda\cup u\iota\Lambda\in V$'. În mod corespunzător, există numeroase entități despre care nu știm dacă sînt elemente, iar problema unei enumerări a *tuturor* entităților care sînt elemente nici nu intră în discuție. Cu toate acestea, entitățile despre care știm că sînt elemente conform axiomei noastre sînt numărabile.

Așa cum am demonstrat mai sus, †300(E*A*6) și conjuncția lui *EA*4 și *EA*5 sînt deductibile una din alta cu logica de bază. Astfel, să admitem că am adoptat *EA*4 și *EA*5 în locul lui †300 ca axiome asupra proprietății de a fi element. *EA*4 afirmă, într-adevăr, că Λ este un element. *EA*5 are ca urmare faptul că orice clasă avînd două elemente (identice sau diferite) ca singurii săi membri, este ea însăși un element. Se poate vedea că, plecînd de la Λ, sîntem în măsură să generăm toate elementele alese ale teoriei noastre prin formarea sumei logice a claselor unitate a oricăror două elemente precedente (identice sau diferite).

Luăm Λ ca primul element. Să reprezentăm primul element, al doilea, al treilea, al patrulea etc., respectiv prin 1, 2, 3, 4 etc. și să convenim că $\sigma(m, n)$ reprezintă suma logică $\Sigma(m, n)$ a claselor unitate a celui de al m-lea respectiv al n-lea element. Pare natural să enumerăm aceste elemente, astfel încît $\sigma(1,1) = 2$, $\sigma(1,\ 2) = 3$, $\sigma(2,\ 2) = 4$, $\sigma(1,\ 3) = 5$, $\sigma(2,\ 3) = 6$, $\sigma(3,\ 3) = 7$, $\sigma(1,4) = 8$, $\sigma(2,\ 4) = 9$ etc. Formula generală pentru enumerare se dovedește a fi foarte simplă:

$$\sigma(n-\mathrm{i},\ n\,(=1+(n(n+1)/2)-\mathrm{i}$$

$$(n=\mathrm{i},\ 2, 3, \ldots,\ \mathrm{i}=n-1,\ n-2, \ldots,\ \mathrm{i},\ 0).$$

Este evident că enumerarea epuizează într-adevăr elementele alese garantate de *EA*4 și *EA*5. Pe de altă parte, faptul că nici un element nu este enumerat de mai multe ori putea fi constatat conform †354 din *ML*. Fie M, M', N, N' elemente oarecare, reprezentate respectiv prin m, m' n, n', și să presupunem că $\Sigma(m, n) = \Sigma(m', n')$. În virtutea formulei noastre pentru enumerare, știm atunci că $m \leqslant n$ și $m' \leqslant n'$. Dar în aceste condiții, †354 ne permite să conchidem că $M = M'$ și că $N = N'$. Întrucît însă nu există două numere pozitive întregi mai mici ca 10 (să spunem) care să reprezinte același element, obținem concluzia ca $\Sigma(m, n) = \Sigma(m', n')$ dacă și numai dacă $m = m'$ și $n = n'$. De asemenea, pentru oricare două elemente P și Q reprezentate prin p și q, $P\in Q$, dacă și numai dacă $(\exists\, n)\,(n \geqslant 0\,.\,q = 1 + n(n+1)/2 - (n-p))$.

Să construim acum un model pentru varianta noastră revizuită a sistemului din *ML*.

Ne putem aminti că axiomele teoriei noastre constau din cele ale logicii de bază, plus o singură axiomă asupra proprietății de a fi element. Aceste axiome sînt date în cele opt enunțuri: *100 — *104, *201, *202 și †300. În cele ce urmează vom subînțelege întotdeauna că conectivele propoziționale și cuantorii își păstrează interpretarea lor normală.

Ceea ce trebuie să remarcăm, în primul rînd, este faptul că sistemul revizuit, modificat prin abandonarea lui *202 ar fi adevărat cu privire la un univers în care singurele entități sînt cele λ_0 elemente enumerate mai sus. Acest fapt poate servi ca o indicație că *202 este independentă de celelalte axiome, după cum poate servi și ca ghid în încercarea noastră de a găsi un model. Întrucît *202 ne asigură de fapt că pentru orice agregat de elemente există în cadrul universului o entitate avînd ca membri toate acele elemente și numai acele elemente, tot ce avem de făcut pentru obținerea modelului este să lărgim universul astfel, încît acesta să conțină nu numai elementele enumerate mai sus, ci și toate clasele avînd unele sau toate elementele ca membri ai lor.

Dintre toate clasele de elemente, acele care nu au mai mult ca doi membri sînt ele însele elemente, în timp ce toate celelalte clase de elemente sînt nonelemente. Am reprezentat deja elementele prin întregi pozitivi. Pentru obținerea reprezentărilor aritmetice ale non-elementelor, să considerăm un șir infinit arbitrar ai cărui termeni sînt toți, în exclusivitate, sau 0, sau 1. Orice șir infinit de acest fel va fi numit șir bivalent. Spunem că un șir bivalent s reprezintă o clasă C de elemente, dacă (n) $((\exists x)$ $(x \in C \,.\, (x$ este reprezentat prin $n)) \equiv (\text{al } n\text{-lea termen al lui } s \text{ este } 1))$. În mod corespunzător, atunci cînd P este un element reprezentat de p și Q este un nonelement reprezentat de q, '$P \in Q$' este adevărat dacă și numai dacă al p-lea termen al lui q este 1. Se poate vedea că clasele nonelemente de elemente sînt reprezentate, una cîte una, de acele șiruri bivalente, în care mai mult decît doi termeni au valoarea 1.

Toate șirurile bivalente *de acest fel* și toate numerele pozitive întregi, luate împreună, ne oferă astfel un model pentru univers, pentru care axiomele noastre ar fi adevărate — cu singura condiție ca să admitem (pe lîngă condițiile de adevăr menționate mai sus pentru enunțul '$P \in Q$', atunci cînd P este un element) că clasele unitate ale oricărui nonelement vor fi reprezentate întotdeauna prin 1, adică vor fi V, și că '$P \in Q$' este fals pentru fiecare nonelement P.

Faptul că acesta este într-adevăr cazul, se poate constata prin examinarea axiomelor date de *201, *202 și †300; căci este intuitiv clar că toate axiomele cuantificării ar fi adevărate cu privire la acest univers.

Dar *201 nu spune mai mult decît că, dacă două entități oarecare x și y au aceleași elemente ca membri, atunci ele au aceiași membri și $(z)((x$ este un membru al lui $z) \equiv (y$ este un membru al lui $z))$. Iar faptul că †300 ar fi adevărat cu privire la acest univers specific se poate vedea trecînd în revistă deducția sa din *EA*4 și *EA*5 cu logica de bază, teorema crucială utilizată acolo fiind

†343. $\qquad (x) \quad x \cong \mathrm{V} \,.\equiv.\, \imath x = \Lambda.$

* 202 ar fi, de asemenea, adevărat cu privire la acest univers, deoarece în cadrul enunțului '$(\exists y)\ (x)\ x \in y \,.\equiv.\, x \in V \,.\, \ldots, x \ldots)$', '$x \in y$' și '$x \in V \,.\, \ldots\ x \ldots$' au întotdeauna aceeași valoare de adevăr (și anume falsitatea) atunci cînd x este un nonelement și avem într-adevăr *toate* clasele de elemente în cadrul universului (descris mai sus)[8].

În treacăt, putem observa că modelul servește la indicarea independenței anumitor axiome.

Astfel, $EA3$ (și o dată cu ea, axioma mai puternică $EA2$) este după cum se poate constata, independentă de axiomele noastre, deoarece adevărul lui $EA3$ ar cere ca, de exemplu, $\iota\Lambda \cup \iota\iota\Lambda \cup \iota\iota\iota\Lambda$ (reprezentat prin șirul infinit în care primul, al patrulea și al unsprezecelea termen iau toți valoarea 1, iar toți ceilalți termeni iau valoarea 0) să fie un element.

Independența lui †300 în sistemul nostru revizuit ar putea fi indicată reconstruind, de exemplu, $\iota\Lambda \cup \iota\iota\Lambda$ (reprezentat prin 3) ca nonelement și identificînd toate acele nonelemente care diferă între ele numai prin faptul că al treilea termen al lor diferă. †300 nu ar fi adevărat cu privire la acest univers denaturat, deoarece $\iota\Lambda \cup \iota\iota\Lambda$ ar fi un nonelement, deși Λ și $\iota\Lambda$ sînt elemente.

Independența lui *202 a fost menționată mai sus. Acum, modificînd puțin modelul, se poate arăta că și *201 este independentă de celelalte axiome ale noastre. În acest scop, adăugăm modelului nostru aritmetic șirul infinit ai cărui termeni iau toți valoarea 0 și cerem ca el să reprezinte un nonelement X. Admitem că '$X \in X$' este întotdeauna fals, oricare ar fi x. Atunci X și Λ ar fi identice în sensul că $(x)\ (x \in X \,.\equiv.\, x \in \Lambda)$; însă '$\Lambda \in \iota\Lambda$ este adevărat, pe cînd '$X \in \iota\Lambda$' ar fi fals, deoarece X este nonelement.

§ 3. O BAZĂ DE TEORIA MULȚIMILOR PENTRU NUMERELE REALE

3.1. Introducere [9]

În [1] am considerat un anumit sistem L, arătînd că deși axiomele sale sînt considerabil mai slabe decît cele din [2], sistemul este suficient pentru obiectivele vizate de problemele tratate în [2]. Scopul acestui articol este să analizeze mai minuțios sistemul L și să arate că în cadrul său se poate obține și teoria obișnuită a numerelor reale, dacă alegem definiții corespunzătoare pentru numere. În acest scop, vom arăta că în L putem demonstra o anumită mulțime de douăzeci de axiome utilizate de către Tarski, axiome suficiente pentru aritmetica numerelor reale și care fac ca mulțimea numerelor reale să formeze un cîmp ordonat complet [10]. De fapt, în L nu putem demonstra toate cele douăzeci de axiome ale lui Tarski în întreaga lor generalitate. Una dintre ele, care afirmă că fiecare clasă mărginită de numere reale posedă cea mai mică margine superioară, nu poate fi demonstrată decît ca meta-

[8] Toate simbolurile definite în axiomele noastre le-am fi putut reduce la conective propoziționale și cuantori plus '$\in$', stipulînd doar condiții formale de adevăr pentru schema $\ulcorner \zeta \in \eta \urcorner$ termeni ai modelului nostru aritmetic — indicînd prin aceasta consistența axiomelor noastre destul de slabe, relativ la o teorie clasică a numerelor reale.

[9] Acest articol constituie o parte din teza de doctorat prezentată Departamentului de Filozofie de la Universitatea Harvard, în aprilie 1948.

[10] Vezi pp. 213—235 din [3] și, de exemplu, p. 64 din [4].

teoremă care afirmă că orice clasă mărginită *denumibilă* de numere reale poseda o margine superioară minimă. Toate celelalte nouăsprezece axiome se pot demonstra însă în L fără nici o modificare.

Acest rezultat poate prezenta un anumit interes, deoarece axiomele lui L sînt considerabil mai slabe ca axiomele utilizate îndeobște în același scop. În L, variabilele trebuie să ia ca valori numai clase avînd ca membri cel mult doi membri. Cu alte cuvinte, numai clasele cu nu mai mult ca doi membri sînt elemente. Pe de altă parte, de regulă, în vederea dezvoltării aritmeticii numerelor naturale, se presupune că toate clasele finite sînt elemente și, în vederea dezvoltării aritmeticii numerelor reale, se presupune că toate clasele numărabile sînt elemente.

3.2. Sistemul L.

În dezvoltarea lui L este presupusă, de la bun început, logica elementară (respectiv teoria funcțiilor de adevăr și a cuantorilor). Singurul primitiv adițional este predicatul cu două locuri cu care putem genera, în maniera uzuală, formule ale lui L, plecînd de la variabile și operatori logici. Definițiile uzuale (de exemplu, D9-D35 din [2]) ale teoriei claselor și relațiilor sînt presupuse. În particular, fie $\imath x$ desemnarea clasei unitate a lui x, fie $x \cup y$ desemnarea clasei sumă a lui x și y și fie V desemnarea clasei tuturor elementelor. Axiomele lui L sînt date prin următoarele trei enunțuri:

M_1. $$\imath x \cup \imath y \in V.$$

$M2$. $$x = y \supset . x \in z \supset y \in z.$$

$M3$. Dacă φ este o formulă din L, în care y nu este liber, atunci

$$\vdash (\exists y)\,(x)\,(x \in y \equiv . x \in V . \Phi).$$

$M1$ afirmă că toate clasele cu nu mai mult decît doi membri sînt elemente. $M2$ este principiul extensionalității. $M3$ afirmă că pentru orice formulă logică φ există o clasă de elemente definită de ea. Acest principiu (care constituie un ghem infinit de axiome) servește la aducerea claselor în domeniul variabilelor.

Fiind dată $M2$, se poate demonstra în logica elementară că: dacă $x = y$ (adică, potrivit definiției $D =$ a identității din [2], $(z)\,(z \in x \equiv z \in y)$) și dacă ψ este formată din φ prin punerea lui y în locul unor ocurențe ale lui x, atunci avem $\varphi \equiv \psi$ (cf. *224 din [2]). Cu alte cuvinte, fiind dat un sistem care conține conectivul apartenenței $\in$ ca unică primitivă din afara logicii elementare, dacă adoptăm $M2$ și utilizăm $D =$ ca definiția identității atunci x este identic cu y, dacă și numai dacă nu există nici o modalitate de exprimare în sistem a unei diferențe între x și y. Aceasta arată că definiția $D =$ concordă cu principiul identificării indiscernabililor.

Axioma $M1$, dacă se adaugă la $M2$ și $M3$, are printre alte consecințe și cele de mai jos (care sînt †372 respectiv †410, †411 din [1] și [2]), în cadrul cărora $x \,;\, y$ desemnează perechea ordonată a lui x și y:

$C1$. $$\imath x \in V.$$

$C2$. $$z \in x \,;\, y \equiv . z = \imath x V z = \imath x \cup \imath y.$$

$C3$. $$x \,;\, y \in V.$$

C1 ne garantează că toate clasele unitate sînt elemente; în conformitate cu aceasta, dacă definim — cum am făcut în [1] — numerele naturale ca clase unitate de un gen special, atunci ea ne garantează că toate numerele naturale sînt elemente. Analog, C_3 ne garantează că toate perechile ordonate sînt elemente; ca atare, dacă definim — cum vom face în acest articol— numerele raționale ca un anumit gen de perechi ordonate de numere naturale, $C3$ ne garantează că toate numerele raționale sînt elemente.

Conform lui $C2$, pentru orice elemente x, y, z, w, dacă $x;y = z;w$, atunci $x = z$ și $y = w$. Se poate observa că $C2$ poate fi folosit pentru înlocuirea lui $M1$ în L. Cu alte cuvinte, $M1$ și $C2$ sînt reciproc deductibile pe baza logicii elementare plus $M2$ și $M3$. Observația este demnă de luat în seamă, deoarece $C2$ constituie proprietatea fundamentală a perechilor ordonate. Derivarea lui $C2$ din $M1$ a fost descrisă în [1]; Derivarea lui $M1$ din $C2$ este imediată, dacă ne aducem aminte de definiția lui $x;y$ (pentru $\iota x \cup \iota(\iota x \cup \iota y)$) și observăm că $C4$ de mai jos (†348 din [2]) poate fi demonstrată în L fără utilizarea lui $M1$:

$$C4. \qquad (x)\,(z \in \iota x \cup \iota y \equiv . z = x \vee z = y) \equiv . x \in \mathrm{V} . y \in \mathrm{V}.$$

În [2], pentru garantarea faptului că numerele naturale sînt elemente, este necesară o aserțiune specială †610, cum că succesorul unui element este element. În L, conform cu $C1$, numerele naturale sînt elemente. În orice caz, pentru obținerea aritmeticii numerelor naturale, este necesar, după cum se pare, să postulăm că numerele naturale sînt elemente. Totuși, dacă avem în vedere dezvoltarea unei teorii cu privire la un anumit gen de clase, nu este întotdeauna necesar să admitem că aceste clase sînt elemente. Uneori este posibil să postulăm doar că ceea ce considerăm a fi membri ai unei atare clase sînt elemente. Așadar, în cele ce urmează, vom defini numerele reale ca un gen anumit de clase de numere raționale și vom dezvolta apoi aritmetica numerelor reale fără să presupunem că numerele reale sînt elemente. Aceasta este posibil, deoarece aici ne interesează, în primul rînd, numerele reale și nu clasele de numere reale.

Pasul făcut prin refuzul de a postula că numerele reale sînt elemente se soldează cu anumite consecințe. În primul rînd, sîntem lipsiți de clasa NR a numerelor reale. De regulă, definim mai întîi NR, iar după aceea începem formularea fiecărei teoreme privitoare la numerele reale cu o clauză ca $x \in NR . y \in NR$. Dar întrucît numerele reale pot fi nonelemente, există pericolul ca toate enunțurile care încep cu niște clauze ca $x \in NR . y \in NR$ să devină eventual demonstrabile în mod banal, pe baza teoremei lui L (*230 din [2]):

$$x \in \hat{x}\,\Phi = . x \in \mathrm{V} . \Phi.$$

Sîntem constrînși să definim matricea propozițională $NR(x)$ în mod direct, iar apoi să începem teoremele privitoare la numere reale cu clauze ca $NR(x) . NR(y)$. Această deplasare de la $x \in NR$ la $NR(x)$ prezintă avantajul că în timp ce $x \in NR$ este infirmabil pentru orice nonelement x, $NR(x)$ poate fi demonstrabil pentru anumite nonelemente x. O a doua consecință a pasului nostru este legată de teorema celei mai mici margini superioare, teorema care, spre deosebire de alte legi obișnuite ale aritmeticii reale, se referă explicit la clasele de numere reale în loc de a se referi numai la numere reale individuale. În consecință, așa cum am menționat mai sus, această teoremă nu

poate fi demonstrată în L în deplina ei generalitate, deoarece nu putem vorbi efectiv despre *toate* aceste clase în L.

Evident, sistemul L este incomplet în privința axiomelor sale referitoare la proprietatea de a fi element. Într-adevăr, pentru orice clasă cu mai mult de trei membri, nu putem decide în L, dacă ea este un element sau nu este un element (cf. [1], p. 135). Putem totuși să punem chestiunea dacă sistemul este completabil prin aceste axiome. Răspunsul se divide în două părți. Pe de o parte, este demonstrabil că sistemul este incompletabil prin aceste axiome[11]. Într-adevăr, dacă în cadrul sistemului L ar fi demonstrabil sau infirmabil orice enunț cu privire la proprietatea de a fi element, atunci, contrar teoremei lui Gödel, *orice* enunț Φ ar fi demonstrabil sau infirmabil, deoarece în L (utilizînd notația din [2] și [1]),

$$\vdash \Phi \equiv . \hat{x}(x \widetilde{\in} x . \sim \Phi) \in \mathrm{V}.$$

Demonstrație.

†260	$\hat{x}(x \widetilde{\in} x) \widetilde{\in} \mathrm{V}$	(1)
*100. *117 (&hp)	$\sim \Phi \supset (x)\,(x \widetilde{\in} x \equiv . x \widetilde{\in} x . \sim \Phi)$	
*121	$\supset :: [1 \equiv .]\, \hat{x}(x \widetilde{\in} x . \sim \Phi) \widetilde{\in} \mathrm{V}$	(2)
*100, *117 (&hp)	$\Phi \supset (x) \sim (x \widetilde{\in} x . \sim \Phi)$	
*194	$\supset \hat{x}(x \widetilde{\in} x . \sim \Phi) = \Lambda$	
*223	$\supset :: \hat{x}(x \widetilde{\in} x . \sim \Phi) \in \mathrm{V}\,[. \equiv 370]$	(3)
*100	$[3 . 2 . \supset ::]\, \Phi \equiv . \hat{x}(x \widetilde{\in} x . \sim \Phi) \in \mathrm{V}.$	

Pe de altă parte, se pare că avem un sistem complet de axiome cu privire la proprietatea de a fi element, dacă adăugăm următoarele două axiome restrictive la sistemul L:

$M4.$ $\quad x \in \mathrm{V} \supset (y)\,(z)\,(z \in x . (w)\,(*\grave{\in}\,(\Lambda, w) \supset . w \in y) . \supset . z \in y)$

$M5.$ $\quad x \in \mathrm{V} \supset (\exists y)\,(\exists z)\ (x = \imath y \cup \imath z).$

În cadrul lui M4* $\grave{\in}\,(\Lambda, w)$ este o abreviere pentru aserțiunea că clasa vidă Λ este w, sau aparține la w, sau aparține la o clasă care aparține la w sau etc. Cu ajutorul lui $M4$ și $M5$ putem demonstra în L următoarea teoremă:

ET. $x \in \Lambda \equiv . x = \Lambda \vee (\exists y)(\exists z)(*\grave{\in}(\mathrm{V}, y) . *\grave{\in}\,(\Lambda, z) .$

$$(w)\,((w')\,(*\grave{\in}(\Lambda, w') \supset . w' \in w) \supset . y \in w . z \in w) .$$

$$x = \imath y \cup \imath z).$$

Potrivit lui ET, elementele lui L (întărit prin adăugarea axiomelor restrictive $M4$ și $M5$) sînt tocmai clasele Λ, $\imath\Lambda$, $\Lambda\imath \cup \imath\imath\Lambda$ etc., enumerate în

[11] Demonstrația care urmează este o modificare a demonstrației lui Quine pentru sistemele în care V este un element. Vezi p. 140 din [5].

[1] (cf. pp. 135—136). În consecință, putem decide dacă o clasă este sau nu element, în cazul cînd putem decide dacă membrul drept al lui ET este adevărat sau nu; iar axiomele lui L cu privire la proprietatea de a fi element sînt incompletabile numai în sensul că trebuie să existe o formulă Φ cu x ca singură variabilă liberă a sa, pentru care este formal indecidabil, dacă clasa elementelor x care satisfac Φ este sau nu identică cu unul din elementele enumerate în [1].

3.3. Numerele reale

Trecem acum la descrierea modului în care putem opera adecvat în L cu numere naturale, numere raționale și numere reale[12].

Utilizînd punctul de plecare obținut în [1], putem demonstra în cadrul lui L toate teoremele familiare ale aritmeticii numerelor naturale, inclusiv teorema că fiecare clasă de numere naturale conține un membru cel mai mic. În L putem defini, de asemenea, și noțiunea de „cel mai mic număr x astfel încît --x--", prescurtată uneori prin μ_x(--x--). Conform $M3$, $(\exists y)\ (x)\ (x \in y \equiv . x \in \in V . \text{--}x\text{--})$. Întrucît numerele naturale sînt elemente și întrucît în ce privește orice matrice --x-- ne interesează în primul rînd cel mai mic *număr* care o satisface, este convenabil să considerăm $\mu_x(x \in y)$ sau, pur și simplu, μy în loc de μ_x (--x--). Aplicăm definiția[13]:

$D58.$ μy pentru $(\iota x)\ (x \in y . (n)\ (n \varepsilon y \supset n \geqslant x))$.

Conform acestei definiții, definiției $D17$ din [2] pentru simbolul descripției și definiției numerelor naturale din [1], $\mu y = 0$, atunci cînd nici un număr natural nu aparține clasei y. Putem demonstra, de asemenea, și: $(\exists m)\ (m \in y) \supset \mu y \in y$; $n \in y \supset n \geqslant \mu y$.

Dacă vrem ca numerele noastre raționale să fie elemente în L, nu putem identifica un număr rațional cu o clasă a tuturor perechilor ordonate de numere naturale aflate în același raport, deoarece nu se poate demonstra că aceste clase infinite de perechi ar fi elemente în L și nici nu avem nevoie, pentru ceea ce urmărim, ca numerele raționale să fie elemente. Un procedeu alternativ pe care îl vom adopta rezidă în identificarea unui număr rațional cu o pereche ordonată de numere prime între ele[14]. Utilizînd atare definiții, trebuie să dispunem de anumite teoreme privitoare la numerele prime între ele, pentru a fi în măsură să dezvoltăm teoria numerelor raționale. Urmează mai jos un ansamblu de definiții cu ajutorul cărora putem deriva teoria numerelor raționale.

[12] Vor fi omise detaliile formale ale dezvoltărilor teoriei acestor numere, dat fiind că ne putem convinge singuri cu ușurință, dacă studiem definițiile de mai jos, că aceste detalii ar putea fi date. Ele pot fi însă găsite în teza menționată la nota 1. Vezi și [6] în ce privește teoria numerelor prime și a numerelor raționale și [7] în ce privește derivarea teoriei numerelor naturale și reale.

[13] Definițiile sînt numerotate oarecum arbitrar, exceptînd faptul că se evită numerele utilizate deja în [1] și [2].

[14] Definiții similare sînt utilizate în [6].

*D*59. PI pentru $\hat{x}(x \in Nn \,.\, x \neq 0)$.

*D*60. $Prm\,(x,\ y)$ pentru $x,\ y \in Nn \,.\, (z)(w)(x')(z,\ w,\ x' \in Nn \,.\, x = z \times x' \,.\, y = w \times x' \,.\supset\, x' = 1)$.

*D*61. $(z,\ w)\ Prm(x,\ y)$ pentru $x \in Nn \,.\, y \in PI \,.\, Prm(z, w) \,.\, z \times y = x \times w$.

*D*62. x/y pentru $\hat{z}(\exists w)\,(\exists w')\,((w,\ w')\ \ Prm\ \ (x,\ y) \,.\, z \in w \,;\, w')$.

*D*63. $x_s > y$ pentru $(\exists z)\,(\exists z')\,(\exists w)\,(\exists w')\,(z,\ w \in Nn \,.\, z', w' \in PI \,.\, x = z/z' \,.\, y = w/w') \,.\, (z)\ (z')\ (w)\ (w')\,(z,\ w \in Nn \,.\, z',\ w' \in PI \,.\, x = z/z' \,.\, y = w/w' \,.\supset\, z \times w' > w \times z')$.

*D*64. $x_s \geqslant y$ pentru $x_s > y \vee x = y$.

*D*65. $x_s \leqslant y$ pentru $y_s \geqslant x$.

*D*66. $x_s < y$ pentru $y_s > x$.

*D*67. $x_s + y$ pentru $(\imath x')\ \ (z)\,(z')\,(w)\,(w')\ \ (z, w \in Nn \,.\, z',\ w' \in PI \,.\, x = z/z' \,.\, y = w/w' \,.\supset\, x' = (zw' + wz')/(z'w'))$.

*D*68. $x_s \times y$ pentru $(\imath x')\ (z)\ (z')\ (w)\ (w')\ (z,\ w \in Nn \,.\, z',\ w' \in PI \,.\, x = z/z' \,.\, y = w/w' \,.\supset\, x' = (zw)/(z'w'))$.

*D*69. ${}_s x$ pentru $(x/1)$.

*D*70. Ra pentru $\hat{w}(\exists x)\,(\exists y)\,(x \in Nn \,.\, y \in PI \,.\, w = x/y)$.

*D*71. PRa pentru $\hat{\boldsymbol{u}}(\exists x)\,(\exists y)\ \ (x,\ y \in P1 \,.\, u = x/y)$.

Atunci sîntem în măsură să derivăm aritmetica numerelor reale. Putem începe cu aritmetica numerelor reale nenegative, ale cărei definiţii sînt enunţate mai jos:

*D*72. $Nr(x)$ pentru $x \neq Ra \,.\, x = \hat{z}(z = {}_s 0 \vee (\exists y)\,(y \in x \,.\, y_s > z))$.

*D*73. $x_r > y$ pentru $Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, (\exists z)(z \in x \,.\, z \cong y)$.

*D*74. $x_r \geqslant y$ pentru $x_r > y \vee \,.\, Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, x = y$.

*D*75. $x_r < y$ pentru $y_r > x$.

*D*76 $x_r \leqslant y$ pentru $y_r \geqslant x$.

*D*77. $x_r + y$ pentru $\hat{\boldsymbol{u}}(\exists z)\,(\exists z')\,(z \in x \,.\, z' \in y \,.\, u = z_s + z')$.

*D*78. $x_r \times y$ pentru $\hat{\boldsymbol{u}}(\exists z)\,(\exists z')\,(z \in x \,.\, z' \in y \,.\, u = z_s \times z')$.

*D*79. r^x pentru $\hat{y}(y = {}_s 0 \vee x_s > y)$.

*D*80. $x_r - y$ pentru $(\imath z)\,(Nr(z) \,.\, x = y_r + z)$.

Utilizînd aceste definiții, putem demonstra în L următoarele douăzeci enunțuri:

$R1.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, \supset Nr(x_r + y).$

$R2.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, \supset Nr(x_r \times y).$

$R3.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, \supset x_r + y = y_r + x.$

$R4.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, Nr(z) \,.\, \supset x_r + (y_r + z) = (x_r + y)_r + z.$

$R5.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, \supset x_r \times y = y_r \times x.$

$R6.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, Nr(z) \,.\, \supset x_r \times (y_r \times z) = (x_r \times y)_r \times z.$

$R7.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, Nr(z) \,.\, \supset x_r \times (y_r + z) = (x_r \times y) + (x_r \times z).$

$R8.\ Nr({}_{rs}0).$

$R9.\ Nr({}_{rs}1).$

$R10.\ {}_{rs}1 \neq {}_{rs}0.$

$R11.\ Nr(x) \supset x_r + {}_{rs}0 = x.$

$R12.\ Nr(x) \supset x_r \times {}_{rs}1 = x.$

$R13.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, \supset \,.\, x = y \vee x_r > y \vee x_r < y.$

$R14.\ x_r > y \supset \sim (y_r > x).$

$R15.\ x_r > y \,.\, y_r > z \,.\, \supset x_r > z.$

$R16.\ Nr(x) \,.\, y_r > z \,.\, \supset x_r + y_r > x_r + z.$

$R17.\ x_r \geqslant y \supset (\exists z)\ (Nr(z) \,.\, x = y_r + z).$

$R18.\ x_r > {}_{rs}0 \,.\, y_r > z \,.\, \supset x_r \times y_r > x_r \times z.$

$R19.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, y \neq {}_{rs}0 \,.\, \supset (\exists z)\ \ (Nr(z) \,.\, x = y_r \times z).$

$R20.$ Dacă y, z nu sînt libere în Φ, atunci $\vdash (\exists x)\ \Phi \,.\, (\exists y)\ (x)\,.(\Phi \supset y_r \geqslant x) \,.\, \supset (\exists z)\ (Nr(z) \,.\, (y)\ (x)\ (\Phi \supset y_r \geqslant x) \equiv y_r \geqslant z))$.

Demonstrațiile pentru $R1-R20$ sînt destul de complicate, însă fără dificultăți de principiu. De exemplu, putem demonstra $R20$ pentru clasa $\hat{u}(\exists x)\ (\Phi \,.\, u \in x)$ prin următoarele consecințe ușor deductibile ale definițiilor precedente:

$T1.\ y_r \geqslant x \supset \,.\, Nr(x) \,.\, Nr(y).$

$T2.\ Nr(x) \,.\, Nr(y) \,.\, \supset x_r \geqslant y \equiv y \subset x.$

$T3.\ x_r \geqslant y \,.\, y_r \geqslant z \,.\, \supset x_r \geqslant z.$

$T4.\ y \subset x \,.\, Nr(x) \,.\, \supset y \neq Ra.$

$T5.\ Nr(x) \supset \vdots\, w \in x \equiv \,.\, w = {}_s0 \vee (\exists y)\ (y \in x \,.\, y_s > w).$

O dată în posesia teoremelor uzuale pentru aritmetica numerelor reale nenegative, este relativ mai ușor să extindem teoremele la numerele reale prevăzute cu semn. Folosim următoarele definiții:

*D*81. $-x$ pentru $x \cap \overline{\iota_s 0}$.

*D*82. $NNr(x)$ pentru $(\exists y)(Nr(y) . y \neq_{rs} 0 . x = -y)$.

*D*83. $NR(x)$ pentru $Nr(x) \vee NNr(x)$.

*D*84. $|x|$ pentru $(\iota z)(Nr(x) . z = x . \vee . NNr(x) . x \cup \iota_s 0 = z)$.

*D*85. $x_R > y$ pentru $Nr(x) . NNr(y) . \vee . x_r > y . \vee . NNr(x) . NNr(y) . |y|_r > |x|$.

*D*86. $x_R \geqslant y$ pentru $x_R > y \vee . NR(x) . NR(y) . x = y$.

*D*87. $x_R \leqslant y$ pentru $y_R \geqslant x$.

*D*88. $x_R < y$ pentru $y_R > x$.

*D*89. $x_R + y$ pentru $(\iota z)(Nr(x) . Nr(y) . z = x_r + y . \vee . NNr(x) . NNr(y) . z = -(|x|_r + |y|) . \vee . NNr(y) . x_r \geqslant |y| . z = x_r - |y| . \vee . NNr(y) . |y|_r > x . z = -(|y|_r - x) . \vee . NNr(x) . |x|_r > y . z = -(|x|_r - y) . \vee . NNr(x) . y_r \geqslant |x| . z = y_r - |x|)$.

*D*90. $x_R - y$ pentru $(\partial z)(x_r \geqslant y . z = x_r - y . \vee . x_r < y . z = = -(y_r - x) . \vee . Nr(x) . NNr(y) . z = x_r + |y| . \vee . NNr(x) Nr(y) . z = -(|x|_r + y) . \vee : NNr(x) . NNr(y) : |x|_r \geqslant |y| . z = -(|x|_r - |y|) . \vee . |x|_r < |y| . z = (|y|_r - |x|))$.

*D*91. $x_R \times y$ pentru $(\partial z)(Nr(x) . Nr(y) . \vee . NNr(x) . NNr(y) : z = |x_r| \times \times |y| : \vee : Nr(x) . NNr(y) . x \neq_{rs} 0 . \vee . NNr(x) . Nr(y) . y \neq_{rs} 0 : z = -(|x|_r \times |y|) : \vee : x =_{rs} 0 . NNr(y) . \vee . NNr(x) . y =_{rs} 0 : z =_{rs} 0)$.

*D*92. ${}_R x$ pentru ${}_r x$.

*D*93. $RA(x)$ pentru $(\exists y)(y \in Ra . x = {}_R y \vee x = -{}_R y)$.

*D*94. $IN(x)$ pentru $(\exists y(y \in Nn . x = {}_{Rs} y \vee x = -{}_{Rs} y)$.

Cu aceste definiții putem demonstra foarte ușor în L douăzeci de enunțuri pentru numerele reale cu semn, corespunzător lui $R1-R20$. Cu alte cuvinte, putem demonstra în L că numerele reale formează un cîmp complet ordonat.

§ 4. FUNCȚII DE VARIABILE REALE

În vederea dezvoltării teoriei funcțiilor reale, ne trebuie o extindere predicativă R a sistemului L dat în paragraful precedent. Acest sistem R, teoria predicativă a mulțimilor de numere reale, poate fi obținută din L în același mod în care NB era obținut din ZF și el conține numai un număr finit de axiome ale teoriei mulțimilor. În cadrul unei asemenea teorii, definițiile și teoremele curente despre funcțiile reale, și calculul se pot obține fără multe dificultăți. Dăm aici o scurtă schiță. Adesea omitem indicele inferior R.

$D100$. *Perechea ordonată a două numere reale este dată de:*

(x, y) pentru $\hat{z}(NR(x)\ \&\ NR(y)\ \&\ (Eu)\ (Ev)\ (u \in x \,\&\, v \in y \,\&\, z = u;\ v))$.

$D101$. O relație între numere reale (similar, $Rel(X)$ pentru numerele naturale, înlocuind NR prin Nn):

$Rel(X)$ pentru $(z)\ (z \in X \supset (Ex)\ (Ey)\ (NR(x)\ \&\ NR(y)\ \&\ z = (x,\ y)))$.

$D102$. O funcție de la numere reale la numere reale (similar $Fen\ (X)$ pentru numere naturale):

$Fcn(X)$ pentru $Rel(X)\ \&\ (x)\ (y)\ (z)\ (((x,\ y) \in X \,\&\, (x,\ z(\in X) \supset y = z)$.

$D103$. $F(x)$ pentru $(\partial y)\ (Fcn(F)\ \&(x,\ y) \in F)$.

$D104$. $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ pentru $(\partial y)\ (u)\ (u > 0 \supset (Ev)\ (v > 0\ \&\ (x)((x \neq a\ \&$

$| x - a | < v) \supset | F(x) - y | < u))$.

$D105$. $Seq(x)$ pentru $(y)(y \in x \supset (Eu)\ (Ev)(y = u; v\ \&\ u \in Nn\ \&\ NR(\hat{x}\,\text{``}\,u)))$.

$D106$. a_n pentru $\hat{u}(Seq(a)\ \&\ n;\ u \in a)$.

$D107$. $a_n \to b$ pentru $Seq\,(a)\ \&\ NR(b)\ \&\ (u)\ (u > 0 \supset (Em)\ (n)\ (n > m \supset | a_n -$

$- b | < u))$.

$D108$. $Conv(a)$ pentru $Seq(a)\ \&\ (Ev)\,(a_n \to v)$.

$D109$. $lim\ a_n$ pentru $(\partial x)\,(Conv(a)\ \&\ a_n \to x)$.

$D110$. Cauchy (a) pentru $Seq(a)\ \&\ (u)\ (u > 0 \supset (En)\ (m)\ (k)\ ((n < m\ \&$

$n < k) \supset | a_m - a_k | < u))$.

$D111$. $bd(a)$ pentru $Seq(a)\ \&\ (Ex)\ (n)\ (a_n < x)$.

$D112$. $Sub(a,\ b)$ pentru $Seq(a)\ \&\ Seq(b)\ \&\ (Ex)\ (Fcn(x)\ \&\ (m)\ (x(m) <$

$< x(m + 1))\ \&\ (n)\ (a_n = b_{x(n)})))$.

$D113$. $CI(a,\ b)$ pentru $\hat{x}(NR(a)\ \&\ NR\ (b)\ \&\ a \leqslant x\ \&\ x \leqslant b)$.

$D114$. $OI(a,\ b)$ pentru $\hat{x}(x \in CI(a,\ b)\ \&\ x \neq a\ \&\ x \neq b)$.

*D*115. *Cont* $(F,\ a)$ pentru $Fcn(F)\ \&\ NR(a)\ \&\ (u)\ (u > 0 \supset (Ev)\ (v > 0\ \&\ (x$ $(|\ x - a\ | < v \supset |\ f(x) - f(a)\ | < u)))$.

*D*116. *Conti* (F, X) pentru $(y)\ (y \in X \supset Cont(F,\ y))$.

*D*117. y/x pentru $(\partial z)\ (x \times z = y)$.

*D*118. $F'(x)$ pentru $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{F(x+u) - F(x)}{u}$.

*D*119. *Diff* (F, X) pentru $Fcn(F)\ \&\ (x)\ (x \in X \supset (Ey)\ (x;\ y \in X\ \&\ (Ez)$ $[(NR(z)\ \&\ F'(x) = z)))$.

*D*120. $\int Gdx = F$ pentru $(x)(F'(x) = G(x))\ \&\ Fcn\ (F)\ \&\ Fcn(G)$.

Teoremele standard pot fi derivate în R prin demonstrații standard. Cîteva exemple sînt:

4.1. $Seq(a) \supset ((a_n \to x\ \&\ a_n \to y) \supset x = y)$.

4.2. $\lim a_n + \lim b_n = \lim (a_n + b_n)$ etc.

4.3. $Conv(a) \equiv$ Cauchy (a).

4.4. $Conv(a) \supset bd(a)$.

4.5. $bd(a) \supset (Eb)\ (Sub(b,\ a)\ \&\ Conv(b))$.

4.6. Cont $(F,\ a) \supset (x)\ ((Seq(x)\ \&\ (x_n \to a) \supset \lim\limits_{x_n \to a} F(x_n) = F(a))$.

4.7. $(Ey)(F'(x) = y\ \&\ NR(y)) \supset Cont\ (F,\ x)$.

4.8. $(Conti\ \ (F, CI(a,b))\ \&\ Diff\ \ (F,\ OI)\ \ a,b))\ \&\ F(a) = 0\ \&\ F(b) = 0)$ $\supset (Ex)\ (a < x\ \&\ x < b\ \&\ F'(x) = 0)$.

4.9. $\Big(Conti\ \ (F,\ \ CI(a,\ b))\ \&\ Diff\ (F,\ \ OI(a,\ \ b))) \supset (Ex)\ (a < x\ \&\ x < b\ \&$ $F'(x) = \dfrac{F(b) - F(a)}{b - a}\Big)$

4.10. $Conti\ \ (G,\ NR) \supset (EF)\ \Big(\int Gdx = F\ \&\ (H)\ \Big(\int Gdx = H \supset (Ea\ )(x)\ \Big(H(x)$ $= F(x) + a\Big)\Big)\Big)$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Hao Wang, *A New Theory of Element and Number*, în „Journ. Symbolic Logic", **13**, 1948, pp. 129—137.
[2] W. V. Quine, *Mathematical Logic*, New York, 1940.
[3] Alfred Tarski, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, New York, 1941.
[4] Garrett Birkhoff și Saunders MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, New York, 1946.
[5] W. V. Quine, *Element and Number*, în „Jour. Symbolic Logic", **6**, 1941, pp. 135—149.
[6] A. N. Whitehead și Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, vol. 3, Cambridge, England, 1913.
[7] E. Landau, *Grundlagen der Analysis*, Leipzig, 1930.

partea a cincea
TEORIA PREDICATIVĂ A MULȚIMILOR

CAPITOLUL XXI
UNELE PREDICATE DEFINITE PRIN SCHEME DE INDUCȚIE[1]

Se știe că prin intermediul schemelor de inducție putem să introducem în teoria numerelor (de exemplu, în sistemul Z al lui Hilbert-Bernays)[2] anumite predicate de numere naturale, care nu pot fi exprimate explicit în cadrul teoriei numerelor. Se pune problema modului în care putem să definim aceste predicate într-un sistem mai bogat, fără să mai facem apel la scheme de inducție. În acest articol introducem o noțiune generală de definibilitate prin inducție (relativ la teoria numerelor), noțiune care pare aplicabilă la toate predicatele cunoscute de acest gen; totodată, se demonstrează că toate predicatele definibile inductiv (predicate pe care de acum înainte le vom nota prescurtat d.i.), conform definiției, sînt exprimabile în mod explicit dintr-un sistem L_1 care constituie o extindere a teoriei numerelor.

Pentru ca să definim asemenea predicate și să demonstrăm teoreme corespunzătoare schemelor lor de inducție, trebuie să admitem în L_1 anumite clase impredicative. Dacă însă nu vrem să demonstrăm decît că, pentru orice număr constant, este demonstrabil cazul special al schemei de inducție pentru un predicat d.i., nu sîntem obligați să presupunem existența unor clase impredicative. Pentru scopul pe care îl urmărim, este suficient un anumit sistem mai slab L_2, în care sînt admise numai clase predicative de numere naturale. Trebuie observat că în L_2 se poate obține o definiție a adevărului pentru teoria numerelor. Se pare că demonstrațiile de necontradicție pentru teoria numerelor nu sînt formalizabile în L_2, deși, cum se constată, ele admit o formalizare în L_1.

În general, fiind dat un sistem formal obișnuit oarecare (de exemplu, teoria mulțimilor a lui Zermelo), anumite predicate care nu sînt definibile în mod explicit în cadrul sistemului pot fi definite prin scheme de inducție, la fel ca în teoria numerelor. Și în acest caz, extinzînd sistemul într-o manieră ana-

[1] Acest capitol a apărut în „Journ. Symbolic Logic, **18** (1953), pp. 49—59. Puțin mai tîrziu, John Myhill a studiat în mod independent unele chestiuni înrudite în articolul său *„Arithmetic with Creative Definitions by Induction"*, în *loc. cit.*, pp. 115—118. Relația acestor predicate cu predicatele hiperaritmetice este cercetată ca o chestiune adiacentă în memoriul lui Kleene, „Trans. Am. Math. Soc.," **79**, 1955, pp. 312—340.

[2] Vezi D. Hilbert și P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. II, Berlin, 1939, p. 384. Acest sistem Z conține teoria cuantificării (pentru numerele naturale), axiomele identității, axiomele lui Peano pentru aritmetică și egalitățile recursive care definesc adunarea și înmulțirea. În acest articol vom înțelege prin teorie a numerelor acest sistem Z.

logă, predicatele respective devin și ele exprimabile în sistemul care rezultă. Un exemplu îl constituie predicatul care joacă un rol decisiv în obținerea unei definiții a adevărului pentru un sistem dat.

Ca un prim exemplu de predicate d.i. (relativ la teoria numerelor) menționăm predicatul $M(n, k)$, descoperit de Hilbert și Bernays în procesul de construire a unei definiții a adevărului pentru sistemul lor Z de teoria numerelor[3]:

$$\begin{cases} M(n, 0) \equiv R(n), \\ M(n, k+1) \equiv ((R_1(n) \,\&\, (x)\, M(f(n, x), k)) \vee (R_2(n) \,\&\, (Ex)\, M(f(n, x), k))). \end{cases}$$

Aici, $R(n)$, $R_1(n)$, $R_2(n)$ și $f(n, m)$ sînt predicate recursive (în sensul curent) și deci sînt definibile explicit în teoria numerelor. Hilbert și Bernays au arătat că predicatul M nu este exprimabil în teoria numerelor.

Vom trece la studierea unor predicate definite la fel ca M. Avînd în vedere forma schemei de inducție pentru M, propunem următoarea definiție:

Definiția 1. Un predicat $P(n_1, ..., n_s, k)$ de numere naturale se spune că este d.i. (relativ la teoria numerelor), dacă satisface o schemă de următoarea formă (unde pentru concizie admitem că există un singur parametru, luînd s ca fiind 1):

$$(D) \quad \begin{cases} P(n, 0) \equiv Q(n), \\ P(n, k+1) \equiv R(n, k, P(f_1(n, k, m_1, ..., m_i), h_1(k), ..., \\ P(f_i(n, k, m_1, ..., m_i), h_j(k))). \end{cases}$$

Aici, în afară de intrările simbolului P, indicat mai sus, figurează numai simboluri ale teoriei numerelor, i și j sînt două constante iar toate variabilele $m_1, ..., m_i$ sînt legate în R. Mai mult, funcțiile $f_1, ..., f_i$, $h_1, .., h_j$ sînt toate definibile în teoria numerelor, astfel încît, în particular, putem să demonstrăm în teoria numerelor: pentru fiecare k, $h_1(k) \leqslant k, ..., h_j(k) \leqslant k$.

Ultimele condiții puse pentru $h_1, ..., h_j$ garantează că o dată ce $P(n, 0), ..., P(n, m)$ sînt determinate pentru toți n, $P(n, m+1)$ este de asemenea determinat pentru toți n, numai prin intermediul acelor cazuri ale lui (D), în care k este mai mic decît $m+1$. Luînd în considerație aceste condiții, dacă putem să demonstrăm într-o extindere corespunzătoare a teoriei numerelor (de exemplu, în sistemul L_1 sau în sistemul L_2, care vor fi descrise mai jos) aceste cazuri ale lui (D) pentru o anumită expresie predicativă P și putem să arătăm că $(P(n, 0) \equiv Q_0(n)), ..., (P(n, m) \equiv Q_m(n))$, unde $Q_0(n), ..., Q_m(n)$ sînt toate propozițiile care nu mai cuprind predicatul P, atunci putem să găsim o propoziție $Q_{m+1}(n)$ a sistemului care nu conține P și să demonstrăm: $P(n, m+1) \equiv Q_{m+1}(n)$.

Vom spune că un predicat P este *indirect d.i.*, dacă (1) există o schemă de forma (D) în care alături de simbolurile teoriei numerelor mai intră și simboluri de predicate d.i. sau dacă (2) mai intră și simboluri de predicate definite ca în (1), sau dacă etc. Nu vom discuta decît în treacăt aceste predicate indirect d.i. Ceea ce ne preocupă în primul rînd este studierea predi-

[3] D. Hilbert și P. Bernays, *op. cit.*, pp. 328–340.

catelor d.i. mai simple, care se încadrează în Def. 1, deoarece toate predicatele de această natură care prezintă un interes special aparțin acestui tip.

Să considerăm acum următorul sistem L_1, care este o extindere a teoriei numerelor Z în care, aproximativ vorbind, se admite existența tuturor claselor exprimabile de numere naturale. L_1 conține teoria numerelor Z (cu variabilele sale m, n, ... pentru numere naturale) și variabile X, Y, ... pentru clase de numere naturale. Propozițiile lui L_1 sînt formate din propoziții simple de forma $m\eta X$ (m aparține la X) și din cele ale lui Z, prin aplicarea operatorilor-funcții de adevăr și a cuantorilor pentru ambele genuri de variabile. Presupunem pentru fiecare gen de variabile teoria uzuală a cuantificării [4], iar principiul inducției din Z este înlocuit prin următorul principiu mai tare:

$Ax.1.$ $(X)\,((0\eta X \,\&\, (m)\,(m\eta X \supset (m+1)\,\eta X)) \supset (n)\,n\eta X)$.

Alte axiome ale lui L_1 care depășesc cadrul lui Z sînt următoarele:

$Ax.2.$ Substitutivitatea identității $m = n \supset m\eta X \supset n\eta X)$.

$Ax.3.$ Existența claselor. Pentru orice propoziție p a lui L_1, în care nu intră Y: $(EY)\,(m)\,(m\eta Y) \equiv p)$.

Vrem să arătăm că fiecare predicat $P(n, k)$ de numere naturale d.i., determinat printr-o schemă (D) de mai sus, este definibil explicit în L_1.

Chestiunea principală constă în a defini în L_1 o clasă K care conține toate perechile ordonate $\langle n, k\rangle$, astfel încît $P(n, k)$ să aibă loc conform schemei (D). Pentru aceasta considerăm, mai întîi, un șir de clase în care a m-a conține toate perechile ordonate $\langle n, k\rangle$, astfel încît $k < m$ și $P(n, k)$ au loc conform schemei (D). Atunci K este (ca să zicem așa) reuniunea (clasa sumă) a tuturor claselor din acest șir.

Definiția formală pentru K este după cum urmează:

1.1. $\langle m, n\rangle$ pentru $2^m \cdot 3^n$.

1.2. $G(n, k, X)$ pentru $R(n, k, \langle f_1(n, k, m_1, ..., m_i), h_1(k)\rangle\,\eta X, ..., \langle f_j(n, k, m_1, ..., m_i), h_j(k)\rangle\,\eta X)$.

1.3. $K_m(X)$ pentru $(k)\,(n)\,(k \leqslant m \supset (\langle n, k\rangle\,\eta X \equiv ((k = 0 \,\&\, Q(n)) \vee (Ek_1)\,(k = k_1 + 1 \,\&\, G(n, k_1, X)))))$.

1.4. $K(n, k)$ sau $\langle n, k\rangle\,\eta K$ pentru $(X)\,(K_k(X) \supset \langle n, k\rangle\,\eta X)$.

Demonstrăm mai întîi existența fiecărui membru al șirului de clase a căror reuniune urmează să constituie clasa dorită K.

1.5. $(EX)\,K_0(X)$.

Demonstrație. Conform cu 1.3. $K_0(X) \equiv (n)\,(\langle n, 0\rangle\,\eta X \equiv Qn))$. Conform cu $Ax.3$, $(EX)\,(n)\,(k)\,(\langle n, k\rangle\,\eta X \equiv Q(n))$. În consecință, teorema este demonstrată.

1.6. $(EX)\,K_m(X) \supset (EY)\,K_{m+1}(Y)$.

[4] De exemplu, axiomele și regulile de inferență de la p. 88 din cartea lui W. V. Quine, *Mathematical Logic* (New York, 1940) cu φ, φ' și ψ înțelese ca propoziții arbitrare ale lui L_1.

Demonstrație. Să admitem $K_m(X)$. Conform cu Ax 3, există o clasă Y astfel încît: (1) $(n)\,(k)\,(\langle n, k\rangle\ \eta Y \equiv ((k = 0\ \&\ Q(n))\ \vee\ (Ek_1)\,(k = k_1 + 1\ \&\ G(n, k_1, X))))$. Astfel, conform lui 1.3., dacă $k \leqslant m$, atunci $\langle n, k\rangle\ \eta X \equiv \langle n, k\rangle\ \eta Y$. Dar prin ipoteză (vezi Def. 1), noi sîntem în măsură să demonstrăm: $h_1(k) \leqslant k, \ldots, h_j(k) \leqslant k$. Așadar, putem să substituim pe Y în locul lui X în (1) și obținem, conform cu 1.3.: $K_{m+1}(Y)$.

1.7. $(m)\,(EX)\,K_m(X)$.

Demonstrație. Prin 1.5, 1.6 și inducție (o consecință a Ax 1 și Ax 3).

Acum demonstrăm că aceste clase sînt univoc determinate cel puțin în ce privește elementele lor care ne interesează în primul rînd.

1.8. $(k \leqslant 0\ \&\ K_0(X)\ \&\ K_0(Y)) \supset (\langle n, k\rangle\ \eta X \equiv \langle n, k\rangle\ \eta Y)$.

Demonstrație. Conform cu 1.3, dacă $k \leqslant 0\ \&\ K_0(X)\ \&\ K_0(Y)$, atunci $\langle n, k\rangle \eta\ X \equiv Q(n)$ și $\langle n, k\rangle\ \eta Y \equiv Q(n)$. Așadar, teorema este demonstrată.

1.9. Dacă $(X)\,(Y)\,(k)\,(n)\,((k \leqslant m\ \&\ K_m(X)\ \&\ K_m(Y)) \supset (\langle n, k\rangle\ \eta X \equiv \equiv \langle n, k\rangle\ \eta Y))$, atunci $(k \leqslant m + 1\ \&\ K_{m+1}(X')\ \&\ K_{m+1}(Y')) \supset (\langle n, k\rangle\ \eta X' \equiv \equiv \langle n, k\rangle\ \eta Y')$.

Demonstrație. Să presupunem că $K_{m+1}(X')$ și $K_{m+1}(Y')$. Atunci, conform cu 1.3, avem de asemenea: $K_m(X')$ și $K_m(Y')$. Așadar, prin ipoteză, dacă $k \leqslant m$, atunci $(\langle n, k\rangle\ \eta X' \equiv \langle n, k\rangle\ \eta Y')$. Dar prin ipoteză (vezi Def. 1), putem să demonstrăm: $h_1(k) \leqslant k, \ldots, h_j(k) \leqslant k$. Prin urmare, conform cu 1.2, avem: $(k \leqslant m + 1\ \&\ k = k_1 + 1) \supset (G(n, k_1, X') \equiv G(n, k_1, Y'))$. Prin urmare, conform cu 1.3, teorema este demonstrată.

1.10. $(m)(X)(Y)(k)(n)\,(((k \leqslant m\ \&\ K_m(X)\ \&\ K_m(Y)) \supset (\langle n, k\rangle\ \eta X \equiv \langle n, k\rangle\ \eta Y))$.

Demonstrație. Conform cu 1,8, 1.9 și prin inducție (consecință a Ax 1 și Ax 3).

1.11. $(K_m(X)\ \&\ k \leqslant m) \supset (K(n, k) \equiv \langle n, k\rangle\ \eta X)$.

Demonstrație. Conform cu 1.10, $(K_m(X)\ \&\ k \leqslant m\ \&\ \langle n, k\rangle\ \eta X) \supset (Y)(K_m)(Y) \supset \supset \langle n, k\rangle\ \eta Y)$. Prin urmare, conform cu 1,4, teorema este demonstrată.

Pe baza lui 1.7 și 1.11, sîntem în măsură să demonstrăm proprietatea principală a lui K.

1.12.
$$\begin{cases} K(n, 0) \equiv Q(n), \\ K(n, k + 1) \equiv R(n, k, K(f_1(n, k, m_1, \ldots, m_i), h_1(k)), \ldots, \\ \qquad\qquad K(f_j(n, k, m_1, \ldots, m_i), h_j(k))). \end{cases}$$

Demonstrație. Conform cu 1.11 și 1.3, $K_0(X) \supset (K(n, 0) \equiv Q(n))$. Prin urmare, conform cu 1.7, $K(n, 0) \equiv Q(n)$. În mod similar, conform cu 1.11 și 1.3, avem: (1) $K_{k+1}(X) \supset (K(n, k + 1) \equiv G(n, k, X))$. Dar prin ipoteză (vezi Def. 1), avem: $h_1(k) \leqslant k, \ldots, h_j(k) \leqslant k$. Prin urmare, conform cu 1.11 și 1.2, putem să eliminăm pe X din membrul drept al lui (1), folosind în acest scop pe K. În consecință, conform cu 1.7, a doua parte a teoremei este de asemenea demonstrată.

Așadar, am demonstrat că fiecare predicat P d.i. este exprimabil în L_1.

Nu este greu de văzut că fiecare predicat indirect d.i. (relativ la teoria numerelor) este de asemenea exprimabil în L_1. Astfel, predicatele care intră în schema de inducție pentru un predicat P indirect d.i. pot fi eliminate unul cîte unul. De exemplu, dacă în schema (D) pentru predicatul P figurează un simbol al unui predicat d.i., putem mai întîi să exprimăm acest din urmă predicat ca în 1.1—1.4, iar apoi să înlocuim în schema (D) simbolul Q prin expresia de predicat corespunzătoare din L_1. În ciuda faptului că în schema obținută (D') apar expresii din L_1 care depășesc cadrul teoriei numerelor, se poate verifica ușor că putem să procedăm exact la fel ca mai sus și să demonstrăm două teoreme care sînt asemănătoare celor două propoziții din schema (D'), cu singura excepție că în locul simbolului P conțin o anumită expresie de predicat din L_1. Dacă în schema (D) a unui predicat indirect d.i. mai apar și alte simboluri ale unor predicate d.i. sau indirect d.i., acestea pot fi tratate similar.

În locul sistemului L_1 mai putem folosi un sistem L_3 al lui Quine[5] care poate fi caracterizat ca diferind de L_1 prin aceea că teoria numerelor Z este înlocuită printr-o teorie a elementelor (mulțimilor) m, n, etc. cu un singur predicat primitiv $\in$, astfel încît expresiile de formele $m \in n$, etc. și $m \eta X$ etc. sînt unicele propoziții simple din care sînt compuse toate propozițiile sistemului. În afară de axiomele și regulile de inferență ale teoriilor cuantificării, axiomele lui L_3 sînt următoarele (unde, de data aceasta, $m = n$ reprezintă $(k)\,(k \in m \equiv k \in n)$):

AxQ 1. Existența mulțimii nule. $(En)\,(m) - m \in n$.
AxQ 2. Existența unor mulțimi finite. $(En)\,(m)\,(m \in n \equiv (m \in k \vee m = j))$.
AxQ 3. $m = n \supset (m \eta X \supset n \eta X)$.
AxQ 4. Dacă p este o propoziție oarecare din L_3, în care nu apare X, atunci $(EX)\,(m)\,(m \eta X \equiv p)$.

Se știe[6] că în acest sistem putem să dezvoltăm teoria numerelor astfel, încît numerele naturale să constituie anumite elemente (mulțimi) ale sistemului, iar propozițiile și teoremele corespunzătoare tuturor celor din L_1 se pot obține în cadrul lui. În consecință, ceea ce este exprimabil în L_1 este de asemenea exprimabil în L_3.

Avem două teoreme:

Teorema 1. Orice predicat de numere naturale d.i. (relativ la teoria numerelor) este definibil explicit atît în L_1, cît și în L_3.

Teorema 2. Orice predicat d.i. intirect este definibil explicit atît în L_1, cît și în L_3.

În afară de predicatul M al lui Hilbert-Bernays de care am amintit mai sus, avem numeroase alte predicate interesante care sînt d.i. (relativ la teoria numerelor) și despre care se poate demonstra că sînt inexprimabile în cadrul

[5] Vezi pp. 140—141 din Quine, *Element and Number*, în „Journ. Symbolic Logic", 6, 1941, pp. 135—149. Sistemul este prezentat aici într-o manieră oarecum diferită. Totuși el este, în esență, la fel de bogat ca sistemul formulat acolo la p. 140, deoarece pe noi ne interesează numai mulțimi (clemente) finite.

[6] Vezi trimiterea de la nota precedentă.

teoriei numerelor. Cel dintîi predicat cunoscut de acest gen este, probabil, predicatul considerat de Kalmar și Skolem [7]. Recent, Kleene a introdus un alt predicat d.i. în cadrul clasificării sale a predicatelor de numere naturale [8]. Există apoi o altă formă de atare predicate care a fost studiată de Hilbert și Bernays în legătură cu formalizarea demonstrației de consistență a teoriei numerelor [9] dată de Gentzen.

Atît în formalizarea demonstrației lui Gentzen, cît și în cazul unei demonstrații de consistență pentru teoria numerelor prin intermediul unei definiții a adevărului (întrebuințînd predicatul M sus-menționat), Hilbert și Bernays observă că schemele recursive pentru aceste predicate d.i. sînt singurele instrumente folosite care depășesc cadrul teoriei numerelor însăși [10]. Așadar, din teorema 1 obținem imediat:

Teorema 3. Atît în L_1, cît și în L_3 putem să formalizăm complet atît demonstrația de consistență a teoriei numerelor dată de Gentzen, cît și demonstrația de consistență, oferită de Hilbert și Bernays cu ajutorul definiției adevărului.

Problema definirii unui anumit predicat într-un anumit sistem pare să comporte unele subtilități. Aici, ne mărginim să menționăm numai următoarea. Să considerăm un predicat diadic de numere naturale d.i., așa cum este caracterizat de schema (D). Ne putem imagina că s-ar putea defini într-un anumit sistem o expresie predicat P și s-ar putea demonstra pentru ea, în același sistem, toate cazurile speciale $P(n, 0)$, $P(n, 1)$, $P(n, 2)$ etc. ale schemei (D), fără ca să fim în stare să demonstrăm cele două teoreme corespunzătoare celor două propoziții (dintre care a doua este o aserțiune generală) ale schemei. Vom arăta că asemenea situații apar într-adevăr, și apar într-un mod semnificativ. În acest caz s-ar părea că este firesc să spunem, de asemenea, că predicatul este definibil în cadrul sistemului. Pentru a distinge acest caz de cazul considerat mai sus, vom vorbi despre definibilitate* într-un sistem astfel, încît dacă un predicat este definibil într-un sistem, el este și definibil* în acel sistem, dar uneori un predicat poate fi definibil* fără a fi totuși definibil în sistemul respectiv. Vom arăta acum că toate predicatele d.i. sînt definibile * într-un sistem L_2, care este mult mai slab decît L_1 și nu conține clase impredicative.

L_2 conține aceleași notații ca L_1, teoriile cuantificării pentru ambele genuri de variabile, axiomele teoriei numerelor Z (inclusiv principiul obișnuit al inducției), precum și următoarele două axiome (în locul axiomelor $Ax\,1 - Ax3$):

$Ax'1$. Dacă φm este o propoziție oarecare din L_2, atunci $m = n \supset (\varphi m \supset \varphi n)$.

$Ax'2$. Dacă p este o propoziție oarecare a lui Z (adică o propoziție oarecare din L_2 care nu conține variabile de clase), atunci $(EX)(m)(m \eta X \equiv p)$.

Fie P un predicat caracterizat prin schema (D) din Def. 1; vrem să demonstrăm că P este definibil* în L_2. Întrucît L_2 are aceeași notație ca L_1, toate

[7] Vezi predicatul H definit în ultima parte a studiului lui Skolem *Über Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierten Relationen auf arithmetische. Acta litterarum ac scientiarum* (Szeged), **8**, 1936—1937, pp. 73—88.

[8] Vezi S. C. Kleene, *Recursive Predicates and Quantifiers* („Trans. Amer. Math. Soc.," **53**, 1943, pp. 41—73), la p. 71.

[9] Hilbert-Bernays, *op. cit.*, p. 368.

[10] *Ibidem*, p. 369 și pp. 338—339.

definițiile 1.1—1.4 sînt utilizabile în L_2, iar predicatul $K(1.4)$ poate fi definit în L_2. Scopul nostru este să demonstrăm în L_2 teoreme corespunzătoare tuturor cazurilor speciale ale schemei (D), unde k în a doua propoziție este un număr constant, teoreme în care simbolul K apare în locul simbolului P.

Procedăm în felul următor.

2.1. Pentru orice constantă dată m putem demonstra în L_2: $(EX)\,K_m(X)$.

Demonstrație. Întrucît prin ipoteză (vezi Def. 1) Q nu conține nici un simbol dinafara teoriei numerelor, există, conform cu 1.3 și $Ax'2$, o clasă X, astfel încît atît $K_0(X)$, cît și $(n)\,(k)\,(\langle n, k\rangle\ \eta X \equiv Q(n))$. Așadar, conform cu 1.2 și $Ax'2$, există un Y, astfel încît $(n)\,(k)\,(\langle n, k\rangle\ \eta Y \equiv ((k = 0\ \&\ Q(n)) \vee (Ek_1)\,(k = k_1 + 1\ \&\ G(n, k_1, X))))$.

În consecință, raționînd la fel ca în demonstrația lui 1.6, avem: $K_1(Y)$. În mod similar, putem să obținem succesiv clasele Y', Y'' etc., pentru care putem să demonstrăm în L_2: $K_2(Y')$, $K_3(Y'')$ etc. Așadar, demonstrația lui 2.1 este încheiată.

2.2. Pentru orice constantă dată m, putem demonstra în L_2:
$(X)\,(Y)\,(k)\,(n)((k \leqslant m\ \&\ K_m(X)\ \&\ K_m(Y)) \supset (\langle n, k\rangle\ \eta X \equiv \langle n, k\rangle\ \eta Y))$.

Demonstrație. Demonstrațiile pentru 1.8 și 1.9 pot fi efectuate în L_2. Așadar, 2.2 rezultă imediat.

2.3. Pentru orice constantă m putem să demonstrăm în L_2:

$$(k \leqslant m\ \&\ K_m(X)) \supset (K(n, k) \equiv \langle n, k\rangle\ \eta X).$$

Demonstrație. Conform cu 2.2 și 1.4.

2.4. Pentru orice constantă dată k, putem să demonstrăm în L_2 cazul special al celor două propoziții din 1.12.

Demonstrație. Conform cu 2.3, 1.3 și 2.1 (vezi și demonstrația lui 1.12).

Prin urmare, fiecare predicat d.i. este definibil* în mod explicit în L_2. Observăm că atît un sistem L_4, alcătuit din axiomele I—III și VII ale sistemului lui Bernays de teoria mulțimilor[11], cît și un sistem L_5, alcătuit din axiomele I—III și Va ale aceluiași sînt cel puțin tot atît de bogate ca L_2. Deci L_4 și L_5 pot fi considerate ca avînd aceleași notații ca și sistemul L_3 discutat mai sus. Axioma I revine la $AxQ3$, II este aceeași cu $AxQ1$ plus $AxQ2$. Axioma III este la fel ca $AxQ4$, cu singura restricție că nu sînt admise variabile mari legate în p. Axiomele Va și VII sînt după cum urmează:

Va. $(z)\,(X)\,(Ey)\,(x)\ (x \in y \equiv (x \in z\ \&\ x\eta X))$.
VII. $(X)\,((Ex)\ (x\eta X) \supset (Ey)\ y\eta X\ \&\ (z) - (z \in y\ \&\ z\eta X)))$.

Să observăm că nici L_4 și nici L_5 nu conțin clase impredicative. În rezumat avem următoarea teoremă:

Teorema 4. Toate predicatele de numere naturale d.i. (relativ la teoria numerelor) sînt definibile în sistemele L_2, L_4 și L_5.*

[11] Vezi P. Bernays, *System of Axiomatic Set Theory*, în „Journ. Symbolic Logic", **2**, 1937, pp. 65—77 și **6**, 1941, pp. 1—17.

Aplicînd această teoremă la predicatul sus-menționat M al lui Hilbert și Bernays, obținem o concluzie destul de interesantă. Astfel, atunci cînd demonstrează adecvarea definiției pe care o dau adevărului pentru teoria numerelor [12], Hilbert și Bernays nu au nevoie decît de cazurile speciale ale schemei care definește pe M și nu au nevoie de a doua propoziție a schemei ca aserțiune generală în sistem [13]. În consecință, avem drept corolar al teoremei precedente:

Teorema 5. O definiție adecvată a adevărului pentru teoria numerelor (sistemul Z) poate fi obținută în fiecare dintre sistemele L_2, L_4 și L_5.

Cu toate acestea, de aici nu urmează că am putea să formalizăm o demonstrație de consistență pentru teoria numerelor în vreunul din sistemele L_2, L_4 sau L_5. Pentru formalizarea unei asemenea demonstrații avem nevoie, după cum se pare, de anumite clase impredicative sau de unele axiome tari ale inducției obișnuite. Să vedem ce adaosuri minime la aceste sisteme sînt necesare pentru formalizarea unei demonstrații de consistență a teoriei numerelor.

Așa cum s-a observat mai sus, Hilbert și Bernays afirmă că o demonstrație de consistență pentru teoria numerelor Z poate fi formalizată în sistemul Z' obținut din Z prin adăugarea ca noi axiome a celor două propoziții din schema de recursie pentru predicatul M[14]. În consecință, pentru ca să extindem (de exemplu) sistemul L_2, astfel încît demonstrația de consistență să devină formalizabilă, nu trebuie decît să adăugăm axiomele necesare pentru deducerea celor două propoziții ale schemei.

Introducem două abrevieri:

2.5. $F_1(m)$ pentru $(EX)\, K_m(X)$.

2.6. $F_2(m)$ pentru $(X)\,(Y)\,(k)\,(n)\,((k \leqslant m \,\&\, K_m(X) \,\&\, K_m(Y)) \supset (\langle n, k\rangle \eta X \equiv \langle n, k\rangle \eta Y))$.

După cum reiese din 1.1—1.3, forma specială a lui $K_m(X)$ (și deci și formele speciale ale lui $F_1(m)$ și $F_2(m)$) depind de forma specială a schemei de inducție (D) pentru predicatul P. Admitem aici că predicatul P este exact predicatul definit de schema pentru predicatul special M. La rîndul lor, $F_1(m)$ și $F_2(m)$ sînt considerate ca fiind definite și ele relativ la această schemă.

[12] Spunem că o definiție a adevărului *Tr* pentru un sistem L este *adecvată*, dacă pentru orice constantă m care este numărul unui enunț (adică al unei propoziții care nu conține nici o variabilă liberă) p_m din L, este valabil următorul caz al „schemei de adevăr": $Tr(m) \equiv p_m$. Dacă putem să definim *Tr* și să demonstrăm toate echivalențele de acest fel în L', vom spune că conține o definiție adecvată a adevărului pentru L. Nu este necesar ca în L' să putem demonstra și faptul că toate teoremele lui L sînt adevărate în conformitate cu această definiție. Acest criteriu mai slab de adecvare pare să se conformeze convențiilor enunțate de către Tarski (vezi, de exemplu, § 4 din articolul său de popularizare *The Semantic Concept of Truth*, în „Philosophy and Phenomenological Research", *4*, 1944, pp. 341—376); deși s-ar părea totuși, că unele afirmații făcute de Tarski (îndeosebi cele cu privire la demonstrațiile de consistență) nu pot fi justificate decît dacă cerem în plus să se poată demonstra că toate teoremele lui L sînt adevărate, conform acestei definiții. În orice caz, vorbind în acest articol despre definiții adecvate ale adevărului, nu vom introduce asemenea cerințe suplimentare. Considerăm că chiar dacă accepția de față a termenului de „definiție adecvată a adevărului" nu concordă cu intenția lui Tarski, ea este totuși suficient de interesantă pentru ca să merite un studiu separat. Definițiile adevărului care satisfac cerințele suplimentare impuse teoremelor ar putea fi caracterizate ca definiții *normale*.

[13] Vezi și considerentele de la pp. 334—337 din Hilbert și Bernays *op. cit.*

[14] În treacăt fie spus, din teorema 4 urmează că Z' este consistent, dacă unul dintre sistemele L_2, L_4 sau L_5 este ω — consistent.

Fie L_2' sistemul obținut din L_2 prin întărirea inițială a $Ax'2$ astfel, încît să se permită ca p să fie orice propoziție din L_2 care poate conține variabile libere de clase (diferite de X), dar nu și variabile legate, și prin adăugarea următoarelor două axiome de inducție:

$Ax'3.\ (F_1(0)\ \&\ (n)\ (F_1(n) \supset F_1(n+1))) \supset (m)F_1(m).$

$Ax'4.\ (F_2(0)\ \&\ (n)\ (F_2(n) \supset F_2(n+1))) \supset (m)F_2(m).$

Examinînd deducțiile pentru 1.5—1.12 în L_1 constatăm că ele pot fi efectuate în cadrul lui L_2', prin aplicarea axiomelor $Ax'3$ și $Ax'4$ în demonstrațiile pentru 1.7 și 1.10. Urmează deci că demonstrația de consistență dată de Hilbert și Bernays admite o formalizare în cadrul sistemului L_2'.

În mod similar, adăugînd $Ax'3$ și $Ax'4$ la sistemul L_4 sau la sistemul L_5, putem să formalizăm demonstrația și în sistemele obținute L_4' și L_5'. Mai mult, demonstrația poate fi formalizată și în sistemele L_4'' și L_5'', dacă ele se obțin din L_4, respectiv L_5 adăugînd, în loc de $Ax'3$ și $Ax'4$, următoarele două axiome:

$Ax''3.\ (EX)\ (m)\ (m \eta X \equiv F_1(m)).$

$Ax''4.\ (EX)\ (m)\ (m \eta X \equiv F_2(m)).$

În consecință, putem enunța ca teoremă:

Teorema 6. Demonstrația de consistență pentru teoria numerelor dată de Hilbert și Bernays poate fi formalizată în fiecare dintre sistemele L_2', L_4', L_5' L_4'' și L_5''.

Pînă acum ne-am ocupat exclusiv de predicate d.i. relativ la teoria numerelor. În general, fiind dat un sistem arbitrar T, putem să definim prin scheme de inducție și predicate care nu sînt exprimabile explicit în T. Argumentul principal al oricărui predicat introdus în acest fel trebuie să ia, desigur, ca valori numere naturale; de data aceasta însă, unele argumente sau toate celelalte argumente (parametrii) pot lua ca valori și alte entități considerate în sistemul T. În cazul cînd în T putem să dezvoltăm teoria numerelor, vom putea să introducem asemenea predicate pe baza unor scheme de inducție care nu cuprind (în afară de simbolurile pentru predicatele ce vor fi introduse) nimic dinafara lui T. Dacă T nu conține teoria numerelor, trebuie să considerăm sistemul obținut în T prin adăugarea teoriei numerelor.

Pentru ca să simplificăm problemele noastre, să considerăm un sistem parțial T al teoriei mulțimilor a lui Zermelo într-una dintre formulările sale standard [15]. Sistemul T ales de noi satisface următoarele două condiții: (1) în T poate fi dezvoltată teoria numerelor; (2) șirurile finite de entități (mulțimi) oarecare a căror existență este admisă în T pot fi definite astfel, încît ele să constituie, la rîndul lor, entități (mulțimi) oferite. Dăm o descriere succintă a acestui sistem.

T conține axioma extensionalității, axioma perechii, *Aussonderungsaxiom*, axioma mulțimii sumă și axioma infinitului. Mulțimea nulă este definită ca numărul zero, iar mulțimea unitate a unui număr natural dat este definită

[15] De exemplu, formularea pe care am dat-o în „Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.," **35**, 1949, pp. 150—151.

ca succesorul său. Atunci, mulțimea numerelor naturale este intersecția tuturor mulțimilor care conțin atît zero, cît și succesorul fiecărui membru. Perechea ordonată a două mulțimi poate fi definită în maniera obișnuită. Șirul finit de k mulțimi $x_1, \ldots, x_k$ este mulțimea x, alcătuită din perechile ordonate $\langle x_1, 1\rangle, \ldots, \langle x_k, k\rangle$. Conform axiomei perechii și axiomei mulțimii sumă, dacă $x_1, \ldots, x_k$ sînt mulțimi ale lui T, x este, de asemenea, o mulțime a lui T. Vom folosi litera g ca variabilă în T, avînd ca domeniu de valori toate șirurile finite de mulțimi.

Să admitem că atît variabilele lui T (variabilele de mulțimi), cît și propozițiile lui T au fost enumerate și că în cadrul enumerării propozițiilor, fiecare propoziție precede pe toate cele în care figurează ea. Atunci, putem să definim un predicat $S(g, m)$ (șirul finit g satisface a $(m+1)$-a propoziție) printr-o schemă recursivă de formă următoare [16]:

$$\begin{cases} S(g, 0) \equiv Q(g), \\ S(g, k+1) \equiv R(g, k, S(g, h_1(k)), S(g, h_2(k)), S(f(g, k, x), h_3(k))). \end{cases}$$

În această schemă, în afară de intrările indicate ale simbolului S, apar numai simboluri definibile în T: variabila x este legată în R, iar funcțiile h_1, h_2 și h_3 sînt de așa natură, încît putem demonstra în teoria numerelor: $h_1(k) \leqslant k$, $h_2(k) \leqslant k$, $h_3(k) \leqslant k$.

Considerente analoage construcției unei definiții a adevărului pentru teoria numerelor cu predicatul M ne permit să demonstrăm că, prin adăugarea celor două propoziții din schema pentru S ca axiome ale sistemului T, putem defini adevărul pentru T în sistemul obținut T'. Așadar, conform unei teoreme a lui Tarski [17], predicatul S nu este explicit definibil (și nici măcar definibil*) în T.

Dacă T_1 se raportează la T ca L_1 la Z, putem demonstra la fel ca înainte că S este definibil în T_1. Mai mult, dacă T_2 se raportează la T ca L_2 la Z, putem arăta, prin considerente similare celor folosite mai sus, că predicatul S este definibil* în T_2 și că în T_2 există o definiție a adevărului pentru T.

Întrucît adecvarea unei definiții a adevărului pentru un sistem dat depinde numai de formele lingvistice de care dispune sistemul respectiv [18], o definiție adecvată a adevărului pentru T este totodată o definiție adecvată a adevărului pentru orice alt sistem al teoriei mulțimilor a lui Zermelo. De exemplu, fie T^* sistemul obținut din T prin adăugarea axiomei mulțimii putere și a axiomei înlocuirii *(Ersetzungsaxiom)*; atunci, atît T_1 cît și T_2 conțin totodată o definiție adecvată a adevărului pentru T^*, în pofida faptului că, în aparență, T^* este un sistem mai tare decît T_1 și decît T_2.

[16] O formulare explicită a definiției predicatului S și a demonstrației adecvării acesteia în definirea adevărului ne-ar îndepărta prea mult de scopul nostru prezent. În legătură cu trăsăturile esențiale ale ideilor de bază implicate a se vedea § 11 din studiul lui Tarski, menționat înainte la nota 11, precum și studiul său mai tehnic „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", în „Studia Philosophica", **1**, 1935, pp. 261—405.

[17] Vezi Hilbert și Bernays *op. cit.*, pp. 254—258.

[18] Admitem că demonstrabilitatea tuturor cazurilor schemei de adevăr constituie un criteriu suficient pentru o definiție adecvată a adevărului. Iată de ce tăria teoremelor sistemului nu este relevantă în această privință. Vezi și nota 11 din acest capitol.

CAPITOLUL XXII
PROPOZIȚII INDECIDABILE SUGERATE DE PARADOXELE SEMANTICE[1]

§ 1. INTRODUCERE

Aplicînd metoda aritmetizării la o demonstrație de completitudine a calculului predicatelor, Bernays a obținut un rezultat care, aplicat la teoriile mulțimilor formulate în calculul predicatelor, poate fi enunțat astfel[2].

1.1. Dacă adăugăm o propoziție aritmetică $Con(S)$ (care exprimă consistența unei teorii a mulțimilor S) ca axiomă nouă la teoria elementară a numerelor $Z_\mu(H—B, II, p. 293)$, putem demonstra în sistemul care rezultă traducerile aritmetice ale tuturor teoremelor lui S.

Urmează atunci că lucrurile definibile sau exprimabile în S au imaginile lor într-o extindere simplă a lui Z_μ, în cazul cînd S este consistent. Întrucît S poate fi un sistem „tare", faptul are consecințe interesante. Unele dintre acestea sînt discutate de către mine, iar altele de către Kreisel[3]. Kreisel descoperă o propoziție indecidabilă a teoriei mulțimilor, combinînd 1.1 cu procedeul cantorian al diagonalei. Voi demonstra mai jos, făcînd uz de metode similare, cîteva alte rezultate legate de noțiunile de adevăr și desemnare. Metoda enumerării mulțimilor folosită de mine (vezi 3.1 mai jos) diferă de cea a lui Kreisel. În timp ce metoda aplicată aici este elegantă din punct de vedere formal, metoda lui Kreisel este mult mai eficientă, cînd dorim să calculăm efectiv valorile numerice.

Gödel însuși a observat strînsa legătură care există între propozițiile sale indecidabile și paradoxul lui Epimenide („Mincinosul"). În timp ce Gödel construiește o propoziție a unui sistem L care poate fi interpretată ca spunînd despre ea însăși că nu este o teoremă a lui L, paradoxul lui Epimenide ar apare într-un sistem, L, în care am putea construi o propoziție care spune despre ea însăși că nu este adevărată. Adesea, această din urmă situație este exprimată spunîndu-se că noțiunea de adevăr a unui sistem L nu este exprimabilă în L. Dacă L este eventual Z_μ, iar S este o teorie a mulțimilor în care noțiunea de adevăr a sistemului Z_μ poate fi definită, atunci, conform teoremei lui Bernays, avem în Z_μ plus $Con(S)$ un model sau o traducere a schemei de adevăr a lui Z_μ. Voi demonstra că raționamentul din paradoxul lui Epimenide generează în acest caz o propoziție indecidabilă a lui S și Z_μ. La fel, imposibilitatea definirii relației de desemnare în însuși sistemul respectiv duce, de

[1] Acest capitol a apărut în „Journ. Symbolic Logic", **20**, 1955, pp. 31—43.
[2] Hilbert și Bernays [2] (va fi citat ca H-B), vol. II, pp. 243—253, vezi și Wang [6].
[3] Kreisel [3], I, și Wang [5].

asemenea, la propoziții indecidabile. Una dintre acestea este strîns legată de paradoxul lui Richard.

Sperăm că aceste rezultate vor pune întrucîtva într-o lumină nouă paradoxele semantice. Mai mult, aceste concluzii, ca și rezultatul lui Kreisel (*op. cit.*), prezintă interes prin faptul că pun în legătură clasele și relațiile indefinibile cu propozițiile indecidabile. Se pare că există o anumită asemănare între această situație și posibilitatea a două metode deosebite de evitare a paradoxelor matematice: modul uzual de refuz al oricărei subsistențe a clasei K a tuturor claselor care nu sînt propriile lor elemente și abordarea alternativă care admite o asemenea clasă K, însă tratează ca indecidabilă problema dacă K aparține lui K.

Atît în cadrul construcției lui Kreisel, cît și în cadrul construcției mele a propozițiilor indecidabile, pasul esențial îl constituie în aproape fiecare caz găsirea unei propoziții a teoriei mulțimilor, care este adevărată, dar al cărei model sau traducere conform cu 1.1 este falsă. Dacă o teorie a mulțimilor este consistentă, atunci este traductibilă (în sensul lui 1.1) în Z_μ, precum și în acea parte a teoriei mulțimilor înseși care corespunde lui Z_μ. Dacă teoria mulțimilor admite un model ω — consistent, atunci traducerea unei teoreme a ei trebuie să fie, de asemenea, adevărată (vezi și 2.6. mai jos). În consecință, dacă teoria mulțimilor admite un model ω-consistent, atunci propoziția adevărată a cărei traducere este falsă trebuie să fie indecidabilă în teoria mulțimilor. Faptul că asemenea propoziții există mai dovedește, în mod accesoriu, că modelul unui sistem, așa cum este determinat de 1.1, nu este, într-un anumit sens, foarte „natural"; într-adevăr, ne-am aștepta de obicei ca modelul unei propoziții adevărate să fie adevărat.

§ 2. PRELIMINARII

În acest studiu, voi considera o teorie a mulțimilor S', în care poate fi dezvoltată Z_μ. Pentru precizarea ideilor, cititorul poate concepe S ca o anumită teorie curentă a mulțimilor fără axioma infinitului [4], iar S' ca obținîndu-se din S prin adăugarea ω-simbolului lui Hilbert.

Formula $Con(S')$ din $Z\mu$ este, mai explicit, $(m)\neg\mathfrak{B}(m, \mathfrak{f})$, care exprimă direct faptul că formula $0 = 1$, al cărei număr Gödel este $\mathfrak{f}$, nu este demonstrabilă în S'. Aceeași formulă este adoptată la Wang [6], în timp ce Bernays adoptă o formulă diferită $(n)\ [\mathfrak{q}(n) = 0]$ (vezi H—B, II, p. 243) în demonstrația pe care o dă pentru 1.1. Trebuie observat că $Con(S')$ este o formulă închisă. Acest fapt este semnificativ, deoarece în raționamentele de mai jos, teorema deducției este aplicabilă în mod implicit de mai multe ori.

În cele ce urmează se ivește adesea necesitatea să considerăm traducerea unei formule (sau termen) din Z_μ în S', traducerea unei formule (sau termen) din S' în Z_μ, traducerea acestuia din urmă în S' etc. Pentru claritate, introduc o dată pentru totdeauna notații în vederea acestor traduceri. Întrucît Z_μ poate fi dezvoltat în S' (adică este traductibil în S'), S' are o parte corespunzătoare lui Z_μ. Această parte de teoria numerelor din S' va fi desemnată prin S_0. Fie „$\mathfrak{A}^s$" desemnarea traducerii în S_0 a formulei „$\mathfrak{A}$" din Z_μ

[4] Vezi Bernays (I) sau sistemul (S) descris la *Kreisel* [3], II.

și fie „$\mathfrak{A}^z$“ desemnarea traducerii (conform cu 1.1) în Z a formulei din S'. În consecință, „$\mathfrak{A}^{zs}$“ ar fi traducerea lui „$Con(S')$“ în S_0. Sînt adoptate, de asemenea, notații similare pentru termeni.

În demonstrarea teoremelor, voi admite că S' are un model ω-consistent. Așa cum se obișnuiește, spunem că un sistem S' este ω-consistent, dacă pentru fiecare formulă $\mathfrak{A}(a)$ din Z_μ, $[(\exists m)\neg\mathfrak{A}(m)]^s$ este teoremă a lui S' numai dacă una dintre formulele $[\mathfrak{A}(0)]^s$, $\mathfrak{A}(1)]^s$, $[\mathfrak{A}(2)]^s$, ... nu este teoremă a lui S'. Un model al lui S' este un model ω-consistent al lui S', dacă pentru fiecare formulă $\mathfrak{A}(a)$ a lui Z_μ, $[(\exists m)\neg\mathfrak{A}(m)]^s$ este adevărată în cadrul modelului, numai dacă una dintre formulele $[\mathfrak{A}(0)]^s$, $[\mathfrak{A}(1)]^s$, $[\mathfrak{A}(2)]^s$, ... este falsă.

Mai explicit, adopt următoarea definiție:

2.1. Un sistem S' se spune că admite un model ω-consistent, dacă este posibil să dividem toate propozițiile lui S' în două clase T (adevărate) și F(false), astfel încît să fie satisfăcute următoarele condiții: $(a)\neg\mathfrak{A}$ aparține lui T, dacă și numai dacă $\mathfrak{A}$ aparține lui F, $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$ aparține lui T, dacă și numai dacă atît $\mathfrak{A}$, cît și $\mathfrak{B}$ aparțin lui T; (b) $(\exists x)\,\mathfrak{A}(x)$ aparține lui T, dacă pentru un termen $\mathfrak{t}$ din S' care nu conține variabile libere, $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ aparține lui T; (c) pentru fiecare formulă $\mathfrak{A}(a)$ a lui Z_μ cu singura variabilă liberă a, $[(\exists m)\neg\mathfrak{A}(m)]^s$ aparține lui T, numai dacă unele dintre formulele $[\mathfrak{A}(0)]^s$, $[\mathfrak{A}(1)]^s$, $[\mathfrak{A}(2)]^s$, ... nu aparțin lui T; (d) $\mathfrak{A}$ aparține lui F, dacă și numai dacă nu aparține la T; (e) toate teoremele lui S' aparțin lui T.

În tot acest studiu voi admite că se dă un model ω-consistent pentru S'. Ori de cîte ori spun că o propoziție din S' este adevărată (sau falsă), înțeleg prin aceasta, pur și simplu, faptul că aparține lui T (sau F) în acel model dat. Această convenție se va dovedi foarte comodă.

În treacăt fie spus, deși toate sistemele care admit modele ω-consistente sînt, evident, ω-consistente, conversa, probabil, nu este adevărată.

Lemele de mai jos rezultă din natura traducerilor.

2.2. Operația de trecere de la $\mathfrak{A}$ la $\mathfrak{A}^{zs}$ nu afectează pozițiile relative ale conectivelor propoziționale.

2.3. Dacă $\mathfrak{A}$ este demonstrabilă în S', atunci $[Con(S') \supset \mathfrak{A}^{zs}$ este și ea demonstrabilă în S'.

Din ipoteza că S' are un model ω-consistent decurg următoarele leme.

2.4. $[Con(S')]^s$ este adevărată.

2.5. Dacă $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ sînt adevărate, atunci $\mathfrak{B}$ este adevărată.

Demonstrație. Întrucît $\neg[\mathfrak{A}\,\&\,(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})\,\&\,\neg\mathfrak{B}]$ este adevărată.

2.6. Dacă $\mathfrak{A}$ este demonstrabilă în S', atunci $\mathfrak{A}^{zs}$ este adevărată.

Demonstrație. Conform cu 2.3, 2.4 și 2.5.

2.7. Dacă $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{A}^{zs}$ au valori de adevăr diferite, $\mathfrak{A}$ este indecidabilă în S'.

Demonstrație. Dacă $\mathfrak{A}$ este adevărată, atunci conform lui (d) și (e) din 2.1, $\neg\mathfrak{A}$ nu este demonstrabilă în S'. Conform cu 2.6, întrucît $\mathfrak{A}^{zs}$ este falsă, $\mathfrak{A}$ nu este nici ea demonstrabilă în S', deoarece în caz contrar $\mathfrak{A}^{zs}$ ar fi adevărată. În mod similar, dacă $\mathfrak{A}$ este falsă, iar $\mathfrak{A}^{zs}$ este adevărată, nici $\mathfrak{A}$ și nici $\neg\mathfrak{A}$ nu sînt demonstrabile în S'.

Adesea, este convenabil să considerăm sistemul obținut din S' prin adăugarea formulei $[Con(S')]^{s}$.

2.8. Fie $S\#$ sistemul obținut din S' prin adăugarea lui $[Con(S')]^{s}$ ca o nouă axiomă.

2.9. Dacă $\mathfrak{A}$ este demonstrabilă în $S\#$, atunci $\mathfrak{A}$ este adevărată.

Demonstrație. Pe baza lui 2.4 și a faptului că din propoziții adevărate nu se pot deduce decît propoziții adevărate (vezi 2.5).

2.10. $S\#$ este consistent.

2.11. Dacă $\mathfrak{A}$ este demonstrabilă în S', atunci $\mathfrak{A}^{zs}$ este demonstrabilă în $S\#$.

§ 3. CONDIȚII CĂRORA TREBUIE SĂ LE SATISFACĂ TEORIA MULȚIMILOR[5]

Un corolar imediat al teoremei lui Bernays 1.1. este:

3.1. Dacă adăugăm, la o teorie a mulțimilor S, ε-simbolul lui Hilbert împreună cu ε-formulele corespunzătoare (H—B, II, p. 13) și extindem noțiunile de termen, formulă și teoremă în mod corespunzător, sistemul rezultat S' este de asemenea traductibil în Z_μ plus $Con(S)$, cu μ-simbolul servind ca model al ε-simbolului lui Hilbert.

Demonstrație. Unicele teoreme ale lui S' care nu sînt totodată teoreme ale lui S sînt cele pe care le demonstrăm prin aplicarea ε-formulelor (H—B, II, p. 13). Dar întrucît formulele care le corespund exact pentru μ-simbolul sînt demonstrabile în Z_μ (H—B, II, p. 293), traducerea fiecărei teoreme ale lui S' este, la rîndul ei, deductibilă din $Con(S)$ în Z_μ.

De exemplu, dacă S conține numai $=$ și e (apartenența la) ca predicate primitive, iar Z_s este sistemul obținut din Z_μ prin adăugarea ca axiomă a propoziției $Con(S)$ atunci, conform lui 3.1, putem defini în Z_s modele aritmetice $e^{s}(m, n)$ și $m = z_n$ pentru predicatele $e(x,y)$ și $x = y$ ale lui S' astfel încît, atunci cînd înlocuim, în termenii și formulele lui S', toate predicatele prin modelele lor aritmetice, iar ε-simbolul prin μ-simbolul, toate teoremele lui S' devin teoreme ale lui Z_s. Pentru conciziune, vom spune că retraducerea în S' a formulei sau termenului din Z_μ care corespunde unei formule sau unui termen din S', conform cu 3.1, este modelul Bernays al acestei formule sau termen; de exemplu, modelul Bernays al unei formule $\mathfrak{A}$ este $\mathfrak{A}^{zs}$.

[5] În cele ce urmează nu voi încerca să obțin cele mai slabe condiții posibile. De exemplu deși numai anumite părți ale lui Z_μ sînt necesare, voi presupune că întreg sistemul Z_μ poate fi dezvoltat în cadrul teoriei mulțimilor.

Cînd S și S' sînt în relația descrisă în 3.1, putem deduce, folosind a doua ε-teoremă (H—B, II, p. 18), că S' este consistent dacă S este consistent. În ipoteza unei aritmetizări a sintaxei lui S și S', putem demonstra, de asemenea, prin formalizarea demonstrației celei de a doua ε-teoreme, că propozițiile $Con(S)$ și $Con(S')$ sînt deductibile una din alta în $Z\mu$.

Deocamdată, să ne concentrăm atenția asupra unor sisteme ca S' (adică asupra unor sisteme care conțin ε-simbolul lui Hilbert) și să formulăm condiții suficiente pentru validitatea teoremelor ce urmează să fie demonstrate.

Prima condiție privitoare la S' este:

C.1. S' are o speță de variabile x, y, z etc., (un predicat primitiv $(e(x, y)$ sau „x aparține lui y") sau mai multe. S' conține teoremele calculului obișnuit al predicatelor, precum și cele cu privire la ε-simbolul lui Hilbert. (Aceasta revine la a spune că S' presupune, pur și simplu, logica elementară).

A doua condiție privitoare la S' este:

*C*2. Putem dezvolta Z_μ în S'; sau, cu alte cuvinte, S' conține un model S_0 al lui Z_μ: există o regulă efectivă de traducere a termenilor $\mathfrak{t}$ și a formulelor $\mathfrak{A}$ din Z_μ în $\mathfrak{t}^s$ și $\mathfrak{A}^s$ din S', astfel încît toate teoremele lui Z_μ sînt traduse în teoreme ale lui S_0.

Spus mai explicit, *C*2, atrage după sine următoarele consecințe.

C 2.1. Există un termen determinat 0^s al lui S' (de exemplu, termenul $(\varepsilon_x(y)\neg\, [e(y, x))$, care reprezintă termenul 0 din Z_μ.

C 2.2. Există un termen $+\,(x)$ al lui S', astfel încît dacă $\mathfrak{t}$ este un termen al lui Z_μ, atunci termenul $+\,(\mathfrak{t}^s)$ de exemplu, $\varepsilon_x(y)\,[e(y, x) \equiv (y = \mathfrak{t}^s \vee \vee e(y, \mathfrak{t}^s))]$ este $(\mathfrak{t} + 1)^s$.

C 2.3. Există un predicat (nu neapărat primitiv) $N(x)$ din S', astfel încît toate maximele lui Peano pot fi demonstrate pentru 0^s, $N(x)$ și $+\,(x)$. Formulele $(m)\,\mathfrak{A}(m)$ și $(\exists m)\,\mathfrak{A}(m)$ din Z_μ corespund formulelor $(x)\,[N(x) \supset \mathfrak{A}^s(x)]$ și respectiv $(\exists x)\,[N(x)\ \&\ \mathfrak{A}^s(x)]$ din S'.

C 2.4. Există în S' două funcții pentru care se pot demonstra ecuațiile recursive obișnuite pentru adunare și înmulțire.

C 2.5. Pentru oricare termen $\mu_m\,\mathfrak{A}(m)$ din Z_μ există un termen corespunzător $[\mu_m\,\mathfrak{A}(m)]^s$ din S', și anume

$$\varepsilon_x\{[N(x)\ \&\ \mathfrak{A}^s(x)\ \&\ (y)\ ((N(y)\ \&\ \mathfrak{A}^s(y)) \supset y \geqslant x)] \vee [(y)\,N(y) \supset$$
$$\supset \neg\mathfrak{A}^s(y))\ \&\ x = 0^s]\}$$

pentru care se pot demonstra teoremele referitoare la μ-simbol (H—B, II, p. 128). Vom desemna acest termen prin $\mu_m^s\,\mathfrak{A}^s(m)$.

Printre consecințele mai puțin directe ale *C*2 care depind de admiterea unei aritmetizări a sintaxei lui S' se numără următoarele.

C 2.6. (funcția de substituție a lui Gödel). Putem să definim în S' un termen $[\mathfrak{S}(x, y)]$ care nu conține, în afară de variabilele nesupuse la restricții x și y, decît simboluri ale lui S_0 și care este astfel încît dacă $\mathfrak{m}$ este numărul Gödel al unei formule $\mathfrak{A}$ din S', iar $\mathfrak{k}$ este numărul Gödel al formulei obținute din $\mathfrak{A}$ prin substituirea unui numeral $\mathfrak{n}^s$ pentru variabila „x", atunci ecuația $\mathfrak{S}(\mathfrak{m}^s, \mathfrak{n}^s) = \mathfrak{k}^s$ este numeric adevărată și demonstrabilă în S_0 (H—B, II, p. 256).

C 2.7. În S' este posibil să definim un termen $f(x)$ care nu conține, în afară de variabila nesupusă la restricții x, decît noțiuni ale lui S_0 și care pune în

corespondență fiecărui număr natural din S_0 modelul Bernays al acestuia. Sau, mai exact, pentru orice numeral $\mathfrak{n}$, egalitatea $f(\mathfrak{n}^s) = (\mathfrak{n}^s)^{zs}$ este demonstrabilă în S'.

Demonstrație. Fie $\nu(m, n)$ exponentul celui de al n-lea număr prim din descompunerea în factori primi a lui m. Vom reprezenta prin „$F(i, k)$“ formula:

$$\text{“}[\nu(k, 0) = \mu_n(m) \neg e^z(m, n)] \,\&\, (j)\,\{j < i \supset \nu(k, j+1) = \gamma_n(m)\,[e^z(m, n) \equiv$$

$$\equiv (m = {}^z\nu)(m, j) \vee e^z(m, \nu(m, j)))]\}\text{“}.$$

Dacă luăm „$\nu[\mu_m F(k, m), k]^s$“ ca „$f(k)$“, atunci putem să demonstrăm în S_0 că funcția f satisface cerințele impuse. Întrucît nu ne interesează ce valoare ia funcția $f(x)$, atunci cînd x nu este număr întreg, este ușor să modificăm raționamentul de mai sus astfel, încît să obținem o funcție generală $f(x)$ în locul funcției $f(k)$.

C 2.8. Există în S' un termen $h(x)$ astfel încît, dacă $\mathfrak{m}^s$ este numărul Gödel al unui termen $\mathfrak{t}^s$ al lui S', atunci $h(\mathfrak{m}^s)$ este numărul Gödel al termenului $(\mathfrak{t}+1)^s$ al lui S', adică al termenului $+(\mathfrak{t}^s)$.

Condiția următoare este:

C 3. S' are un model ω-consistent.

O consecință imediată este:

C 3.1. Pentru fiecare formulă $\mathfrak{A}(a)$ a lui Z_μ care are ca singură variabilă liberă pe a, $[\mu_m \mathfrak{A}(m) = \mathfrak{n}]^s$ este adevărată pentru o valoare a lui $\mathfrak{n}$ dintre numerele 0, 1, 2 etc.

Demonstrație. Întrucît $(\exists n)\,[n = \mu_m \mathfrak{A}(m)]$ este teoremă a lui Z_μ, traducerea sa este teoremă a lui S_0. Conform cu 2.1 și *C* 3, aserțiunea este demonstrată.

Din C 3 urmează, de asemenea, că toate lemele 2.4—2.10 sînt valabile pentru S'.

A patra condiție privește posibilitatea definirii în S' a noțiunilor semantice de adevăr și desemnare ale sistemului S_0 (respectiv, partea corespunzătoare lui Z_μ în S'):

C 4 a. Putem găsi în S' un predicat $W(x)$ (o formulă avînd ca singură variabilă liberă pe x) astfel încît, pentru fiecare propoziție $\mathfrak{A}$ din S_0, dacă numărul Gödel al acesteia este $\mathfrak{n}$, atunci putem să demonstrăm în S': $W(\mathfrak{n}^s) \equiv \mathfrak{A}$.

C 4 b. În S' se poate defini o funcție D, astfel încît, pentru fiecare termen determinat $\mathfrak{t}$ din S_0 care nu conține nici o variabilă liberă, dacă numărul Gödel al acestuia este $\mathfrak{n}$, atunci putem să demonstrăm în S': $D(\mathfrak{n}^s) = \mathfrak{t}$.

Dacă condițiile *C* 2 și *C* 4 *b* sînt îndeplinite pentru un anumit sistem S', putem defini o funcție $\mathfrak{b}(n)$ în S_0, astfel încît avem (H—B, II, pp. 261—263):

*C*4 b 1. Dacă $\mathfrak{A}$ este o propoziție oarecare din S_0 iar $\mathfrak{n}$ este numărul Gödel al acesteia, atunci putem demonstra în S': $D[\mathfrak{b}(\mathfrak{n}^s)] = 0 \equiv \mathfrak{A}$.

O altă condiție utilă este:

C 4 c. Fiecare predicat din S_0 poate fi reprezentat în S': pentru fiecare predicat $\mathfrak{A}(x)$ din S' care conține, alături de variabila nesupusă la restricții

x, numai simboluri din S_0, putem găsi un termen $\mathfrak{t}$ în S', astfel încît putem demonstra în S' pentru el și pentru orice numeral $\mathfrak{n}$ că $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}^s)$, dacă și numai dacă $e(\mathfrak{n}^s, \mathfrak{t})$ ($\mathfrak{n}^s$ aparține lui $\mathfrak{t}$) [6].

§ 4. PARADOXUL LUI EPIMENIDE

Acum sîntem în măsură să enunțăm și să demonstrăm existența anumitor propoziții indecidabile în sistemele care satisfac condiții corespunzătoare.

Să presupunem că S' satisface condițiile $C1$, $C2$ și $C4a$. Să considerăm următoarea formulă a lui S':

(1) $\neg W^{zs}\{f[\mathfrak{s}(x, x)]\}$.

Mai departe, să admitem că $\mathfrak{q}$ este numărul Gödel al următoarei formule a lui S':

(2) $\neg W^{zs}\{f[\mathfrak{s}(\mathfrak{p}^s, \mathfrak{p}^s)]\}$,

$\mathfrak{p}$ fiind numărul Gödel al formulei (1).

Atunci (2) este o propoziție din S_0, deoarece $f[\mathfrak{s}(\mathfrak{p}^s, \mathfrak{p}^s)]$ este un termen constant din S_0, iar traducerea unei formule W^z a lui Z_μ este o formulă a lui S_0. De asemenea, conform cu $C2.6$, se mai poate demonstra în S_0 și:

(3) $\mathfrak{s}(\mathfrak{p}^s, \mathfrak{p}^s) = \mathfrak{q}^s$.

Acum asertăm:

Teorema 1. Dacă S' satisface condițiile $C1$—$C3$ și $C4a$, atunci propozițiile $W(\mathfrak{q}^s)$ și $W^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)]$, unde $\mathfrak{q}$ este determinat ca mai sus, sînt indecidabile în S'.

Demonstrație. Conform condiției $C4$ a, putem demonstra în S' echivalența între $W(\mathfrak{q}^s)$ și (2). Utilizînd (3), putem demonstra în S' și $S\#$ (vezi 2.8) următoarea echivalență:

(4) $W(\mathfrak{q}^s) \equiv \neg W^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)]$.

Dacă $W(\mathfrak{q}^s)$ este o propoziție demonstrabilă în S', atunci traducerea ei $W(\mathfrak{q}^s)^{zs}$ sau $W^{zs}(\mathfrak{q}^{szs})$ este demonstrabilă în $S\#$ conform cu 2.11. Conform condiției C 2.7, $f(\mathfrak{q}^s) = \mathfrak{q}^{szs}$ este demonstrabilă în S'.

Așadar, conform condiției C1, putem demonstra în $S\#$:

(5) $W^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)]$.

În consecință, potrivit lui (4) și (5), dacă $W(\mathfrak{q}^s)$ este demonstrabilă în S', atunci $S\#$ ar fi inconsistent, ceea ce contrazice 2.10.

În mod similar, dacă $\neg W(\mathfrak{q}^s)$ este demonstrabilă în S', atunci se poate arăta că $\neg$(5) este demonstrabilă în $S\#$. În acest caz, constatăm iarăși că, conform lui (4), ar fi contrazisă 2.10.

[6] Dacă S' conține axioma infinitului, atunci cerința este în mod evident satisfăcută. La Bernays [1] se demonstrează că $C4c$ este satisfăcută de teoria mulțimilor dezvoltată acolo chiar și atunci cînd axioma infinitului nu este inclusă.

Prin urmare, $W(\mathfrak{q}^s)$ este indecidabilă în S'. Conform lui (4), $W^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)]$ este și ea indecidabilă în S'.

În mod alternativ, teorema 1 poate fi demonstrată și direct, pe baza condiției $C3$. Astfel, întrucît (4) este teoremă a lui S', ea este adevărată. Așadar, conform condiției C 2.7, propoziția $W(\mathfrak{q}^s)$ și modelul Bernays al ei trebuie să aibă valori de adevăr opuse. Așadar, conform lui 2.7, $W(\mathfrak{q}^s)$ nu este decidabilă în S'.

Pe baza condiției $C4$ b. 1, făcînd uz de $D(\mathfrak{b}(x) = 0$ în locul lui $W(x)$, putem demonstra în mod similar (unde $\mathfrak{q}$ este numărul Gödel al unei formule corespunzătoare formulei (2) de mai sus):

4.1. Dacă S' satisface condițiile $C1-C3$ și $C4$b, atunci propozițiile $D(\mathfrak{b}(\mathfrak{q}^s)) = 0$ și $D^{zs}[\mathfrak{b}^{zs}(f(\mathfrak{q}^{zs}))] = 0^{zs}$ sînt indecidabile în S'.

O formă a teoremei lui Kreisel (*op. cit.*) poate fi și ea demonstrată pe baza abordării de față.

4.2. Dacă S' satisface condițiile $C1-C3$ și $C4$c, iar $\mathfrak{t}$ este termenul (din S') care, pentru orice numeral $\mathfrak{m}$, verifică propoziția

$$e(\mathfrak{m}^s, \mathfrak{t}^s) \equiv \neg e^{zs}[f(\mathfrak{m}^s), \mathfrak{m}^s]$$

și dacă $\mathfrak{n}^s$ este de așa natură încît $\mathfrak{t}^{zs} = \mathfrak{n}^s$ este adevărat, atunci propoziția

(6) $e(\mathfrak{n}^s, \mathfrak{t})$

este indecidabilă în S'.

Demonstrație. Conform condiției $C2.7$ și punctului (e) din 2.1, $f(\mathfrak{n}^s) = \mathfrak{n}^{szs}$ este adevărată. Așadar, conform definiției lui $\mathfrak{t}$, $e(\mathfrak{n}^s, \mathfrak{t}) \equiv \neg e^{zs}(\mathfrak{n}^{szs}, \mathfrak{n}^s)$ este adevărată. În consecință, conform cu 2.5 și substitutivității egalilor ($\mathfrak{t}^{zs}$ în locul lui $\mathfrak{n}^s$),

(7) $e(\mathfrak{n}^s, \mathfrak{t}) = \neg[e(\mathfrak{n}^s, \mathfrak{t})]^{zs}$

este adevărată. În consecință, (6) și modelul ei Bernays trebuie să aibă valori de adevăr diferite. Așadar, conform cu 2.7, propoziția 4.2 este demonstrată.

Observăm, în treacăt, că termenul $\mathfrak{t}$ desemnează mulțimea acelor numere n^s ale căror modele $(n^s)^{zs}$ nu aparțin lui n^s. Astfel, avem aici un analog al paradoxului lui Russell.

În această ordine de idei, putem menționa două corolare oarecum amuzante ale acestor teoreme.

Conform condiției C3, sau formula (6), sau negația acesteia este adevărată. Să presupunem că (6) este adevărată. Să considerăm sistemul R obținut din S' prin adăugarea propoziției (6) ca axiomă nouă, și să considerăm, de asemenea, sistemul $R\#$ obținut din R prin adăugarea propoziției $[Con(R)]^s$. Conform lui 3.1, un model Bernays al lui (6) este adevărat și demonstrabil în $R\#$. Pe de altă parte, conform lui (7), negația unui alt model Bernays al lui (6) este de asemenea adevărată și demonstrabilă în R (și prin urmare și în $R\#$). Așadar, dacă (6) este adevărată în cadrul modelului, atunci un anumit model Bernays al lui (6) este adevărat, în timp ce celălalt este fals. La fel dacă este adevărată negația lui (6)[7].

[7] Vezi și Kreisel [3], I, p. 283.

Un al doilea corolar este următorul. Conform teoremei 1, $W^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)]$ este indecidabilă în S_0 (și în S'). Dacă $(S\#)_2$ este sistemul obținut din $S\#$ prin adăugarea ca axiomă a propoziției $[Con(S\#)]^s$, atunci, conform lui 3.1, sistemul $S\#$ este și el traductibil în $(S\#)_2$. Dar modelul Bernays $W^{zs}(f(\mathfrak{q}^s) \equiv \neg W^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)]^{zs}$ al lui (4) este demonstrabil în $(S\#)_2$. Așadar, raționînd la fel ca în demonstrația teoremei 1, ajungem la concluzia că noul model Bernays „$\mathrm{tr}_2\{W^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)]\}$" al lui (5) este indecidabil în $S\#$. În mod similar, dacă $(S\#)_3$ se obține din $(S\#)_2$ prin adăugarea propoziției $Con[(S\#)_2]$, atunci modelul „$\mathrm{tr}_3\{\mathrm{tr}_2[W^{zs}(f(\mathfrak{q}^s))]\}$" al modelului lui (5) este, de asemenea, indecidabil în $(S\#)_2$. Așadar, făcînd uz de condiția $C2.7$, avem:

4.3. Propozițiile $[W(\mathfrak{q}^s)]^{zs}$, $\mathrm{tr}_2\{[W(\mathfrak{q}^s)]^{zs}\}$ și așa mai departe, ad infinitum, sînt toate propoziții indecidabile ale sistemului S_0 (și ale sistemului S').

§ 5. PARADOXUL LUI RICHARD

În prealabil vom face următoarea observație. Raționamentul utilizat în paradoxul lui Richard poate fi întrebuințat ca să demonstrăm că este imposibil să definim în S_0 relația de desemnare a lui S_0. Se face uz de faptul că funcțiile $\mathfrak{S}(x, y)$ și $h(x)$ ($C2.6$ și $C2.8$) pot fi definite în S_0.

5.1. Este imposibil să găsim în S_0 un termen $D(m)$, astfel încît pentru fiecare termen $\mathfrak{t}$ din S_0 care nu conține variabile libere, dacă $\mathfrak{n}$ este numărul Gödel al lui $\mathfrak{t}$, putem demonstra în S_0: $D(\mathfrak{n}^s) = \mathfrak{t}$.

Demonstrație. Să considerăm un termen oarecare $D(m)$ din S_0. Să admitem că numărul Gödel al termenului

$$D\{h[\mathfrak{S}(x, x)]\}$$

este $\mathfrak{p}$ și că cel al termenului

$$D\{h[\mathfrak{S}(\mathfrak{p}^s, \mathfrak{p}^s)]\}$$

este $\mathfrak{q}$. Întrucît $\mathfrak{S}(\mathfrak{p}^s, \mathfrak{p}^s) = \mathfrak{q}^s$, putem demonstra în S_0, în ipoteza că D are proprietatea dorită,

(8) $D(\mathfrak{q}^s) = D[h(\mathfrak{q}^s)]$.

În plus, prin ipoteză și prin definiția lui $h(x)$, putem demonstra în S_0.

(9) $D(\mathfrak{q}^s) + {}^s1^s = D[h(\mathfrak{q}^s)]$.

Deci prin (8) și (9) obținem o contradicție. Așadar, termenul $D(m)$ nu posedă proprietatea care ne interesează[8].

Plecînd de aici, putem găsi o propoziție indecidabilă într-un sistem S' care satisface condițiile $C1-C3$ și $C4$b.

Să considerăm propoziția $\mathfrak{t}_1 = D[h(\mathfrak{t}_2)]$, unde $\mathfrak{t}_1$ și $\mathfrak{t}_2$ sînt termeni determinați ai lui S', iar modelul Bernays al ei este:

(10) $\{\mathfrak{t}_1 = D[h(\mathfrak{t}_2)]\}^{zs}$ sau $\mathfrak{t}_1^{zs} = {}^{zs}D^{zs}[h^{zs}]\,(\mathfrak{t}_2^{zs})]$.

[8] Aceasta simplifică întrucîtva o demonstrație din H-B, II, pp. 263—268.

Dacă substituim $f(y)$ și $f(\mathfrak{Z}(x, x))$ în locul lui $\mathfrak{t}_1^{zs}$ și $\mathfrak{t}_2^{zs}$, rezultatul $f(y) = {}^{zs}D^{zs}\{h^{zs}[f(\mathfrak{Z}(x, x))]\}$ este, la rîndul său, o formulă a sistemului S'. De asemenea,

$$\mu_m^s [f(m) = {}^{zs}D^{zs}\{h^{zs}(f[\mathfrak{Z}(x, x])\}] \tag{11}$$

este un termen al lui S' care conține pe x ca singură variabilă liberă. Să presupunem că numărul Gödel al lui (11) este $\mathfrak{p}$ și că $\mathfrak{q}$ este numărul Gödel al lui

$$\mu_m^s [f(m) = {}^{zs}D^{zs}\{h^{zs}(f[\mathfrak{Z}(\mathfrak{p}^s, \mathfrak{p}^s)]\}] \tag{12}$$

care este un termen al lui S_0. Conform condiției $C4$b, putem demonstra în S': $D(\mathfrak{q}^s) = (12)$. Conform condiției $C2.6$, $S(\mathfrak{p}^s, \mathfrak{p}^s) = \mathfrak{q}^s$. Așadar, putem demonstra în S':

$$D(\mathfrak{q}^s) = \mu_m^s \{f(m) = {}^{zs}D^{zs}(h^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)])\} \tag{13}$$

Conform condiției $C3.1$, putem să găsim un $\mathfrak{n}$ printre numerele 0, 1, 2 ... astfel încît

$$\mathfrak{n}^s = D(q^s) \tag{14}$$

este adevărată (în modelul din 2.1). Întrucît, conform condiției $C2.8$, $h(\mathfrak{q}^s)$ este numărul Gödel al lui $+ [(12)]$, urmează conform condiției $C4$b, că $D[h(\mathfrak{q}^s)] = +[(12)]$ este o propoziție demonstrabilă în S'. Din această egalitate și $D(\mathfrak{q}^s) = (12)$, obținem conform condiției $C1$,

$$\mathfrak{n}^s = D(\mathfrak{q}^s) \supset (\mathfrak{n} + 1)^s = D[h(\mathfrak{q}^s)].$$

În consecință, această formulă este adevărată, conform punctului (2) din 2.1; iar întrucît (14) este o propoziție adevărată, obținem, pe baza lui 2.5, că

$$(\mathfrak{n} + 1)^s = D[h(\mathfrak{q}^s)] \tag{15}$$

este de asemenea adevărată.

Teorema 2. Dacă S' satisface condițiile $C1$—$C3$ și $C4b$, atunci (15) este indecidabilă în S'.

Demonstrație. Întrucît — conform punctului (e) din 2.1, toate teoremele lui S' sînt adevărate, nu vom distinge între adevăr și demonstrabilitate în S', deoarece prin raționamentul nostru nu urmărim decît stabilirea adevărului. Vom aplica, de asemenea, în mod implicit, 2.5. Să presupunem că (15) este o propoziție decidabilă în S'. Atunci ea este teoremă, ca fiind adevărată. Așadar, modelul ei Bernays

$$(\mathfrak{n} + 1)^{szs} = {}^{zs}D^{zs}[h^{zs}(\mathfrak{q}^{szs})] \tag{16}$$

este adevărat, conform cu 2.6. Pe baza condițiilor $C2.7$ și $C1$, avem

$$(\exists m)\{f(m) = {}^{zs}D^{zs}(h^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)])\}. \tag{17}$$

Conform lui (13), (17) și proprietății lui μ, avem: $f[D(\mathfrak{q}^s) = {}^{zs}D^{zs}\{h^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)]\}$. Conform lui (14), $f(\mathfrak{n}^s) = {}^{zs}D^{zs}\{h^{zs}[f(\mathfrak{q}^s)]\}$. Conform condiției $C2.7$,

$$\{\mathfrak{n}^s = D[h(\mathfrak{q}^s)]\}^{zs}. \tag{18}$$

Pe de altă parte, în S' putem să demonstrăm: $\neg \mathfrak{n}^s = (\mathfrak{n} + 1)^s$. Așadar, conform cu (15), putem să demonstrăm în S' și: $\neg \mathfrak{n}^s = D\,[h(\mathfrak{q}^s)]$. Așadar,

$$\neg\{\mathfrak{n}^s = D\,[h(\mathfrak{q}^s)]\}^{zs} \tag{19}$$

este și ea adevărată. Întrucît (18) și (19) nu pot fi ambele adevărate, ipoteza că propoziția (15) ar fi decidabilă în S' este falsă.

În treacăt fie spus, putem să demonstrăm iarăși că modelul Bernays al unei propoziții adevărate este fals. Într-adevăr, în caz contrar, (16) și (19), fiind modele Bernays ale unor propoziții adevărate, ar fi ambele adevărate și astfel am ajunge iarăși la concluzia absurdă că (18) și (19) sînt ambele adevărate.

§ 6. OBSERVAȚII FINALE

De regulă, teoriile mulțimilor sînt formulate fără utilizarea ε — simbolului lui Hilbert. Rezultatele demonstrate adineauri se referă la sisteme S' obținute din atare sisteme S prin adăugarea ε — simbolului. Ar fi natural să cercetăm dacă există propoziții indecidabile similare în sistemele S, în cazul cînd acestea satisfac condiții similare. Răspunsul este pozitiv și poate fi verificat, apelînd la metode uzuale de introducere a termenilor în context (vezi, de exemplu, H-B, II, p. 259). Astfel, putem repeta într-o versiune oarecum modificată toate considerentele precedente, vorbind despre termeni în mod ocolit; sau, dacă nu, putem face uz de a doua ε — teoremă (H-B, II, p. 18).

Astfel, fie L un sistem formulat integral în calculul pur al predicatelor și fie L' obținut din L prin adăugarea ε — simbolului și a ε — formulelor. În consecință, L' include L (H-B, II, p. 8). Conform celei de a doua ε — teoreme, fiecare teoremă a lui L' care nu conține ε — simbolul este totodată teoremă a lui L. Așadar, dîndu-se o propoziție indecidabilă $\mathfrak{A}$ a lui L', nu avem nevoie, pentru a găsi propoziția corespunzătoare din L, decît să găsim în L' o propoziție $\mathfrak{A}'$, care nu conține ε — simbolul astfel încît echivalența dintre $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{A}'$ să poată fi demonstrată în L'. Aceasta este posibil pentru oricare din propozițiile indecidabile date în § 4 și § 5, deoarece știm că termenii din aceste propoziții pot fi eliminați prin transformarea unor contexte întregi. Nu voi intra aici în detaliile problemei.

De altfel, dacă L conține eventual o axiomă convenabilă a alegerii, nu este necesar să facem uz de a doua ε — teoremă, deoarece un sistem corespunzător L' care dispune de ceva în genul simbolului ε se poate obține în acest caz din axiomele lui L. Într-adevăr, ε — termenii folosiți în S' pot fi înlocuiți peste tot prin ι — termeni (descripții) și astfel, în locul celei de a doua ε — teoreme devine suficientă teorema de eliminare pentru ι — termeni.

Altă problemă este următoarea: ce sisteme S și S' ar satisface condițiile pentru aceste rezultate? Dacă lăsăm la o parte condiția ω — consistenței, numeroase sisteme obișnuite de teoria mulțimilor (eventual, după ce au fost făcute unele reajustări pur formale) satisfac — după cum se poate demonstra — celelalte condiții $C1$, $C2$, $C4$a, $C4$b, $C4$c. Dar în cazul celor mai multe sisteme nu se cunoaște ω — consistența și nici simpla consistență a acestora.

Totuși se poate demonstra că sistemul (S) descris la Kreisel ([3], II) satisface toate condițiile. Faptul că (S) satisface condițiile $C1$, $C2$ și $C4$c este

demonstrat la Bernays [1]. Totodată, este posibil să dăm un model ω — consistent pentru (S). (Vezi discuția la Kreisel [3], II). Mai mult, în (S) se pot defini, de asemenea, adevărul și desemnarea pentru Z_μ sau S_0. Aceasta se poate realiza prin aplicarea unor metode cunoscute. Astfel, dacă considerăm că (S) operează cu mulțimi și clase (două genuri de obiecte) și că (S_1) este acea parte a lui (S) care operează numai cu mulțimi, atunci Z_μ poate fi reprezentat de la bun început în (S_1). Drept urmare, problema se reduce la definirea în (S) a adevărului și desemnării pentru (S_1). Dar această din urmă problemă poate fi tratată, de exemplu, în maniera din Wang [7]. Prin urmare, putem să demonstrăm că (S) satisface, de asemenea, condițiile $C4$a și $C4$b.

Mai rămîne să distingem, în cadrul raționamentelor de mai sus, demonstrațiile constructive și cele în care se face uz de *tertium non datur*. Prima demonstrație a teoremei 1 are un caracter constructiv. Întrucît demonstrația uzuală a condiției $C3$ face uz de *tertium non datur*, demonstrațiile pentru 4.2 și teorema 2, bazate parțial pe $C3$, nu sînt constructive. Demonstrația inițială a lui Kreisel pentru 4.2 este constructivă.

BIBLIOGRAFIE

[1] P. Bernays, *A System of Axiomatic Set Theory*, partea II, în „Journ. Symbolic Logic", **6** 1941, pp. 1—17.

[2] D. Hilbert și P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 2, Berlin (Springer), 1939, xii + 498 p.

[3] G. Kreisel, *Note on Arithmetic Models for Consistent Formulae of the Predicate Calculus*, partea I, în „Fund. Math"., **37** (pentru 1950, apărută în 1951), pp. 265—285; partea II, *Proceedings of the XI-th International Congress of Philosophy*, Bruxelles, august 20—26, 1953, **14**, 1953, pp. 39—49.

[4] Idem, *Some Concepts Concerning Formal Systems of Number Theory*, în „Math. Zeit"., **57**, 1952, pp. 1—12.

[5] H. Wang, *Arithmetic Translations of Axiom Systems*, în „Trans. Am. Math. Soc.," **71**, 1951, pp. 283—293.

[6] Idem, *Arithmetic Models of Formal Systems*, în „Methodos", **3**, (1951), pp. 217—232.

[7] Idem, *Truth Definitions and Consistency Proofs*, în „Trans. Am. Math. Soc.," **73**, 1952, pp. 243—275.

CAPITOLUL XXIII
FORMALIZAREA MATEMATICII[1]

§ 1. PĂCATUL ORIGINAR AL LOGICIANULUI FORMAL

Interesul, în același timp, pentru sistem și obiectivitate este păcatul originar al logicianului formal. El ispășește acest păcat prin permanente frustrări și prin faptul că de multe ori duce viața unui paria intelectual. Sarcina înghesuirii unei mase mari de fapte obstinate într-un sistem mai mult sau mai puțin rigid se poate dovedi penibilă, mai ales din cauză că faptele matematicii se numără printre faptele cele mai obstinate. Totodată, pe măsură ce înaintăm pe calea generalului și abstractului, ne îndepărtăm tot mai mult de experiența matematică brută. Întrucît intuiția încetează să mai fie efectiv operantă, sîntem pîndiți de numeroase capcane neașteptate. Frustrările logicianului formal nu-i aduc prea multe manifestări de simpatie. Colegii săi filozofi consideră că este prea rigid, în timp ce prietenii săi matematicieni consideră că e prea speculativ. Viața de paria intelectual se poate datora parțial temperamentului și parțial faptului că profesiunea de logician este încă în faza sa de tinerețe. Dar lipsa regretabilă de atracție a logicii mai poate dăinui parțial și din cauză că foarte puține din metodele bine stabilite ale matematicii par să fie aplicabile în tratarea problemelor serioase ale logicii.

Metoda axiomatică convine foarte bine pentru obținerea unor rezultate exacte și în același timp sistematice. Cît de tentant ar fi să putem obține un sistem de axiome în care toate axiomele și deducțiile să fie intuitiv clare, iar toate teoremele matematicii să fie demonstrabile! Nu încape îndoială că un asemenea sistem l-ar fi mulțumit pe Descartes, care nu admite decît intuiția și deducția, acestea fiind pentru el singurele „acte ale intelectului nostru prin care putem ajunge la cunoașterea lucrurilor fără teama de a ne înșela". Într-adevăr, după Descartes, intuiția și deducția „sînt căile cele mai sigure care duc spre știință și ingeniul nu trebuie să admită mai multe, ci să le respingă pe toate celelalte, ca suspecte și supuse erorii" [2].

[1] Acest capitol a apărut în „Jour. Symbolic Logic", **19**, 1954, pp. 241—266. El a fost discutat de W. Stegmüller în „Arkiv f. Philos", vol. **7**, 1957, pp. 45—81 și de Fraenkel și Bar-Hillel în *Foundations of set theory*, 1958. Unele inadecvări și omisiuni din acest capitol vor fi discutate în capitolul XXV.

[2] Cf. R. Descartes, *Reguli*, trad. în limba română de Corneliu Vilt, Editura Științifică, București, 1964, pp. 14—15.

§ 2. PERSPECTIVA ISTORICĂ

Unificarea întreprinsă de Euclid a unor ansambluri de descoperiri izolate în geometria greacă a fost, indubitabil, primul succes impresionant în sistematizarea matematicii. Într-un fel, aceasta era cît se poate de firesc. Dintre cele 465 de propoziții ale *Elementelor* lui Euclid, unele sînt pe deplin evidente pentru intuiția noastră geometrică, iar altele nu sînt atît de evidente. În fața demonstrațiilor existente ale propozițiilor mai puțin evidente pe baza acelora mai evidente, era firesc să ne întrebăm cum sînt legate între ele diversele teoreme. Obținerea teoremelor aranjate în felul în care le-a aranjat efectiv Euclid a devenit, în primul rînd, o chestiune de perseverență și perspicacitate.

Există însă mai multe aspecte care merită să fie menționate. În primul rînd, sistematizarea cere mai mult decît aptitudinile unui bun bibliotecar. De exemplu, abia în secolul al XIX-lea Pasch a reușit să formuleze pentru prima oară axiomele privitoare la conceptul „între", axiome care fuseseră admise tacit fără a fi însă enunțate în mod explicit în *Elementele* lui Euclid. Pe de altă parte, de multe ori este necesară dezvoltarea foarte minuțioasă a unui domeniu pentru ca acesta să devină susceptibil de o organizare sistematică și riguroasă. Istoria calculului ilustrează limpede acest aspect: fundat în secolul al XVII-lea, rapid dezvoltat în secolul următor, calculul nu a căpătat fundamente acceptabile decît în secolul al XIX-lea și pînă și în ziua de astăzi logicienii în general au unele îndoieli în această privință sau chiar cred, ca de pildă Weyl, că analiza este clădită pe nisip.

În secolul al XIX-lea, încercările de fundare a analizei pe o bază sigură s-au desfășurat, în genere, sub titulatura de „aritmetizare a analizei". Este bine cunoscut faptul că Cauchy, Weierstrass, Dedekind și Cantor au adus contribuții însemnate la acest program. Într-adevăr, rezultatele lor au fost primite atît de bine de către matematicieni, încît în 1900 Poincaré afirma: „Astăzi, în analiză nu mai rămîn decît numerele întregi și sistemele finite sau infinite de numere întregi, legate între ele printr-o rețea de relații de egalitate sau inegalitate. Matematica, așa cum spunem, a fost aritmetizată. Putem spune astăzi că rigoarea absolută a fost atinsă" [3].

Dacă nu înțelegem prin „aritmetizare" decît eliminarea intuiției geometrice, atunci cu greu ar putea fi contestat acest succes. Dacă însă, înțelegem prin „aritmetizare" o reducere a analizei la o teorie a numerelor întregi, atunci chestiunea se complică, deoarece sînt necesare nu numai numerele întregi, ci și „sisteme finite sau infinite de numere întregi". În prezent, ar fi mai uzual să ne referim la aceste „sisteme" ca la mulțimi sau clase. Ceea ce s-a realizat nu este fundarea analizei exclusiv pe temelia teoriei numerelor întregi ci, de fapt, pe temelia teoriei numerelor întregi plus teoria mulțimilor. În consecință, problema obținerii unei teorii satisfăcătoare a numerelor reale și a funcțiilor reale nu este rezolvată, ci deplasată în mare parte înspre problema stabilirii unei teorii satisfăcătoare a mulțimilor. Și, după cum știm, obținerea unei sănătoase teorii a mulțimilor nu este un lucru tocmai ușor.

[3] *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathèmatiques*, în „Compte-rendu du II-ème Congrès International des Mathématiciens, Paris, 1902, pp. 200—202.

§ 3. CE ESTE O MULȚIME?

Vorbind mai explicit, ceea ce este necesar în vederea obținerii unei baze riguroase a calculului, este o teorie exactă a conținutului. Întrucît numerele reale pot fi privite ca mulțimi arbitrare de numere raționale sau de numere întregi pozitive care satisfac cîteva condiții foarte largi, reiese că o dezvoltare exactă a calculului presupune o teorie generală a mulțimilor.

Problemele matematicii obișnuite trebuiau să ducă în secolul al XIX-lea la controverse în jurul noțiunii de mulțime și dintr-un alt motiv. De multe ori, se punea problema considerării unor curbe arbitrare sau a unor funcții arbitrare de numere reale. De exemplu, se pune întrebarea dacă o funcție arbitrară este reprezentabilă printr-o serie trigonometrică. Sau întrebarea: care sînt funcțiile integrabile? Mulți matematicieni serioși se preocupau de asemenea probleme. Dar pentru a putea da un răspuns la aceste întrebări s-ar părea că este necesar, în prealabil, să avem o idee destul de precisă despre ceea ce este o funcție sau o mulțime arbitrară.

Este interesant de notat ca un fapt istoric că matematicienii vorbesc adesea despre funcții și curbe arbitrare fără ca să aibă o definiție precisă a acestor noțiuni și avînd în vedere, în realitate, numai anumite funcții speciale și curbe speciale. Discrepanța mare care există între arbitrarul real și arbitrarul moderat de care are nevoie matematica vie explică posibilitatea diverselor sisteme radical diferite de teoria mulțimilor care concurează între ele pentru a da fundamentele adevărate ale matematicii.

În secolul al XIX-lea, nimeni n-a încercat să dea o definiție exactă a noțiunii de mulțime arbitrară sau de funcție arbitrară. Pentru aceasta, ar fi fost necesar un examen minuțios al tuturor mijloacelor de definiție aflate atunci la dispoziție. Pe atunci nu era nici un motiv să se creadă că această muncă ar fi necesară, după cum nu exista nici pregătirea prealabilă suficientă pentru ducerea ei la îndeplinire. Abia după ce, în jurul anului 1900, s-au descoperit paradoxele, s-a înțeles faptul că nu toate legile sau definițiile aparente puteau să definească mulțimi și că era necesar să se impună unele restricții asupra mijloacelor permise de definire a mulțimilor.

Modul cum s-au desfășurat evenimentele din punct de vedere istoric a fost diferit de procesul logic de coborîre de la mai abstract la mai puțin general. Cantor nu dispunea de o teorie generală a mulțimilor pentru a-și începe investigațiile sale, ci a fost condus la studiul mulțimilor de puncte (mulțimi de numere reale) de o problemă relativ mai concretă, care se punea într-un mod foarte natural în matematica obișnuită.

Este vorba de problema reprezentării funcțiilor prin serii trigonometrice, problemă de care se interesau numeroși matematicieni atunci cînd Cantor și-a început cercetările sale, pe la 1870. Încercînd să generalizeze unicitatea reprezentării la anumite funcții cu o infinitate de puncte singulare, Cantor a ajuns la noțiunea de mulțime derivată, ceea ce nu numai că a marcat începutul studiului întreprins de el asupra teoriei mulțimilor de puncte, ci totodată l-a împins mai tîrziu la construcția numerelor ordinale transfinite.

Asemenea fapte istorice ar trebui să contribuie la spulberarea impresiei greșite că Georg Cantor ar fi inventat printr-o singură trăsătură de geniu întreaga teorie a mulțimilor, izolată deplin de curentul principal al matematicii timpului. Totodată, ar fi interesant să reamintim faptul că matemati-

cieni ca Heine și Dedekind erau familiarizați cu problemele tratate de Cantor în teoria sa a mulțimilor și că ar fi fost pe deplin capabili să le trateze, dacă ar fi dorit acest lucru. Într-adevăr, du Bois-Reymond a descoperit independent de Cantor noțiunea de mulțime derivată ca și noțiunea de mulțime derivată de ordin infinit care l-a dus pe Cantor la numerele ordinale transfinite din a doua clasă de numere. Mai mult, du Bois-Reymond l-a anticipat pe Cantor[4] cu circa douăzeci de ani în ce privește raționamentul diagonalei care este atribuit astăzi în mod general lui Cantor. Cauza principală care a făcut ca acesta din urmă să exercite o influență mult mai mare este probabil capacitatea lui de a se degaja treptat de aplicații și de a dezvolta teoria mulțimilor din ce în ce mai mult pentru ea însăși. Numai prin faptul că a generalizat și a urmat astfel consecințele logice pretutindeni unde se ivea prilejul, Cantor a putut să devină fondatorul teoriei mulțimilor.

§ 4. NENUMĂRABILUL ȘI IMPREDICATIVUL

Noțiunile de numărabilitate și bine ordonare erau pentru Cantor de însemnătate centrală; prima este stîlpul de temelie al teoriei cantoriene a numerelor cardinale iar a doua al teoriei cantoriene a numerelor ordinale.

Cele mai remarcabile salturi executate de Cantor în cadrul inventării teoriei mulțimilor sînt următoarele două: imaginarea numerelor ordinale transfinite din a doua clasă a sa de numere, precum și folosirea mulțimilor nenumărabile și impredicative. Astăzi se știe că primul pas este neprimejdios și folositor (în special, în cadrul anumitor considerații metamatematice) în timp ce al doilea rămîne un mister care n-a adus multă lumină în nici o problemă a matematicii obișnuite. Nu este limpede de ce matematica nu s-ar putea dispensa de mulțimile impredicative sau absolut nenumărabile.

Cantor dă două demonstrații de nenumerabilitate a numerelor reale și o demonstrație de nenumerabilitate a celei de a doua clase de numere a sa. Toate aceste demonstrații fac uz de mulțimi impredicative.

Întrucît nu toată lumea este familiarizată cu natura definițiilor impredicative, ar fi poate cazul să ne oprim și să examinăm binecunoscutul raționament al diagonalei, utilizat în demonstrația nenumerabilității numerelor reale.

Pentru a demonstra această nenumărabilitate este suficient, după cum se știe, să demonstrăm că mulțimea M a tuturor mulțimilor de numere pozitive întregi nu este nenumărabilă. Demonstrația lui Cantor pentru aceasta este următoarea. Să presupunem că ar exista o corespondență biunivocă $f(x, k)$ sau $x = f(k)$ între M și mulțimea P a numerelor pozitive întregi, astfel încît pentru fiecare număr întreg pozitiv dat k_0 există o mulțime $f(k_0)$ în M, care este imaginea lui k_0. Oricare ar fi numărul întreg pozitiv k, el sau aparține imaginii sale $f(k)$, sau nu aparține. Să considerăm mulțimea N a tuturor numerelor întregi pozitive k care nu aparțin lui $f(k)$. N ar fi o mulțime de numere întregi pozitive și deci un membru al lui M. Prin ipoteză, ar exista un întreg pozitiv n, astfel încît N este $f(n)$. Sau n aparține la $f(n)$, sau nu aparține. Dacă n aparține la $f(n)$ atunci, conform definiției lui N, n nu aparține la $f(n)$, $f(n$

[4] Vezi, de exemplu., P. du Bois-Reymond, *Über asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen*, în „Mathematische Annalen", **8**, 1875, pp. 363–414.

fiind N. Dacă N nu aparține la $f(n)$, atunci, tot conform definiției lui N, n aparține la $f(n)$. Așadar, obținem o contradicție. Rezultă că pentru orice corespondență biunivocă dată între întregii pozitivi și mulțimile de întregi pozitivi, putem găsi o mulțime de întregi pozitivi care diferă de toate mulțimile care au fost deja enumerate.

Asupra acestor raționamente putem face diferite comentarii. Din demonstrație rezultă, incontestabil, că pentru orice lege dată care enumeră mulțimi de numere întregi pozitive

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,$$

putem găsi o mulțime x diferită de toate aceste mulțimi de mai sus. În plus fiind date x și mulțimile $x_1, x_2, \ldots$, putem găsi de asemenea o lege care enumeră $x_1, x_2, \ldots$ împreună cu x:

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots;$$

dar atunci există o altă mulțime y care diferă de toate aceste mulțimi. Apoi putem găsi, de asemenea, un alt șir care conține pe y, precum și pe toți termenii șirului anterior. Și așa mai departe.

Din faptul că nici o enumerare nu poate epuiza toate mulțimile de întregi pozitivi, Cantor deduce că mulțimea tuturor mulțimilor de întregi pozitivi este absolut nenumerabilă. Pentru a justifica această deducție, trebuie să admitem că există o mulțime care include toate mulțimile de întregi pozitivi, sau că există o lege care definește o mulțime ce include toate mulțimile de întregi pozitivi. Teoria constructivă a mulțimilor refuză să recunoască orice asemenea mulțime și orice asemenea lege. Dacă punctul de vedere constructiv acceptă totalități de legi relative la diferite stadii ale construcției, în schimb el respinge o totalitate închisă care exclude posibilitățile unei construcții ulterioare.

Dacă însă admitem existența unei mulțimi M a *tuturor* mulțimilor de întregi pozitivi, raționamentul de mai sus arată că o atare mulțime M este absolut nenumărabilă. Totodată, vedem atunci că raționamentul face uz de ceea ce se știe că este o definiție impredicativă, pentru a defini mulțimea N de numere pozitive întregi. Astfel, prin definiție, k aparține lui N, dacă și numai dacă *există* o mulțime K în M, astfel încît K este $f(k)$ și k nu aparține lui K. Acest lucru este impredicativ, deoarece în definirea lui N facem apel la totalitatea M, care conține ca membru pe N. Astfel, pentru a determina dacă un k_0 dat aparține lui N trebuie, ca să spunem așa, să ne oprim la toți membrii lui M (inclusiv la N însuși) spre a vedea dacă unul dintre ei nu este $f(k_0)$ fără ca să conțină totuși k_0 ca membru. Așadar, pentru ca să-l definim pe N, N trebuie deja să fie aici. Evident, acest lucru este inacceptabil din punct de vedere constructiv, conform căruia mulțimea ia ființă numai printr-o definiție. Numai dacă considerăm mulțimile ca entități preexistente considerentelor noastre putem să acceptăm asemenea definiții; și încă, le acceptăm nu ca definiții, ci ca descrieri ale proprietăților pe care mulțimile le posedă prin ele însele, sau ca directive de extragere a mulțimilor convenabile dintr-un ocean imens care conține toate soiurile, obișnuite și neobișnuite, de pești.

Situația este foarte asemănătoare și în cazul demonstrației lui Cantor, că a doua clasă de numere nu este numerabilă.

Faptul că toate demonstrațiile de nenumerabilitate absolută fac uz de mulțimi impredicative nu este întîmplător. Într-adevăr, cel puțin din punct de vedere intuitiv, este probabil că toate mulțimile predicative sînt numerabile. Putem aminti și faptul că paradoxul lui Russell a fost obținut pentru prima oară prin analizarea raționamentului cantorian al diagonalei și că el face uz, de asemenea, de o mulțime impredicativă.

§ 5. LIMITELE FORMALIZĂRII

O axiomatizare satisfăcătoare a teoriei mulțimilor este, după cum se pare, calea cea mai promițătoare de aducere la îndeplinire a programului ambițios de sistematizare a întregii matematici. La începutul secolului, descoperirea paradoxelor și popularitatea de care se bucura metoda axiomatică în geometrie și aritmetică a generat, în mod firesc încercările de a construi sisteme de axiome în care să se poată deriva o parte cît mai mare a teoriei „naive" a lui Cantor, însă bineînțeles fără să se ajungă la niciunul din paradoxele ei. Drept urmare, sîntem astăzi în posesia unui număr de sisteme de axiome pentru teoria mulțimilor.

În scopul formalizării matematicii în cadrul teoriei axiomatice a mulțimilor se obișnuiește, ținîndu-se seama de marea diversitate de conținut, să se facă unele reprezentări sau reduceri preliminare. De exemplu, punctele geometrice pot fi reprezentate prin numere reale, funcțiile și relațiile pot fi interpretate ca mulțimi (de perechi etc.), numerele pot fi identificate cu anumite mulțimi speciale, și așa mai departe. Cu aceste reduceri se afirmă și se crede, de multe ori, că fiecare din multele sisteme axiomatice standard de teoria mulțimilor este adecvat pentru dezvoltarea întregii matematici. De exemplu, sistemul din *Principia Mathematica* sau sistemul construit de către Zermelo și extins de succesorii lui.

Obținerea efectivă a matematicii din oricare sistem de acest fel este lungă și anevoioasă. Practic, este imposibil să verificăm pînă la ultimele consecințe aserțiunea că într-un atare sistem se poate deduce cutare sau cutare ramură a matematicii, cu toate detaliile sale. Totodată, este greu și să respingem o atare aserțiune, deoarece pentru aceasta s-ar cere descoperirea unor premise sau principii de inferență care erau pînă acum admise în mod tacit, fără să fie însă recunoscute.

Există totuși cel puțin trei obiecții de ordin general ce se pot ridica împotriva unor asemenea aserțiuni. În primul rînd, nu știm despre nici unul dintre aceste sisteme standard că este liber de contradicții. În al doilea rînd, fiecare sistem poate fi lărgit cu ușurință, de pildă prin adăugarea unui nivel superior de mulțimi, obținîndu-se astfel un nou sistem care conține teoreme noi, dar în același timp, după cum se poate demonstra, nu este mai puțin solid decît sistemul inițial. Într-adevăr, în fiecare caz în parte se poate demonstra că sistemul extins este consistent, cu condiția ca și sistemul inițial să fie consistent. Mai mult chiar — sistemul extins poate fi extins, la rîndul lui, într-un mod similar; procesul acestor extinderi poate fi continuat indefinit. O dificultate strîns legată de cea precedentă o constituie faptul că toate aceste sisteme sînt supuse incompletitudinii lui Gödel. O a treia obiecție este că nici unul dintre aceste sisteme nu poate furniza întreaga teorie a mulțimilor, așa cum a fost

construită ea inițial de către Cantor. În particular, aceasta privește noțiunea lui Cantor de mulțimi nenumerabile, precum și folosirea de către el a definițiilor impredicative. Deși Cantor afirmă existența unor mulțimi absolut nenumerabile, nici unul dintre aceste sisteme de axiome nu poate să furnizeze decît mulțimi care sînt nenumerabile relativ la mijloacele de expresie ale sistemului. Aceste mulțimi sînt numerabile în sens absolut, întrucît este posibilă enumerarea elementelor fiecărei mulțimi, vorbindu-se *despre* sistemul axiomatic originar.

S-au făcut — în special datorită primei obiecții — numeroase încercări de construire a unor sisteme artificiale care să fie demonstrabil consistente și totodată adecvate pentru dezvoltarea părților „principale" (sau „utile") ale matematicii. Majoritatea acestor sisteme modifică principiile noastre logice de bază, cum sînt legea terțului exclus și principiul extensionalității (pentru mulțimi), încît familiarizarea cu aceste sisteme nu este de loc ușoară. După cîte știu, nici unul dintre aceste sisteme nu a fost acceptat pe scară largă.

Față de a doua și a treia obiecție se manifestă de obicei sau indiferență, sau resemnare. Se argumentează că aceste obiecții nu ar trebui să fie luate în serios, deoarece ceea ce avem este de acum suficient pentru toate scopurile obișnuite iar crearea unor noi inadvertențe prin considerarea sistemului ca dat ar fi o pierdere de timp inutilă. Alții susțin că aceste dificultăți constituie prețul pe care trebuie să-l plătim pentru întrebuințarea unui limbaj formal sau pentru întrebuințarea unui sistem axiomatic.

În cele ce urmează, va fi schițată în linii mari o abordare naturală și totodată nesupusă nici uneia dintre cele trei obiecții de mai sus.

§ 6. O TEORIE CONSTRUCTIVĂ

Nu este aici locul pentru a descrie detaliile formale ale teoriei constructive despre care se afirmă că posedă toate proprietățile admirabile ale naturaleții, adecvării și consistenței demonstrabile. Teoria nu va fi decît schițată în linii mari și vom încerca să facem cît mai convingătoare afirmația că teoria poate realiza într-adevăr ceea ce își propune. Dispun de o tratare mai exactă a temei și sper că, într-un viitor apropiat, ea va putea fi pusă la dispoziția tuturor celor interesați și doritori să o examineze minuțios.

Sistemul, sau teoria va fi notată prin majuscula greacă sigma Σ. Ea dispune, la ordinul cel mai de jos (ordinul zero), de un ansamblu numărabil alcătuit (să spunem) din toți întregii pozitivi sau din toate mulțimile finite construite plecînd de la mulțimea vidă. În ordinul unu se află aceste mulțimi de mai sus precum și mulțimi ale lor definibile prin proprietăți care se referă cel mult numai la ansamblul tuturor mulțimilor de ordin 0 (sau cu alte cuvinte, definibile prin formule care nu conțin variabile legate de ordin unu sau superior). În mod similar, pentru fiecare întreg pozitiv n, mulțimile de ordin $n + 1$ conțin toate mulțimile de ordin n, împreună cu mulțimi de asemenea mulțimi definite prin proprietăți care se referă cel mult numai la ansamblul tuturor mulțimilor de ordinul n. Mulțimile de ordin ω conțin toate mulțimile de ordin finit și numai aceste mulțimi. Pentru orice număr ordinal $\alpha + 1$, mulțimile de ordin $\alpha + 1$ sînt față de cele de ordin α în aceeași relație în care se află mulțimile de ordin $n + 1$ față de cele de ordin n (unde n este un număr întreg

nenegativ). Pentru orice număr ordinal β care este numărul limită al unui șir monoton crescător $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de numere ordinale, mulțimile de ordin β sînt față de mulțimile de ordinele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ în același mod în care mulțimile de ordin ω sînt față de cele de ordin finit. Pe scurt, mulțimile de ordin superior lui 0 sînt construite în conformitate cu principiul cercului vicios al lui Poincaré și Russell.

Toate numerele ordinale de care se face uz aparțin, desigur, clasei cunoscute sub numele de a doua clasă de numere a lui Cantor. Mai mult decît atît — noi folosim numai numere ordinale „constructive". Natura numărului ordinal constructiv ridică o problemă interesantă și dificilă. O caracterizare simplă și directă a ansamblului numerelor ordinale constructive întîmpină probabil dificultatea că raționamentul diagonalei ar produce un nou număr ordinal care ar trebui considerat, la rîndul său, ca un număr constructiv. Să admitem pentru moment că este dată o noțiune adecvată de număr ordinal constructiv. O analiză mai amplă a problemei va fi întreprinsă în cursul unui paragraf ulterior. Aici, ne mulțumim doar să observăm că, în orice caz, numerele ordinale uzuale din a doua clasă de numere a lui Cantor, de exemplu ω^2, ε — numeralele, sînt toate numere ordinale constructive.

Axiomele teoriei Σ pot fi caracterizate succint după cum urmează. Toate axiomele și regulile de inferență ale teoriei standard a cuantificării (calculul predicatelor) au loc cu privire la mulțimile de orice ordin. Termenii de mulțimi sau abstracte de diferite ordine sînt înglobate în cadrul notației primitive. Două mulțimi x_α și y_β sînt egale, adică $x_\alpha = y_\beta$, dacă și numai dacă au aceeași extensiune; sau, mai exact, dacă $\alpha \geqslant \beta$, atunci fiecare mulțime z_α sau aparține simultan la x_α și y_β sau nu aparține la nici una. Axiomele speciale ale teoriei sînt:

A. Identitatea: pentru orice γ, $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$, dacă $x_\alpha = y_\beta$ și $x_\alpha \in z_\gamma$, atunci $y_\beta \in z_\gamma$.

B. Însumarea infinită: pentru orice număr ordinal limită α, dacă $\beta < \alpha$, atunci pentru fiecare x_β, există un y_α, astfel încît $y_\alpha = x_\beta$.

C. Abstracția: pentru fiecare formulă $F(x_\beta)$, fiecare y_β aparține lui $\hat{x}_\beta F(x_\beta)$, dacă și numai dacă $F(y_\beta)$.

D. Fundarea: dacă x_α nu este vidă, atunci există un y_α, astfel încît $y_\alpha \in x_\alpha$ iar y_α și x_α nu au nici un element comun.

E. Ordinul legat: dacă $x \in y$ și y nu este de ordin superior ordinului lui x, atunci există o mulțime z de ordin inferior celui al lui y, astfel încît $x = z$.

F. Limitarea: vezi III în paragraful următor.

Ideile folosite în construcția teoriei Σ nu sînt noi. Russell, Weyl, Chwisteck și Lorenzen[5] au dezvoltat matematica în direcții oarecum similare. Nu voi face aici o comparație amănunțită între abordarea de față și lucrările acestor autori, mărginindu-mă numai să remarc că Russell și Weyl nici nu pretind măcar că sistemul lor ar fi adecvat desfășurării analizei, că nu am fost capabil să-l înțeleg pe Chwisteck și că Lorenzen are prea puțină considerație pentru formalizare. Multe concluzii obținute prin utilizarea teoriei Σ sînt extrem de apropiate de rezultatele la care Lorenzen ajunge printr-o abordare oarecum neformală.

[5] Paul Lorenzen, *Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis* în „Mathematische Zeitschrift", **54**, 1951, pp. 1—25.

Teoria Σ nu este propriu-zis un sistem logistic, ci mai curînd o schemă sisteme. Ea este reuniunea tuturor sistemelor formale Σ_α, unde α este un număr ordinal constructiv arbitrar ales, iar Σ_α operează cu toate și numai acele mulțimi care sînt de ordin α sau mai mic. Referindu-ne la aceste sisteme parțiale Σ_α, vom putea face numeroase enunțuri riguros exacte despre teoria comprehensivă Σ.

§ 7. NUMĂRABILITATEA TUTUROR MULȚIMILOR

O particularitate a teoriei Σ este faptul că toate mulțimile lui Σ sînt numărabile în Σ. Într-adevăr, este posibilă enumerarea tuturor mulțimilor de un ordin dat α printr-o funcție de ordin $\alpha + 2$. Făcînd uz de metode standard de construire a definițiilor Tarski ale adevărului, precum și de construcțiile întrebuințate de Bernays în cadrul demonstrației unei clase generale de metateoreme pe baza unui număr finit de axiome, putem demonstra, cel puțin pentru un α nu prea mare (să spunem, mai mic ca ω^2), următoarele două rezultate:

I. Pentru orice α, putem găsi o funcție E_α de ordin $\alpha + 2$, astfel încît E_α enumără toate mulțimile de ordin α; sau, astfel spus, domeniul lui E_α este mulțimea tuturor întregilor pozitivi iar codomeniul ei este mulțimea universală V_α compusă din toate mulțimile de ordin α.

II. Pentru orice α, putem să găsim o definiție a adevărului pentru Σ_α în $\Sigma_{\alpha+2}$ și să formalizăm o demonstrație de consistență a lui Σ_α în $\Sigma_{\alpha+2}$ (adică, putem demonstra $Con(\Sigma_\alpha)$ în $\Sigma_{\alpha+2}$).

În treacăt fie spus, este interesant să comparăm aceste rezultate cu altele asemănătoare referitoare la calculele obișnuite ale predicatelor în care sînt permise definițiile impredicative. De exemplu, consistența calculului predicatelor de tip n poate fi demonstrată în acela al predicatelor de tip $n + 1$, făcîndu-se uz de mulțimi impredicative; pe cînd aici, ceea ce trebuie demonstrat este consistența lui Σ_α în $\Sigma_{\alpha+2}$. Atît în demonstrarea consistenței lui Σ_α, cît și în enumerarea mulțimii universale V_α sîntem obligați să apelăm la mulțimi care iau ca membri mulțimi de ordin α, dar sînt definite cu ajutorul unor variabile legate de ordin $\alpha + 1$. Deși aceste mulțimi sînt mulțimi impredicative de tipul $\alpha + 1$, conform membrilor lor, ele sînt mulțimi de ordinul $\alpha + 2$, conform definițiilor lor. Iată de ce atît în I, cît și în II trebuie să facem uz de ordinul $\alpha + 2$ și nu de $\alpha + 1$.

Folosind funcțiile E_α, sîntem în măsură să enunțăm axiome puternice de limitare care stipulează că în cadrul teoriei Σ_α nu recunoaștem alte mulțimi decît cele enumerate explicit prin funcțiile E_α (vezi și axioma lui Chwisteck de numerabilitate, precum și ipoteza de similaritate a lui Fitch[6]):

III. Pentru orice ordin α și orice mulțime x_α există un număr întreg pozitiv m, astfel încît $E_\alpha(m)$ este x_α.

Pe baza acestor axiome de limitare devine posibilă demonstrarea unor teoreme generale despre toate mulțimile de orice ordin cu ajutorul inducției matematice. Întrucît funcțiile E_α realizează o bună ordonare a tuturor mul-

[6] Frederic B. Fitch, *The Hypothesis that Infinite Classes Are Similar*, în „Jour. Symbolic Logic" **4**, 1939, pp. 159–162.

Leon Chwisteck, *Über die Hypotheses der Mengenlehre*, în „Mathematische Zeitschrift", **25**, 1926, pp. 439–473.

țimilor de ordin α, anumite axiome de alegere pot fi la rîndul lor demonstrate. Mai mult, este în mod evident posibil să enumărăm și toate mulțimile de ordin α, care sînt numere ordinale. Rezultă că putem găsi în $\Sigma_{\alpha+2}$ o corespondență biunivocă între toate mulțimile de ordin α și toate mulțimile de ordin α care sînt numere ordinale. De asemenea, putem demonstra prin raționamentul diagonalei, că Σ_α nu cuprinde o atare corespondență. În consecință, ipoteza continuului (respectiv ipoteza că mulțimea tuturor mulțimilor de ordin α are același număr cardinal cu mulțimea tuturor mulțimilor de ordin α care sînt numere ordinale) este demonstrabilă sau infirmabilă după cum echipotența mulțimilor este definită prin existența unei corespondențe de ordin $\alpha + 2$ sau prin existența unei corespondențe de ordin α. Pe scurt, avem:

IV. Axiomele de alegere sînt demonstrabile în Σ.

V. Anumite forme ale ipotezei continuului sînt demonstrabile în Σ; anumite alte forme sînt infirmabile în Σ.

Totodată, întrucît $Con(\Sigma_\alpha)$ este o propoziție demonstrabilă în $\Sigma_{\alpha+2}$, propozițiile indecidabile Gödel ale fiecărei teorii Σ_α sînt demonstrabile în $\Sigma_{\alpha+2}$. Așadar, singura modalitate posibilă de construire a unei propoziții Gödel indecidabile în Σ ar fi, cum după se vede, găsirea unui șir crescător de numere ordinale constructive $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ astfel încît limita sa să nu mai fie un număr ordinal constructiv și considerarea reuniunii teoriilor $\Sigma_{\alpha_1}, \Sigma_{\alpha_2}, \ldots$; nu se întrevede însă, după cît se vede, nici o cale pentru demonstrarea faptului că această reuniune este și ea un sistem formal sau un sistem la care sînt aplicabile construcțiile lui Gödel. Prin urmare, avem:

VI. Celebrele construcții ale lui Gödel nu oferă în mod direct nici o propoziție indecidabilă în teoria Σ.

Ar fi interesant să se cerceteze dacă n-ar putea exista unele mijloace indirecte de construire a propozițiilor indecidabile în Σ.

Elaborînd teoria numerelor reale într-un anume mod standard[7], putem demonstra, de asemenea, teoreme standard ale analizei clasice în cadrul teoriei Σ. De exemplu, putem demonstra, în mare măsură prin raționamentele tradiționale, teorema celei mai mici margini superioare, teorema lui Bolzano-Weierstrass și teorema lui Heine-Borel.

De fapt, lucrul acesta nu este surprinzător, deoarece atunci cînd este necesar, nu șovăim să facem uz de mulțimi de ordine superioare. De exemplu, în cazul general, cea mai mică margine superioară a unei mulțimi ai cărei membri sînt de ordinul α este o mulțime de ordinul $\alpha + 1$. Weyl și Russell erau pe deplin conștienți de aceste posibilități, dar considerau că împotriva folosirii ordinelor superioare se ridică obiecții. Această problemă, precum și altele înrudite, vor fi discutate pe larg în paragraful următor.

Aș vrea să spun cîteva cuvinte despre folosirea mulțimilor nenumărabile în teoria măsurii.

Este bine cunoscut faptul că în teoria măsurii există o teoremă care afirmă că fiecare mulțime numărabilă este de măsură zero. S-ar părea că în teoria Σ, în care toate mulțimile sînt numărabile, întreaga teorie a măsurii ar sucomba. În realitate însă, aceasta nu se întîmplă, deoarece deși nu există mulțimi nenumărabile, pentru fiecare α există mulțimi de ordin α care sînt

[7] De exemplu, în seria de articole ale lui Bernays despre teoria axiomatică a mulțimilor, în „Jour. Symbolic Logic", **2** 1937; **6**, 1941, **7**, 1942; **8**, 1943; **13**, 1948; **19**, 1954.

nenumărabile prin orice funcţii de ordin α. Pe de altă parte, noţiunea de nenumărabilitate relativă este suficientă pentru ca să ne pună la dispoziţie mulţimi de măsuri diferite de zero pentru măsuri definite la fiecare nivel dat.

Astfel, să recapitulăm demonstraţia standard a teoremei. Fiind dată o mulţime numărabilă M de puncte:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,$$

putem să alegem un ε arbitrar de mic şi să acoperim orice x_i prin intervalul de la $x_i - \frac{\varepsilon}{2^i}$ la $x_i + \frac{\varepsilon}{2^i}$, după care este uşor de văzut că suma acestor intervale nu este mai mare ca 2ε şi că măsura mulţimii iniţiale este mai mică decît 2ε. Aşadar, mulţimea M are măsura zero.

Oricare ar fi α, această demonstraţie poate fi efectuată în Σ_α, numai dacă mulţimea numărabilă dată M de puncte admite o enumerare înăuntru teoriei Σ_α. Este perfect posibil ca aceeaşi mulţime să aibă o măsură zero în $\Sigma_{\alpha+1}$ şi o măsură nonzero în Σ_α.

Cred că această situaţie este pe deplin satisfăcătoare. Putem căpăta chiar o explicaţie a relaţiei între continuu şi discret (adică numărabil). O mulţime de puncte este continuă numai în raport cu cunoaşterea noastră sau capacitatea noastră de a izola numeroasele ei puncte. Ceea ce este privit ca fiind continuu într-o teorie a mulţimilor mai puţin tare devine discret, cînd ajungem să utilizăm o teorie a mulţimilor mai bogată.

§ 8. CONSISTENŢĂ ŞI ADECVARE

Pe baza consistenţei cunoscute a teoriei ramificate a tipurilor este firesc să aşteptăm consistenţa teoriei Σ. Într-adevăr, consistenţa oricărui sistem Σ_α poate fi demonstrată în mod similar celei a teoriei ramificate a tipurilor. Întrucît teoria Σ este reuniunea tuturor sistemelor Σ_α, consistenţa lui Σ decurge imediat.

Putem demonstra consistenţa oricărui sistem Σ_α, prin descrierea mai detaliată a modelului intuitiv al acestuia. Raţionamentele sînt similare demonstraţiei date de Fitch[8] cu privire la consistenţa teoriei ramificate a tipurilor.

Alternativ, putem da o demonstraţie de consistenţă a oricărui sistem Σ_α în cadrul teoriei demonstraţiilor. O asemenea demonstraţie este analoagă demonstraţiilor finitiste ale lui Lorenzen şi Schütte[9] cu privire la consistenţa teoriei ramificate a tipurilor.

Este foarte dificil să explicăm exact sensul în care demonstraţia lui Lorenzen este finitistă. Dar diferenţa arătată mai jos, în termeni destul de vagi, între demonstraţia lui Lorenzen şi demonstraţia lui Fitch este edificatoare.

Fiind dată orice demonstraţie în sistemul formal al teoriei ramificate a tipurilor, procedura lui Lorenzen o poate transforma efectiv într-o demon-

[8] *The Consistency of the Ramified Principia*, în „Jour Symbolic Logic, **3** 1938, pp. 140—149

[9] Paul Lorenzen, *Algebraische und logistische Untersuchungen über die freie Verbände*, în „Jour. Symbolic Logic **16**, 1951, pp. 81—106; Kurt Schütte, *Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis*, în „Mathematische Annalen", **124**, 1951—52, pp. 123—147.

strație diferită în cadrul căreia fiecare rînd este mai complicat decît oricare din premisele lui (și de fapt mai lungă, exceptînd eliminarea întîmplătoare a termenilor care se repetă). Cu alte cuvinte, obținem demonstrații cumulative. Este adevărat că, potențial, aceste demonstrații pot să conțină o infinitate de propoziții, de exemplu, pentru a demonstra $(m)\ m \geqslant 0$, facem uz de $0 \geqslant 0$, $1 \geqslant 0$, $2 \geqslant 0$ etc. Cu toate acestea, orice aplicare a regulii inducției infinite este determinată, în mod echivoc, de pasul corespunzător demonstrației inițiale. În consecință, aplicațiile reale ale regulii inducției infinite sînt mult mai puțin inoperante decît ne-ar lăsa să credem enunțul abstract al regulii însăși.

În demonstrația lui Fitch, pe bază de model intuitiv, situația este mai complicată. Nu este ușor de văzut cum putem căpăta efectiv, dintr-o demonstrație în cadrul sistemului formal, o demonstrație corespunzătoare în cadrul modelului intuitiv. De exemplu, pentru justificarea faptului că oricare ar fi propoziția p, „p sau non-p" aparține mulțimii propozițiilor adevărate, trebuie să aplicăm legea terțului exclus la mulțimea infinită a propozițiilor adevărate și să argumentăm că sau p aparține mulțimii, de unde rezultă că și „p sau non-p" aparține mulțimii, sau p nu aparține mulțimii, de unde rezultă că non-p aparține mulțimii și deci „p și non-p" aparține și în acest caz mulțimii. Nu este cu putință să evităm cu totul orice referință la alternativa că o propoziție nu aparține mulțimii propozițiilor adevărate (adică aparține mulțimii propozițiilor care nu sînt adevărate). Cu alte cuvinte, nu putem efectua demonstrația de consistență fără ca „să ieșim afară" în permanență din cadrul mulțimii propozițiilor adevărate.

Firește, demonstrațiile de consistență pentru Σ au unele trăsături specifice datorite caracteristicilor speciale ale acestei teorii. Totuși, este rațional, desigur, să ne așteptăm ca aceste demonstrații să poată fi efectuate. Nu vom intra aici în amănunte.

În mai multe rînduri am putut demonstra teoremele cerute numai ridicîndu-ne la ordine mai înalte: axiomele alegerii, reînterpretările ipotezei continuului, teorema celei mai mici margini superioare, teorema lui Bolzano-Weierstrass. Mulți consideră că aceasta echivalează cu ocolirea dificultăților inițiale, în loc de a le face față.

De exemplu, în *Das Kontinuum* (p. 23), Weyl menționează posibilitatea definirii celei mai mici margini superioare a unei mulțimi mărginite date de numere reale printr-un număr real de ordin superior, dar înlătură imediat această posibilitate, considerînd-o nesatisfăcătoare din punct de vedere filozofic.

În calea analizei ramificate se ridică următoarea dificultate evidentă, care a fost menționată adesea: întrucît cea mai mică margine superioară a unei mulțimi date de numere reale este un număr real de ordin superior, ceea ce face necesară o infinitate de ordine diferite de numere reale, cum mai putem vorbi despre toate numerele reale în același timp?

Abordarea schițată aici nu oferă o idee clară despre *toate* numerele reale însă, pentru orice α dat, putem considera *toate* numerele reale de ordin α. Mai mult, putem să facem uz de un fel de metodă schematică, prin care putem analiza toate numerele reale vorbind despre toate numerele reale de orice ordin, fără discriminare.

Cu toate acestea, nu este necesar să adoptăm această abordare, dacă nu urmărim altceva decît să putem vorbi despre o infinitate de ordine în același timp. Să considerăm sistemul Σ_ω (sau, în această privință, orice sistem Σ_α, unde α este un număr ordinal limită). Putem demonstra cu ușurință că pentru fiecare mulțime mărginită x_ω de numere reale există un număr real y_ω, care este cea mai mică margine superioară a lui x_ω. Aceasta, pentru că fiecare mulțime x_ω este o mulțime de numere reale de un ordin finit n, iar cea mai mică margine superioară a sa este un număr real de ordinul $n + 1$, și *ipso facto*, o mulțime de ordin ω.

În consecință, de îndată ce ajungem la mulțimi de ordin ω, putem evita deja necesitatea ridicării la ordine superioare pentru ca să obținem cele mai mici margini superioare. În mod similar, mulțimile necesitate de axioma alegerii, interpretările ipotezei continuului și teorema lui Bolzano-Weierstrass sînt de asemenea de ordin ω, cu condiția ca fiecare mulțime dată să fie de ordin ω (și deci de un ordin n, pentru *unii* n finiți).

Din această remarcă urmează că pentru ca să vorbim despre toate mulțimile finite de toate ordinele finite în același timp, nu avem nevoie nici de axioma russelliană a reductibilității (vezi mai jos), nici de întreaga teorie Σ care conține o totalitate nedeterminată de ordine. Sistemul Σ_ω este mai satisfăcător decît metoda lui Russell care suscită, fără să fie necesar, dificultăți de netrecut în legătură cu mulțimile impredicative. Teoria Σ este și mai satisfăcătoare încă din punct de vedere filozofic, deoarece pare arbitrar să ne oprim sau la ordinul ω sau la vreun alt ordin α. De exemplu, faptul că teoria Σ_ω este supusă în mod direct teoremelor lui Gödel în timp ce teoria Σ, după cîte pot să-mi dau seama, nu este supusă acestora, constituie o indicație asupra preferabilității lui Σ. Am putea spune că abordarea întruchipată în Σ este superioară abordării lui Russell nu numai într-o singură privință.

Se obișnuiește să se definească numerele reale ca mulțimi speciale de numere naturale sau de numere raționale. Întrucît aceste mulțimi sînt infinite, fiecare dintre ele trebuie dată printr-o lege sau un principiu de selecție a membrilor săi. De aceea, bogăția unei teorii a numerelor reale depinde, în mod firesc, în măsură însemnată de metoda de definiție pe care ne este permis s-o folosim. Desigur, ne putem imagina multe feluri curioase de definire a mulțimilor. În consecință, nu avem nici o idee clară despre *toate* mulțimile. Noțiunea de mulțime, și prin urmare noțiunea de număr real, depinde de teoria definiției pe care am adoptat-o, în sensul că teorii diferite ale definiției ne vor da teorii diferite ale mulțimilor și ale numerelor reale.

Se pare că în secolul trecut oamenii nu și-au dat seama de acest lucru. Ei dau impresia că vorbesc ca și cum ar exista o teorie absolută unică a definiției. Astfel, Dedekind vorbea despre toate mulțimile sau tăieturile de numere reale fără să-și dea osteneala să se oprească și să analizeze ce vroia să spună prin *toate*. La fel, Cantor vorbea despre toate mulțimile numărabile, în demonstrația sa asupra nenumărabilității mulțimii tuturor numerelor reale.

Se pune acum chestiunea: cum știm că teoria Σ ne dă toate numerele reale de care avem nevoie în matematica obișnuită?

Examinînd numerele reale folosite de fapt în matematică, constatăm cu ușurință că domeniul s-a lărgit treptat. Mai întîi, numerele raționale, bineînțeles. Apoi, numere raționale simple, ca $\sqrt{2}$. Grecii au considerat, de asemenea,

cazuri mai complicate. În general însă, ei par să se limiteze la mărimi iraționale, obținute prin luarea repetată a rădăcinii pătrate, operație efectuabilă geometric cu rigla și compasul. Următoarea extindere logică o constituie înglobarea tuturor numerelor algebrice. Mai avem apoi și numere transcendentale, de exemplu e și π.

Întrucît pare natural să considerăm că fiecare fracție zecimală infinită definește un număr real, merită să ne facem o idee asupra domeniului larg de legi sau definiții posibile pentru determinarea acestor fracții zecimale. În linii mari, putem opune definițiile „naturale" celor „artificiale". Cele naturale survin din dezvoltarea reală a matematicii; așa sînt, de exemplu, definițiile lui e, π, valorile unor anumite funcții obișnuite etc. De regulă, între aceste definiții și fondul nostru principal de cunoaștere există o legătură organică, încît dispunem de mai multe informații cu privire la fracțiile zecimale și la numerele reale determinate de acestea. Definițiile artificiale pot fi confecționate punînd în joc caractere accidentale ale notației sau stării de lucruri. De exemplu, următoarea fracție zecimală infinită

$$0,1223334444\ldots,$$

definită de legea că pentru orice numeral n, n se repetă de n ori (de exemplu, numeralul 15 este scris de 15 ori în mod succesiv).

Sau să considerăm, de exemplu, fracția zecimală infinită obținută din cea care exprimă pe π prin substituirea unui numeral arbitrar (să zicem 7 sau 891) în locul fiecărei cifre 1 (sau 2, sau 3 etc.). Evident, în acest mod putem genera, plecînd de la orice fracție zecimală infinită, o infinitate de fracții zecimale infinite artificiale despre care nu știm nimic altceva decît ceea ce ne spun definițiile lor.

Un alt gen de definiție artificială se obține dacă, de exemplu, determinăm

$$0,a_1a_2a_3a_4\ldots.$$

în modul următor: începînd de la 1 ianuarie 2 000, a_i este 0 sau 1 după cum se nasc, sau nu mai mulți băieți decît fete în a i-a zi.

Din aceste exemple reiese limpede cît de ușor este să ne distrăm cu născocirea unor fracții zecimale infinite curioase. Nu vom da însă curs slăbiciunilor noastre și ne vom limita la definițiile naturale.

Modul cel mai eficient de generare a unor numere reale noi este utilizarea funcțiilor. Astfel, fiind dată o subclasă fixată D din clasa numerelor reale (de exemplu, D poate fi clasa numerelor raționale sau cea a numerelor algebrice) și o funcție

$$y = f(x),$$

există un număr real y pentru fiecare x în D. Se poate întîmpla ca pentru fiecare x în D, $f(x)$ să fie de asemenea în D. Atunci, funcția $f(x)$ nu generează numere reale noi. Se poate întîmpla însă, de asemenea, ca pentru anumite valori ale lui x în D, $f(x)$ să nu mai fie în D. Fie D' clasa tuturor numerelor reale care sau sînt în D, sau sînt valorile lui $f(x)$ pentru unii x în D. În ce privește D', se poate întîmpla iarăși ca pentru unii x în D' $f(x)$ să nu fie în D'. Putem considera atunci o clasă mai largă D''. Și așa mai departe. În general, acest proces poate continua în mod indefinit, iar suma tuturor acestor

clase (pe care să o numim D_f) satisface condiția că pentru fiecare x în D_f, $f(x)$ se află de asemenea în D_f.

În acest mod, pentru orice clasă fixată D de numere reale și o funcție $f(x)$, putem încerca să găsim clasa D_f corespunzătoare care, în cazuri speciale, poate coincide cu D. Așadar, putem ajunge la ansamblul tuturor numerelor reale în felul următor. Să plecăm, de pildă, de la domeniul numerelor raționale. Să considerăm, de exemplu, funcțiile transcendentale și algebrice ordinare. Să le adunăm succesiv, lărgind de fiecare dată domeniul numerelor reale, pentru a obține un domeniu mai larg în care, pentru fiecare x al domeniului, $f(x)$ se află de asemenea, în domeniu. În acest mod ajungem la o totalitate de numere reale *închisă* față de o totalitate dată de funcții.

Nici un număr de funcții nu ar putea determina toate numerele reale. Totuși, noi dorim, fără îndoială, să obținem cel puțin un domeniu de numere reale care ar fi *închis* față de toate funcțiile pe care avem prilejul să le considerăm în cadrul matematicii curente. După ce ne-am asigurat că o anumită teorie a numerelor reale oferă un domeniu care satisface cerința amintită, nu trebuie să ne mai preocupe prea mult cîte multe alte numere reale sînt de asemenea incluse.

De aceea, pentru ca să determinăm cerințele minimale pe care trebuie să le satisfacă o teorie a numerelor reale, este edificator să considerăm mai întîi funcțiile curente din analiză.

Este foarte ușor să demonstrăm că toate numerele reale care pot fi obținute prin procedeele obișnuite ale analizei clasice pot fi obținute în sistemul Σ_ω (de fapt, într-un sistem parțial, să zicem Σ_5).

Există, probabil, o distanță considerabilă între ansamblul tuturor legilor și șirurilor speciale pe care am avea prilejul să le studiem și ansamblul tuturor legilor și șirurilor posibile pe care le-am studia sau nu vreodată. Așa stînd lucrurile, cum putem spera măcar ca să obținem o teorie satisfăcătoare a tuturor legilor sau definițiilor?

Răspunsul la această întrebare retorică constă în deosebirea a două tipuri de teorii a „tuturor" legilor. Dacă ceea ce căutăm este o teorie care să ne dea informații amănunțite despre toate legile posibile, inclusiv a unor legi asupra cărora nu putem obține asemenea informații din altă sursă, afirmația că o atare teorie nu poate fi obținută este aproape tautologică. Pe de altă parte, nu vedem motivul pentru care o teorie mult mai modestă nu ar fi suficientă în fapt pentru construirea unui fundament riguros al teoriei numerelor reale și al analizei matematice. De exemplu, putem întrebuința o teorie în care sînt înglobate toate legile cunoscute de definire a fracțiilor zecimale infinite, iar în același timp folosim deliberat cuvîntul „toți" în mod echivoc, astfel încît ușa să rămînă deschisă noilor veniți să se alăture ansamblului *tuturor* legilor teoriei. Teoria Σ pare să fie una de acest fel.

§ 9. AXIOMA REDUCTIBILITĂȚII

Aproximativ vorbind, teoria ramificată a tipurilor este echivalentă cu sistemul Σ_ω minus variabilele de ordin ω. Axioma russelliană de reductibilitate afirmă că pentru fiecare mulțime există o mulțime de aceeași extensiune de ordin imediat următor celui mai înalt al argumentelor sale. De exemplu,

fiecare mulțime ai cărei membri sînt obiecte de ordin 0 este, conform acestei axiome, coextensională cu o mulțime de ordinul 1.

Datorită unei asemenea axiome de reductibilitate, enunțurile despre „toate funcțiile (sau mulțimile) de ordin unu de m" duc la multe rezultate care, în caz contrar, ar necesita „toate funcțiile (sau mulțimile) de m". Axioma conduce la toate rezultatele dorite și, după cîte știm, numai la acestea. Totuși, Russell consideră că o asemenea axiomă nu este de natură să ne mulțumească și emite ipoteza că o axiomă care suscită ceva mai puține obiecții ar putea da, eventual, rezultatele cerute. (În treacăt fie spus, forma inițială a axiomei reductibilității la Russell era mai complicată ca formularea ei acceptată în mod curent, deoarece Russell nu se putea decide definitiv asupra metodelor permise în definirea funcțiilor sau mulțimilor de ordine minime. În ce ne privește, vom presupune că sînt admise toate metodele logicii formale și numai acestea).

Acest paragraf își propune să argumenteze că nu este nimic greșit în a vorbi despre funcții sau mulțimi de toate ordinele în același timp și își propune totodată să demonstreze că nu avem nevoie de loc de axioma reductibilității. Așa, de exemplu, dacă folosim variabilele x_n, y_n, z_n etc. ($n = 1, 2, \ldots$) referitor la mulțimi de numere pozitive întregi de ordinul n, s-ar părea că avem nevoie sau de axioma reductibilității, sau de o expresie de lungime infinită, ca să putem face un enunț despre mulțimile de întregi pozitivi de toate ordinele. Nimic nu ne împiedică însă să introducem, în plus, ca și în sistemul Σ_ω, un nou gen de variabile x_ω, y_ω, z_ω etc. care iau ca valori toate aceste mulțimi, indiferent de ordinul lor.

O dată introduse asemenea variabile generale pentru toate mulțimile (de indiferent ce ordin) de același tip, putem face toate lucrurile în vederea cărora fusese propusă inițial axioma reductibilității. Consecințele acestei axiome, care de data aceasta nu pot fi întrevăzute, sînt tocmai rezultatele care contrazic spiritul fundamental al abordării constructive, vizate de teoria russelliană a tipurilor ramificate.

Motivul declarat al introducerii axiomei de reductibilitate era ca să căpătăm posibilitatea să vorbim despre toate mulțimile sau funcțiile de anumite lucruri date, și nu numai despre toate mulțimile sau funcțiile de fiecare ordin dat. Să discutăm, rînd pe rînd, modurile în care folosirea variabilelor generale poate suplini axioma reductibilității, în diversele situații avute în vedere de către Russell.

Este vorba mai întîi despre inducția matematică. Russell vrea să spună că un număr întreg pozitiv este un număr care posedă *toate* proprietățile de care se bucură 1 și succesorii tuturor numerelor care se bucură de aceste proprietăți. Dacă limităm acest enunț la toate proprietățile x_1 de ordin unu nu putem deduce fără să facem uz de axioma reductibilității că enunțul este valabil pentru proprietățile x_2 de ordin doi. Dacă însă facem uz de variabilele generale x_ω, y_ω, etc. pentru mulțimi de numere întregi pozitive de toate ordinele (finite), putem face acum enunțul de mai sus cu privire la *toate* proprietățile x_ω (ale numerelor întregi pozitive).

De axioma reductibilității se face uz, în al doilea rînd, în legătură cu definiția identității. Russell definește doi indivizi ca identici, în cazul cînd aceștia au aceleași proprietăți de ordin unu. Pe baza axiomei de reductibilitate, el demonstrează apoi teorema că doi asemenea indivizi au aceleași proprie-

tăți de fiecare ordin. Dacă folosim variabile generale pentru toate proprietățile, putem adopta în sistemul Σ_ω teorema lui Russell în calitate de definiție a identității. Prin aceasta, axioma reductibilității nu mai este cerută.

O a treia aplicație, mai importantă, a axiomei rezidă în dezvoltarea teoriei lui Dedekind despre numerele reale. Astfel, dacă definim numerele reale drept anumite mulțimi de numere raționale care satisfac cerințele lui Dedekind, atunci, dat fiind că există asemenea mulțimi de ordine diferite, există și numere reale de ordin diferite. Cum am observat, această chestiune poate fi tratată și ea în sisteme de natura sistemului Σ_ω.

Pe de altă parte, abolirea axiomei reductibilității atrage după sine consecința extrem de importantă că demonstrația cantoriană a teoremei că există în mod absolut mai multe numere reale decît numere întregi pozitive eșuează în Σ_ω, cu toate că, în formă modificată, demonstrația poate fi obținută prin axioma reductibilității într-un sistem avînd numai ordine finite. Într-adevăr, acum nu mai este posibil să demonstrăm existența oricărui număr cardinal mai mare ca alef-zero (numărul întregilor pozitivi) în Σ_ω.

Din punctul de vedere constructiv adoptat de către Russell, nu numai că nu se ridică nici o obiecție împotriva abordării întruchipate în Σ_ω, dar există, chiar și un argument care pledează puternic în favoarea ei. Într-adevăr, definițiile impredicative sînt indispensabile în demonstrarea existenței oricărei infinități dincolo de alef-zero, iar abolirea definițiilor impredicative este tocmai ceea ce își propunea să realizeze teoria lui Russell.

Cu alte cuvinte, axioma reductibilității servește de fapt la două scopuri deosebite: (1) să ne permită să vorbim despre toate mulțimile sau funcțiile de anumite lucruri fără să fie necesară enumerarea infinității de ordine diferite; (2) să ne permită să introducem mulțimi prin definiții și proprietăți impredicative. Se pare că Russell, încercînd să soluționeze o dificultate minoră de ordin verbal, a reintrodus fără să-și dea seama, prin ușa din spate, definițiile impredicative prin intermediul axiomei reductibilității (în fapt, a introdus o presupunere care întruchipează însăși esența definițiilor impredicative din teoria mulțimilor). Credem că observațiile făcute în acest paragraf și în cele precedente sînt suficiente pentru demonstrarea concluziei că introducerea variabilelor generale face inutilă axioma reductibilității, cel puțin în ce privește lucrurile în vederea cărora ea a fost introdusă inițial.

După părerea mea, abordarea prezentă aruncă, de asemenea, o lumină asupra criticii pe care Hölder i-o face lui Weyl într-un articol din 1926[10]. După Hölder, dat fiind că în definiția celei mai mici margini superioare a unei mulțimi M de numere reale, cuantificarea poate fi înțeleasă referitor numai la numerele reale din M, date în prealabil, și nu asupra *tuturor* numerelor reale, este inexact că definiția celei mai mici margini superioare ar conține un cerc. Dacă adoptăm formalizarea standard a teoremei cu privire la cea mai mică margine superioară, formalizare în care nu admitem numere reale de ordine diferite apare clar că Hölder nu are dreptate. Dar dacă acceptăm o abordare constructivă, ca în studiul de față, atunci Hölder are dreptate, deoarece în orice mulțime dată M, numerele reale trebuie să aibă

[10] *Otto Hölder, Der angebliche circulus vitiosus und die sogenannte Grundlagenkrise in der Analysis* în „Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig", Mathematisch-physische Klasse, 78, 1926, pp. 243—250.

un ordin determinat și putem defini o margine superioară minimă, care este de ordin imediat superior.

Cred că observațiile lui Hölder prezintă foarte mult interes pentru abordarea de față, ele părînd să arate că folosirea unei analize ramificate este pe deplin firească. Sistemele din acest studiu ar putea fi considerate, printre altele, și ca încercări de formalizare a interpretării date de Hölder teoremei clasice a celei mai mici margini superioare.

§ 10. PRINCIPIUL CERCULUI VICIOS

Teoria Σ este construită în conformitate cu principiul cercului vicios formulat de către Poincaré și Russell. Întrucît teoria tipurilor se bazează și ea pe același principiu, dar diferă de Σ în multe privințe, este interesant să întrebăm dacă teoria Σ nu încalcă în anumite privințe acest principiu.

Russell dă mai multe forme, oarecum diferite, ale principiului, dar noi ne putem mărgini la una care afirmă că nici o totalitate nu poate conține membri definibili numai în termeni ai acestei totalități.

După Russell, acest principiu al cercului vicios ne permite să evităm „totalitățile neligitime". Rezultă că, fiind dată o formulă deschisă (o funcție propozițională) p care conține cuantori referitori la mulțimi de ordin α sau are valori ale argumentelor referitoare la mulțimi de ordin α, mulțimea definită de p trebuie să fie cel puțin de ordinul $\alpha + 1$.

Astfel, dacă plecăm de la o totalitate dată de obiecte de bază, spunînd că sînt (să zicem) de ordinul 0, putem trece apoi la definirea mulțimilor de ordinele 1, 2, 3 etc., introducînd în stadii succesive variabile noi și abstracte noi. Este natural să indicăm progresul nostru prin utilizarea unor atare indici de ordin. După ce am parcurs toate numerele ordinale finite, nimic nu ne împiedică să trecem la ordine transfinite.

Mulțimile de ordin ω trebuie să fie numai toate acele mulțimi care sînt definite în termeni de variabile și de abstracte de ordine finite. Pe de altă parte, întrucît ω este superior tuturor numerelor ordinale finite, fiecare abstract care conține numai variabile și abstracte de ordine finite definește o mulțime de ordin ω. Pe de altă parte, întrucît ω este cel mai mic ordin infinit, un abstract care conține o variabilă sau un abstract care nu este de ordin finit trebuie să fie de ordin superior lui ω. La fel, în cazul oricărui număr ordinal limită α. Drept urmare, pentru orice număr ordinal limită α, mulțimile de ordin α servesc pentru însumarea tuturor mulțimilor de toate ordinele inferioare din teoria Σ.

Nu există nici un motiv care să ne determine să ne oprim la un anumit număr ordinal α din a doua clasă de numere, deoarece noi putem trece în mod cert mai departe, definind abstracte de ordinul $\alpha + 1$, $\alpha + 2$ etc. Așadar, în loc să facem uz de un sistem formal definit, permitem în Σ o mulțime indefinită de ordine α și sisteme parțiale corespunzătoare.

În *Principia Mathematica* [11] se subliniază că anumite expresii nu sînt adevărate, nici false, ci lipsite de sens. Așa, de pildă, nu este nici adevărat nici

[11] A. N. Whitehead și Bertrand Russell, vol. 1, p. 41.

fals să spunem că o mulțime aparține ei însăși, chestiunea fiind lipsită de sens. În general „$a \in b$" nu are sens decît dacă a și b sînt de tipuri corespunzătoare (mai concret, dacă b este exact cu un tip mai înalt decît a).

Recent, această subliniere a ajuns să țină cap de afiș în filozofie. Se susține că multe probleme filozofice, dacă nu chiar toate, survin pentru că vrem să căpătăm un răspuns de tipul „da sau nu" la întrebări lipsite de sens. Cînd spunem că mulțimea universală aparține ei înșiși sau că dreptatea este albastră, ni se spune că facem o „greșeală categorială".

Oricît de sugestivă ar putea să fie această idee pentru filozofie, ea nu pare necesară, în măsura în care este vorba despre logică. O cale evidentă care poate fi urmată este să spunem că expresia respectivă este falsă, și nu lipsită de sens. În fapt, așa se procedează în teoria Σ.

Procedura din *Principia* de tratare a unor expresii ca „$a_n \in a_n$" (n fiind index al tipului sau nivelului) drept lipsite de sens și nu false atrage după sine consecința că mulțimile se divid în domenii de sens care se exclud reciproc. Aceasta, pentru că ar fi extraordinar de bizar și neconvenabil să spunem, de exemplu, că „$a_n \in a_n$" este fără sens în timp ce „$b_n \in a_n$" are sens (și este o expresie adevărată) sau, în general, că un termen poate înlocui un alt termen în cadrul unei expresii cu sens, dar nu în cadrul alteia. Situația iese în evidență în modul cel mai izbitor în cazul substituirii egalilor prin egali (substitutivitatea identicilor). Pe de altă parte, este absolut corect să spunem, de exemplu, că „$a_n \in a_n$" este fals, dar „$b_n \in a_n$" este adevărat.

Așadar, faptul că teoria obișnuită a tipurilor simple nu permite amestecul tipurilor este strîns legat de decizia de a considera anumite expresii ca lipsite de sens, și nu ca false. Dacă, de exemplu, introducem tipuri sau nivele în sistemul Σ, care operează numai cu mulțimi și variabile de ordine finite și adăugăm ulterior axioma reductibilității pentru anihilarea distincției dintre ordine, vom obține o teorie asemănătoare teoriei simple a tipurilor, dar care permite mixajul unor tipuri diferite.

Se înțelege de la sine că folosirea ordinelor transfinite (și fără margini) constituie deosebirea principală între teoria Σ și teoria ramificată obișnuită a tipurilor fără axioma reductibilității. Axiomele de limitare aduc cu sine o nouă trăsătură care a fost discutată nu o dată, însă nu a fost transpusă niciodată în formele standard ale teoriei tipurilor.

S-ar putea crede că faimoasa propoziție a lui Gödel care spune, în esență, despre ea însăși că nu este demonstrabilă într-un anumit sistem, încalcă principiul cercului vicios. Dacă ar fi într-adevăr așa, principiul cercului vicios ar fi pus într-o situație destul de proastă, deoarece construcția lui Gödel constituie un procedeu perfect valid. De fapt însă, autoreferirea este înfăptuită prin considerente exterioare sistemului, Gödel definește printr-o metodă împotriva căreia nu se pot ridica obiecții ceva ce nu poate fi definit, de obicei, decît printr-un cerc vicios. Aceasta este același lucru cu demonstrarea echivalenței reale între o mulțime definită printr-o definiție impredicativă și o mulțime definită printr-o definiție predicativă, ceea ce face ca mulțimea să fie pusă la adăpost de orice obiecții.

Mai precis, dacă spunem „Această propoziție nu este demonstrabilă", facem uz de o autoreferire și definim o propoziție prin referirea la ea însăși (sau la o totalitate care se conține pe sine), dar dacă găsim o modalitate de

a face aceasta la fel ca Gödel, demersul este justificat. Nu mai definim o propoziție, ci interpretăm doar o propoziție, demonstrînd rezultatele prin intermediul acestei interpretări.

§ 11. MULȚIMI PREDICATIVE ȘI NUMERE ORDINALE CONSTRUCTIVE

În acest studiu, mulțimile constructive sînt identificate cu mulțimile predicative. Mulțimile predicative sînt mulțimi care pot fi definite fără încălcarea principiului cercului vicios. Este de dorit să dispunem de o caracterizare mai exactă, care să fie, de exemplu, o explicație tot atît de precisă și acceptabilă a predicativității, cum este recursivitatea în cazul conceptului intuitiv de calculabilitate efectivă.

Dacă ne limităm la obiectele matematice, una dintre posibilități rezidă în aserțiunea că o mulțime este predicativă, dacă și numai dacă este coextensivă cu o mulțime a teoriei Σ. Lăsînd la o parte chestiunea dificilă a adecvării acestei identificări, sîntem puși și în fața unei alte chestiuni mai urgente, anume de a face clar răspunsul dat.

Ca să determinăm măcar aproximativ domeniul mulțimilor disponibile în Σ, ar trebui să avem o idee destul de precisă asupra naturii numărului ordinal constructiv, deoarece Σ este reuniunea tuturor sistemelor Σ_α, unde α este un număr ordinal constructiv.

Definiția Church-Kleene [12] a numerelor ordinale constructive în termeni de funcții este suficient de clară și precisă, în raport cu scopul urmărit. Totuși ea este ceva mai îngustă decît ceea ce se caută, deoarece, în definirea unor numere ordinale noi, am dori să spunem că orice șir monoton crescător, generat printr-o funcție predicativă de numere ordinale constructive, determină o limită care este de asemenea un număr ordinal constructiv, și totuși există funcții predicative care nu sînt recursive. Drept urmare, se pare că intrăm într-un cerc: ca să determinăm regiunea mulțimilor predicative trebuie să dispunem mai întîi de o noțiune definită de numere ordinale constructive; ca să obținem o atare noțiune definită, trebuie să determinăm mai întîi regiunea mulțimilor predicative.

Unul dintre modurile posibile de înlăturare a acestui impas constă în a începe cu o totalitate de numere ordinale (de exemplu, toate numerele ordinale inferioare primului număr ε sau toate numerele ordinale constructive în sensul lui Church-Kleene), considerînd apoi totalitatea numerelor ordinale β definibile în unele dintre sistemele Σ_α, unde α este un număr ordinal din prima totalitate. În general, noua totalitate conține prima totalitate ca parte proprie a sa. Putem considera apoi totalitatea numerelor ordinale γ definibile într-un sistem Σ_β, unde β este un număr ordinal din a doua totalitate. Și așa mai departe. Bineînțeles, nu avem nici o garanție evidentă că toate numerele ordinale constructive căutate vor fi obținute în acest mod. În mod cert, putem obține o mare diversitate de numere ordinale.

[12] Vezi S. C. Kleene, *On Notation for Ordinal Numbers*, în „Jour. Symbolic Logic," 3, 1938, pp. 150—155 și Alonzo Church, *The Constructive Second Number Class*, în „Bulletin of the American Mathematical Society", 44, 1938, pp. 224—232.

Utilitatea acestei definiții a numerelor ordinale constructive depinde de următoarele fapte: fiind dat un număr ordinal α, avem, așa cum s-a arătat mai sus, o procedură determinată de construire a lui Σ_α; fiind dat un sistem Σ_β, totalitatea numerelor ordinale care pot fi obținute în Σ_β este determinată. Metoda nu prezintă nici o circularitate.

Limitările impuse sistemelor formale au fost discutate în § 5. Vom face acum cîteva observații generale cu privire la ceea ce face ca metoda întruchipată în teoria Σ să fie naturală și totodată să nu fie supusă obiecțiilor care s-au ridicat aici.

Una dintre cauzele care face ca această metodă de abordare să fie naturală rezidă în inglobarea tuturor principiilor aplicate în sistemele standard. Consistența este garantată prin respingerea cu desăvîrșire a mulțimilor impredicative. Posibilitatea extinderii imediate este exclusă prin evitarea deliberată a postulării unui nivel maxim al mulțimilor. În fiecare stadiu există, ca să spunem așa, o limită indeterminată a cunoașterii noastre efective a posibilităților de construire a noi mulțimi din mulțimi date. Fiecare determinare dată a limitei poate fi depășită, dar nici o limită determinată nu transcende și nici măcar nu epuizează toate posibilitățile permise de teorie. În acest fel, a doua obiecție este eludată.

Pentru ca să răspundem celei de a treia obiecții, sînt excluse cu desăvîrșire mulțimile nenumărabile. Pentru orice enumerare de mulțimi de numere întregi pozitive de pildă, din cadrul teoriei, există întotdeauna o altă mulțime de numere întregi pozitive care nu face parte din enumerare. Mai mult, dîndu-se un ordin arbitrar, există mulțimi care nu pot fi enumerate prin mulțimi de acel ordin. Cu toate acestea, fiecare mulțime din teorie este numărabilă printr-o mulțime (relație) din teorie. Nu numai că nu există nici o mulțime absolut nenumărabilă, dar nu există nici măcar o mulțime a teoriei care să nu fie numărabilă în cadrul teoriei. Există numai mulțimi nenumărabile relativ la orice ordin din cadrul teoriei.

A treia obiecție este înlăturată astfel, dar numai prin adoptarea unui anumit punct de vedere preferat (s-ar putea spune, prin adoptarea unei filozofii) care interpretează mulțimile ca obiecte într-un anumit sens construite. Din acest punct de vedere, faptul că nici o enumerare nu poate epuiza toate mulțimile de numere pozitive întregi se explică nu prin existența unor mulțimi nenumărabile, ci mai curînd prin imposibilitatea intelectului nostru de a-și face o idee clară și distinctă asupra ansamblului *tuturor* mulțimilor sau legilor care definesc enumerări; într-adevăr, dacă nu sîntem capabili să contemplăm un asemenea ansamblu, este totalmente lipsit de sens să ne întrebăm dacă există o mulțime oarecare nenumărabilă în sens absolut. Dacă de fiecare dată nu putem contempla decît o porțiune a tuturor mulțimilor sau legilor enumerării, urmează că putem demonstra că anumite mulțimi sînt nenumărabile numai atunci cînd restrînge mijloacele de enumerare la genul respectiv.

Dar, același fapt mai poate fi explicat prin incapacitatea noastră de contemplare în același timp a ansamblului *tuturor mulțimilor* (sau legilor care definesc mulțimi) de *numere întregi pozitive*. Căci — așa cum se poate argumenta — deși nu putem contempla toate legile de enumerare în același timp, putem contempla pe fiecare în parte. De aceea, dacă putem cuprinde dintr-o dată

ansamblul tuturor mulțimilor de numere întregi pozitive, putem vedea, în linii mari, că nici o lege de enumerare nu este adecvată pentru o enumerare a tuturor acestor mulțimi și putem conchide apoi că totalitatea mulțimilor de întregi pozitivi este absolut nenumărabilă. Dar dacă nu putem avea o idee clară și distinctă despre totalitatea mulțimilor de întregi pozitivi — așa cum este firesc să afirmăm din punct de vedere constructivist — atunci este absolut fără sens să întrebăm dacă o asemenea totalitate, în cazul cînd am putea-o cuprinde, poate fi sau nu epuizată printr-o lege specifică de enumerare.

Prin prisma acestei bordări, întrebarea dacă totalitatea mulțimilor de numere întregi pozitive este numărabilă (în sens absolut) este tot una cu întrebarea — pe care o pune omul obișnuit dar poate că nu fizicianul — dacă lumea este sau nu mărginită în timp și spațiu. Ansamblul tuturor mulțimilor sau al tuturor mulțimilor de numere întregi pozitive se aseamănă lucrului în sine kantian, în timp ce mulțimile construibile corespund întregii experiențe posibile. Ca să-l parafrazăm pe Kant: dacă mă întreb acum asupra cantității totalității, înțeleasă ca număr, este la fel de imposibil, în raport cu toate noțiunile mele, să declar că este nenumărabilă sau să declar că este numărabilă. Într-adevăr, niciuna dintre aceste aserțiuni nu se poate cuprinde în construcția mintală, deoarece construcția unei totalități nenumărabile sau a unei totalități numărabile închise, incapabilă de o lărgire ulterioară, este imposibilă; acestea sînt simple reprezentări. Numărul totalității, determinat în indiferent care mod, ar trebui prin urmare predicat despre totalitatea transcendentă însăși, în afara oricărei gîndiri constructive [13]. Într-adevăr, nu ne putem forma, dincolo de orice construcție posibilă, o idee precisă asupra naturii eventuale a totalității transcendente a mulțimilor. Totuși nu avem libertatea să ne abținem în întregime de la cercetarea acestei probleme; căci construcția nu dă niciodată satisfacție deplină rațiunii ci, dînd răspuns întrebărilor, ne trimite înapoi, mereu înapoi, fără să ne satisfacă printr-o soluție completă... Lărgirea conceptiilor noastre în matematică și posibilitatea unor descoperiri noi sînt infinite. Dar limitele nu trebuie confundate, deoarece matematica se referă numai la ceea ce este constructibil, iar ceea ce nu poate fi obiect al contemplației intuitive, de pildă ansamblul tuturor legilor, rămîne în întregime în afara sferei acesteia și nu poate duce niciodată la ele; totodată, ea nici nu le cere [14].

Chestiunea dacă Σ poate fi extins mai departe rămîne deschisă. Întrucît noi facem în Σ convenții care depind de cele făcute anterior, nu putem prezice și nu putem bineordona, în mod efectiv, toate ordinele posibile folosite în Σ o dată pentru totdeauna. Pe de altă parte, s-ar părea că putem arunca o privire dinafară, vorbind despre ansamblul tuturor mulțimilor din Σ sau al tuturor ordinelor folosite în Σ. Atunci cînd vorbim despre o mulțime universală care conține ca membri toate multimile din Σ, sau adoptăm o convenție imposibilă, sau adoptăm o convenție de un tip superior. Poate că este exagerat să spunem că această convenție este imposibilă. În fapt, ea nu este foarte informativă. Astfel, se pare că este posibil să adăugăm, fără contradicție, sistemului Σ o mulțime universală izolată, cu condiția ca să nu încercăm

[13] Vezi și *Prolegomene la orice metafizică viitoare*, § 52, c.
[14] *Ibidem.*, § 57.

să spunem prea mult despre această mulțime transcendentă. Dacă dorim, putem spune chiar că Σ este tot ce este cerut de matematică, introducerea oricăror alte mulțimi ținînd de imperiul filozofiei.

§ 12. CONCLUZII

Putem spune că în matematică există trei regiuni: (1) efectiv decidabilul; (2) constructivul; (3) transcendentul. Teoria Σ reprezintă o încercare de formalizare a celei de a doua regiuni. Saltul lui Cantor la nenumărabilul absolut ține de a treia regiune, în timp ce logica lui Brouwer, ca și punctul de vedere finitist al lui Hilbert privesc în special prima regiune. Hilbert și Brouwer se deosebesc între ei prin faptul că în timp ce Brouwer nu consimte niciodată să accepte altceva decît logica decidabilă, Hilbert ne-ar permite să facem uz de tot ce poate fi justificat pe baza logicii decidabile. Lucrul acesta ar mai putea fi exprimat, spunîndu-se că Brouwer cere ca întreaga matematică să se restrîngă la logica sa, pe cînd Hilbert cere ca numai metamatematica să fie supusă acestei restricții.

Pentru Hilbert, este acceptabil tot ce poate fi constatat sau demonstrat în mod finitist ca fiind necontradictoriu: a fi înseamnă a fi necontradictoriu. Din discuțiile purtate în jurul punctului de vedere finitist reiese că se poate demonstra prin raționamente finitiste consistența teoriei Σ. Eventual, Σ poate fi considerată ca o teorie care satisface cerințele puse de Hilbert în fața fundamentelor matematicii. Fără îndoială, există raționamente finitiste care nu sînt formalizabile în cadrul unor sisteme curente de teoria elementară a numerelor [15].

Scopul principal al construirii și dezvoltării unei teorii nu va fi atît expunerea unui sistem formal ca bază a întregii matematici, cît mai ales prezentarea unui argument de justificare a tuturor raționamentelor matematicii care nu ajung în transcendent. Aceasta va constitui o încercare de demonstrare a faptului că orice asemenea raționament poate fi formalizat într-un sistem formal, care se încadrează în schema Σ.

După ce a devenit limpede că orice raționament matematic constructiv, adică orice raționament matematic care nu presupune utilizarea suspectă a definițiilor impredicative sau care nu comite un salt în nenumărabil poate fi formalizat în cadrul larg al lui Σ nu va mai trebui să formalizăm orice raționament prin explicitarea ordinelor diverselor mulțimi implicate. Dimpotrivă, în acest caz putem proceda fără să dăm o atenție specială ordinelor, avînd conștiința faptului că întotdeauna putem formaliza, dacă vrem, orice raționament într-un anume sistem Σ_α. În acest fel, practica uzuală din matematica obișnuită poate fi justificată pe baza teoriei Σ. Este tocmai genul de justificare care nu stînjenește practica uzuală. În acest sens, ea este de asemenea mai firească decît alte moduri de abordare a fundamentelor matematicii.

Dar cum putem demonstra că lucrurile stau într-adevăr în felul acesta? Există două metode — una laborioasă și alta succintă. Metoda laborioasă rezidă în ducerea la bun sfîrșit a raționamentelor, prin expunerea diverselor ramuri ale matematicii în cadrul lui Σ. De exemplu, așa cum grupul Bourbaki

[15] Vezi, de exemplu, D. Hilbert și P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. II, p. 373.

continuă să editeze mereu alte și alte volume ale tratatului lor, tot astfel noi demonstrăm pentru fiecare volum în parte modul în care toate definițiile demonstrabile se pot formaliza în cadrul teoriei Σ. Deși un asemenea program nu întîmpină, pare-se, un obstacol fundamental, îndeplinirea lui efectivă este o chestiune complicată și presupune un mare consum de timp. Este greu să hotărîm dacă face să ne dăm osteneala să aducem la îndeplinire acest program; într-adevăr, pe de o parte, numeroși matematicieni vor considera, desigur, că rezultatul îndeplinirii unui asemenea program nu prezintă interes, în timp ce, pe de altă parte, majoritatea logicienilor va pune la îndoială validitatea pretențiilor elevate ale unui program care nu a fost îndeplinit în mod efectiv.

Metoda succintă rezidă în a lăsa lucrurile în modul în care ele se prezintă într-o versiune dezvoltată a acestui studiu (sau, mai exact, într-o versiune care cuprinde elaborarea formală amănunțită a problemelor îmbrățișate în §§ 6—8), somîndu-l totodată pe acel ce ar pune la îndoială adecvarea lui Σ să prezinte un mod de raționare aplicat în matematica obișnuită însă neformalizabil în Σ. Partea proastă a acestei prescurtări este că puțini matematicieni care au o idee mai mult sau mai puțin clară despre întregul domeniu al matematicii își vor da probabil osteneala să studieze minuțios teoria Σ.

Există multe probleme deschise în legătură cu relația dintre decidabil și constructiv, precum și în legătură cu relația dintre constructiv și transcendent. Teoria Σ este destinată să fie o teorie definitivă a regiunii constructivului în matematică. Autorul nu știe dacă regiunea decidabilului admite o caracterizare unică acceptată în mod general. În ce privește regiunea transcendentului, ne mărginim să notăm că, desigur, este posibil să construim, de asemenea, o teorie legată de întreaga teorie zermeliană a mulțimilor în același mod în care teoria Σ este legată de sistemul Σ_0. Într-adevăr, transcendentiștii ar putea chiar să folosească, în calitate de indici ai ordinelor, numere ordinale dinafara clasei a doua de numere a lui Cantor.

Problema deschisă cea mai renumită din domeniul teoriei transcendente a mulțimilor este problema cantoriană a continuului sau problema independenței ipotezei lui Cantor de celelalte axiome ale teoriei mulțimilor. O problemă înrudită este independența axiomei alegerii. În timp ce independența ipotezei continuului de teoria de bază a mulțimilor decurge din independența axiomei alegerii, chestiunea demonstrării independenței sale, atunci cînd teoriei de bază a mulțimilor i se adaugă axioma alegerii, este mai interesantă. O problemă deschisă mai puțin renumită, însă mai fundamentală, este consistența folosirii mulțimilor impredicative.

Teoriei Σ i se poate obiecta că nu conține un ordin maxim, astfel că, de exemplu, în Σ nu putem vorbi despre toate mulțimile sau despre toate numerele reale în același timp. Dificultatea este cel puțin parțial de ordin lingvistic și în această măsură poate fi evitată printr-un procedeu lingvistic. Astfel, putem să introducem în Σ un gen suplimentar de variabile generale x, y, z etc., astfel încît să putem aserta „$(x)\ F(x)$“, dacă și numai dacă, pentru orice α putem aserta „$(x_\alpha)\ F(x_\alpha)$“; putem aserta „$(x)\ (\exists y)\ F(xy)$“, dacă și numai dacă pentru orice α există un β; putem aserta „$(x_\alpha)\ (\exists y_\beta)\ F(x_\alpha, y_\beta)$“ etc. Acest procedeu prezintă și avantajul suplimentar că în multe cazuri putem emite aserțiuni generale fără să explicităm indicii de ordin relevanți.

Aplicarea acestui procedeu apropie și mai mult teoria de practica uzuală din matematică.

Întrucît noțiunea de mulțime determinată de teoria Σ este mai clară decît noțiunea transcendentă de mulțime, pare rezonabil să așteptăm ca teoria Σ să ne permită să elucidăm mai profund anumite probleme matematice, dificile mai ales datorită caracterului lor foarte abstract și general. De exemplu, ne putem afla într-o poziție mai favorabilă pentru tratarea problemelor privind mulțimi arbitrare sau funcții arbitrare.

Gödel apără teoria transcendentă a mulțimilor, susținînd că ea poate fi justificată prin conceperea mulțimilor și conceptelor ca obiecte reale și că este legitim să le concepem în felul acesta. „După părerea mea, admiterea unor atare obiecte este tot atît de legitimă ca și adunarea unor obiecte fizice și avem tot atîtea motive să credem în existența lor. Ele sînt necesare pentru obținerea unui sistem satisfăcător de matematică în același sens în care corpurile fizice sînt necesare pentru o teorie satisfăcătoare a percepțiilor noastre senzoriale și în ambele cazuri este imposibilă interpretarea propozițiilor pe care vrem să le asertăm cu privire la aceste entități ca propoziții despre «date» respectiv, în al doilea caz, ca propoziții despre percepții senzoriale produse în mod real" [16].

Una dintre interpretările posibile ale raționamentului de mai sus constă în a spune că el revine la admiterea faptului că teoria transcendentă a mulțimilor și admiterea mulțimilor ca obiecte reale constituie un rău necesar, cu care trebuie să ne împăcăm dacă vrem să avem o teorie destul de simplă a matematicii. Teoria Σ pare să arate că acceptarea teoriei transcendente a mulțimilor nu constituie un rău necesar. În primul rînd, în ce privește faptele de care teoria trebuie să dea seamă, nici Gödel și nici alți autori nu consideră necesar să se păstreze infiniții superiori ai lui Cantor, dar aproape toți vor să rețină analiza clasică. Utilizarea mulțimilor impredicative este considerată un rău necesar, deoarece se consideră că analiza clasică nu poate fi dezvoltată fără aceste mulțimi. Teoria Σ demonstrează că aceasta nu este adevărat.

În ce privește simplitatea, trebuie spus că există, desigur, mai multe sensuri diferite ale cuvîntului „simplitate". Într-un anumit sens important, consistența demonstrabilă a teoriei Σ dovedește, în mod concludent, că aceasta este mai simplă, cel puțin în stadiul actual al cunoașterii noastre, în comparație cu sistemele standard ale teoriei transcendente a mulțimilor. De cele mai multe ori se consideră că teoria ramificată a tipurilor este iremediabil confuză, deoarece sîntem obligați să deosebim, în cadrul ei, cel puțin două ierarhii diferite (ordinele și tipurile sau nivelurile). Se știe însă că este suficientă o singură ierarhie, iar teoria Σ face uz, într-adevăr, de o singură ierarhie. În afară de aceasta, în formalizarea demonstrațiilor efective nu mai sîntem obligați să lăsăm să pătrundă nici măcar distincția dintre ordine, atîta timp cît avem grijă să nu facem uz de raționamente circulare, în care definițiile impredicative sînt indispensabile. De îndată ce am văzut cîte lucruri se pot face în cadrul teoriei Σ, putem continua să facem matematica așa cum se

[16] Kurt Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, în *The Philosophy of Bertrand Russell, The Library of Living Philosophers*, vol. V, sub redacția lui P. A. Schlipp. p. 137.

obișnuiește, conștienți fiind de faptul că raționamentele folosite pot fi formalizate în Σ, dacă și cînd dorim aceasta. Numai din cînd în cînd întîlnim moduri „stranii" de raționament, care trebuie examinate mai amănunțit, ca să putem decide dacă ele sînt formalizabile în Σ sau țin de domeniul teoriei transcendente a mulțimilor. De exemplu, puși în fața raționamentelor lui Cantor despre nenumărabilitate, cei mai mulți resimt, probabil, o oarecare stînjeneală și suspectează existența unei erori ascunse. Fără îndoială, matematicienii obișnuiți ar considera că aceste raționamente sînt extraordinar de ieșite din comun.

CAPITOLUL XXIV
UNELE DETALII FORMALE DESPRE TEORIILE PREDICATIVE ALE MULȚIMILOR

§ 1. LOGICA SUBIACENTĂ

În acest capitol prezentăm unele detalii formale, elaborate în 1953, cu privire la teoria schițată în capitolul precedent. Cea mai mare parte a materialului din acest capitol poate fi obținută cu ușurință din rezultate standard ale lui Bernays, Lorenzen, Schütte și Fitch. Așadar, acest capitol are în mare măsură un caracter expozitiv. În afară de aceasta, în perioada cînd a fost scris materialul, autorul nu a apreciat în toată amploarea lor diferitele dificultăți și subtilități legate de analiza numerelor ordinale și a admis că nu are prea multă importanță dacă presupunem o mulțime sau alta de numere ordinale, dacă mulțimea respectivă satisface unele condiții vagi, destul de largi. Avînd în vedere scopul urmărit acum de încercare a unei perfecționări, se pare că cel mai indicat este să admitem că în acest capitol sînt luați ca indici de ordin membrii unei mulțimi cunoscute de notații unice ale numerelor ordinale recursive ale lui Church-Kleene.

Elaborările mai recente vor fi discutate în capitolul următor. Avînd în vedere diversele rezultate noi, este foarte plauzibil că putem obține formulări mult mai bune decît cele date în acest capitol. Considerăm totuși că detaliile de mai jos pot fi de oarecare folos ca piese de construcție în cadrul unor tratări cuprinzătoare mai satisfăcătoare în viitor. De exemplu, sistemul teoriei hiperaritmetice a mulțimilor, schițată în capitolul următor, se va dovedi mult mai elegantă. Totuși, în vederea unui studiu mai amănunțit al acestui sistem, s-ar putea întîmpla să fim obligați să prezentăm mai explicit indici de ordin, într-o manieră analogă formulărilor din acest capitol.

Simbolurile primitive cu care construim termenii și propozițiile sistemului sînt următoarele:

1. Variabile: pentru orice numere ordinale constructive simbolurile α, x_α, y_α, z_α, u_α, w_α,... sînt variabile de ordin α;
2. Conectivele propoziționale $\neg$(nu), $\vee$(sau);
3. Simbolul abstracției $\hat{}$;
4. Simbolul relației de apartenență $\in$;
5. Simbolurile de grupare (,), [,], {,};
6. Cuantorii existențiali $(\exists x_\alpha)$, $(\exists y_\alpha)$, $(\exists z_\alpha)$, ... pentru toți α și pentru toate variabilele de ordin α.

Noțiunile de „propoziție" și „termen" se definesc prin inducție simultană în felul următor:

1. Fiecare variabilă de ordinul α este un termen de ordinul α.

2. Dacă b, c sînt termeni de ordinale β, respectiv γ, atunci $b \in c$ este o propoziție de ordinul β sau γ, după cum $\beta \geqslant \gamma$ sau $\gamma \geqslant \beta$.

3. Dacă p și q sînt propoziții de ordinul β, respectiv γ, atunci $\neg p$ este o propoziție de ordinul β, iar $p \vee q$ este de ordinul β sau γ, după cum $\beta \geqslant \gamma$ sau $\gamma \geqslant \beta$.

4. Dacă $F(v_\alpha)$ este o propoziție de ordinul β care conține o variabilă liberă arbitrară v de ordinul α, atunci $(\exists v_\alpha)\, F(v_\alpha)$ este o propoziție de ordinul β sau $\beta + 1$, după cum $\beta > \gamma$ sau $\beta = \gamma$ (unde cazul $\beta < \gamma$ nu este posibil).

5. Dacă $F(x_0)$ este de forma

$$\neg\neg(\exists y_0)\neg\neg[\neg(y_0 \in x_0 \vee \neg\neg y_0 \in x_0) \vee \neg(\neg\neg y_0 \in x_0 \vee \neg y_0 \in x_0)]$$

(adică $x_0 \neq x_0$, conform definițiilor ce vor fi introduse mai jos), atunci $\hat{x}_0 F(x_0)$ este un termen de ordinul 0; dacă b și c sînt termeni de ordinul 0, atunci termenul de forma

$$\hat{x}_0\,\{x_0 \in b \vee \neg(\exists y_0)\neg\neg[\neg(\neg y_0 \in x_0 \vee \neg\neg y_0 \in c) \vee \neg(\neg\neg y_0 \in x_0 \vee \neg y_0 \in c)]\}$$

(adică $\hat{x}_0(x_0 \in b \vee x_0 = c)$ conform definițiilor ce vor fi introduse mai jos) este de asemenea un termen de ordinul 0. Termenii de ordin 0 vor mai fi denumiți și termeni de bază.

6. Dacă $F(v_\alpha)$ este o propoziție de ordinul β și $\hat{v}_\alpha\, F(v_\alpha)$ nu este un termen de bază, atunci $\hat{v} F(v_\alpha)$ este un termen de ordinul β, sau $\beta + 1$, după cum $\beta > \alpha$ sau $\beta = \alpha$.

Întrucît toți termenii sînt termeni de mulțimi sau termeni care desemnează mulțimi, ei vor fi denumiți și abstracți. Termenii de bază definesc mulțimi finite care au fost construite pornind de la mulțimea vidă.

Sistemul Σ (sau mai bine zis schema de sistem Σ) conține două părți: logica subiacentă a inferenței (teoria cuantificării) și teoria propriu-zisă a mulțimilor. Logica inferenței este cea standard, însă formalizată într-o formă specială, pentru ca să faciliteze anumite considerații metamatematice.

Logica inferenței a lui Σ se bazează pe o singură schemă de axiome (Ax I) și opt reguli de inferență ($Ri1$—$Ri8$). Teoria propriu-zisă a mulțimilor din cadrul lui Σ se bazează pe șapte scheme de axiome (Ax II — Ax VII). În acest paragraf vom enunța doar axiomele și regulile logicii inferenței.

Ax I. Legea terțului exclus. Pentru fiecare propoziție p din Σ, $\neg p \vee p$.

Folosim formula $p \to q$, ca să indicăm că dacă p este o teoremă, q este de asemenea teoremă; în mod similar, $pq \to r$ arată că dacă p și q sînt teoreme, atunci r este de asemenea teoremă.

Ri 1. $p \vee [p \vee (r \vee s)] \to p \vee [r \vee (q \vee s)]$.

Ri 2. $p \vee (q \vee r) \to p \vee (r \vee q)$.

Ri 3. $p \vee p \to p$.

Ri 4. $q \to p \vee q$.

Ri 5. $\neg p \vee q \to \neg(p \vee p) \vee q$.

Ri 6. $p \vee q, \neg q \vee r \to p \vee r$.

Ri 7. Dacă b este un termen de ordinul α, $q \vee F(b) \to q \vee (\exists v_\alpha) F(v_\alpha)$.

Ri 8. Dacă v_α nu intră în q, atunci $\neg F(v_\alpha) \vee q \to \neg(\exists v_\alpha) F(v_\alpha) \vee q$.

Putem să demonstrăm că sistemul determinat de *Ax* I și *Ri* 1 — *Ri* 8 este echivalent cu următorul sistem despre care se știe că este complet.

1.1. $\neg(p \vee p) \vee p$.

1.2. $\neg q \vee (p \vee q)$.

1.3. $\neg(p \vee q) \vee (q \vee p)$.

1.4. $\neg(\neg q \vee r) \vee [\neg(p \vee q) \vee (p \vee r)]$.

1.5. $p, \neg p \vee q \to q$.

1.6. Dacă b este un termen de ordinul α, $\neg F(b) \vee (\exists v_\alpha) F(v_\alpha)$.

1.7. Dacă v_α nu intră în q, atunci $\neg F(v_\alpha) \vee q \to \neg(\exists v_\alpha) F(v_\alpha) \vee q$.

Întrucît este ușor să verificăm că toate teoremele demonstrabile pe baza *Ax* I și a *Ri* 1—*Ri* 8 sînt valide și deci demonstrabile în sistemul complet determinat de 1.1—1.7, este necesar să demonstrăm numai că și reciproc 1.1.—1.7 sînt deductibile din *Ax*1 și *Ri* 1—*Ri* 8. Cei ce nu pun la îndoială faptul că acest lucru poate fi demonstrat pot să treacă peste restul acestui paragraf.

Se întîmplă ca 1.7 să fie identică cu *Ri*8. Vom trece acum la deducerea lui 1.1—1.6, folosind atunci cînd este necesar reguli auxiliare.

1.5. $p, \neg p \vee q \to q$.

Demonstrație. Conform *Ri*4, $p \to q \vee p$. Așadar, $p, \neg p \vee q \to q \vee p, \neg p \vee q$. În consecință, conform *Ri* 6, $p, \neg p \vee q \to q \vee q$. Conform *Ri* 3, $p, p \neg \vee q \to q$.

1.8. $p \vee q \to q \vee p$.

Demonstrație. Conform *Ri* 4, $p \vee q \to (q \vee p) \vee (p \vee q)$. În consecință, conform *Ri*2, $p \vee q \to (q \vee p) \vee (q \vee p)$. Așadar, conform *Ri*3, $p \vee q \to q \vee p$.

1.1. $\neg(p \vee p) \vee p$.

Demonstrație. Conform *Ax* 1, $\neg p \vee p$. Așadar, conform *Ri* 5, $\neg(p \vee p) \vee p$.

1.9. $p \vee (q \vee r) \to q \vee (p \vee r)$.

Demonstrație.

Conform *Ri* 4, $p \vee (q \vee r) \to \neg(\neg p \vee p) \vee [p \vee (q \vee r)]$.

Conform *Ri* 1, $p \vee (q \vee r) \to \neg(\neg p \vee p) \vee [q \vee (p \vee r)]$.

Conform 1.5. și $Ax\,1$, $p \vee (q \vee r) \to q \vee (p \vee r)$.

1.2. $\neg q \vee (p \vee q)$.

Demonstrație. Conform Ax I și Ri 4, $p \vee (\neg q \vee q)$.

Conform 1.9, $\neg q \vee (p \vee q)$.

1.3. $\neg(p \vee q) \vee (q \vee p)$.

Demonstrație. Conform Ax I și Ri 2.

1.6. $\neg F(b) \vee (\exists v_\alpha) F(v_\alpha)$.

Demonstrație. Conform Ax I și Ri 7.

1.10. $p \vee (q \vee r) \to (p \vee q) \vee r$.

Demonstrație.

Conform Ri 2, $p \vee (q \vee r) \to p \vee (r \vee q)$.

Conform 1.9, $\to r \vee (p \vee q)$.

Conform 1.8, $\to (p \vee q) \vee r$.

1.11. $p \vee [(q \vee r) \vee s] \to p \vee [q \vee (r \vee s)]$.

Demonstrație.

Conform Ri 2, $p \vee [(q \vee r) \vee s] \to p \vee [s \vee (q \vee r)]$.

Conform Ri 1, $\to p \vee [q \vee (s \vee r)]$.

Conform 1.10, $\to (p \vee q) \vee (s \vee r)$.

Conform Ri 2, $\to (p \vee q) \vee (r \vee s)$.

Conform 1.8, $\to (r \vee s) \vee (p \vee q$.

Conform 1.9, $\to p \vee [(r \vee s) \vee q]$.

Conform Ri 2, $\to p \vee [q \vee (r \vee s)]$.

1.4. $\neg([\neg q \vee r) \vee [(p \vee q) \vee (p \vee r)]$

Demonstrație.

Conform Ax I. $\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg q \vee r)$.

Conform 1.9, $\neg q \vee [\neg(\neg q \vee r) \vee r)]$. (1)

Conform Ax I, $\neg(p \vee q) \vee (p \vee q)$.

Conform 1.10, $[\neg(p \vee q) \vee p] \vee q$. (2)

Conform (2), (1), Ri 6 $[\neg(p \vee q) \vee p] \vee [\neg(\neg q \vee r) \vee r]$.

Conform 1.9, $\neg(\neg q \vee r) \vee \{[\neg(p \vee q) \vee p)] \vee r\}$.

Conform 1.11 $\neg(\neg q \vee r) \vee [\neg(p \vee q) \vee (p \vee r)]$.

Aceasta completează deducerea lui 1.1—1.7 din *Ax* 1 și *Ri* 1—*Ri* 8. Să recapitulăm. Regulile de inferență sînt în număr de opt; dintre ele, *Ri* 1—*Ri* 6 se referă la proprietățile standard ale funcțiilor de adevăr, astfel că prin combinarea *Ax* I cu *Ri* 1—*Ri* 6, toate tautologiile din domeniul funcțiilor de adevăr pot fi obținute ca teoreme ale sistemului. *R*7 și *R*8 se referă la proprietățile cuantorilor. Prin combinarea *Ax* I cu *Ri* 1—*Ri* 8 putem obține toate teoremele calculului predicatelor multisortate.

§ 2. AXIOMELE TEORIEI Σ

Acum putem trece la descrierea și discutarea axiomelor sistemului **Σ**. Simbolul v_α este folosit pentru desemnarea unei variabile arbitrare de ordinul α, iar b_α, c_β sînt destinate să desemneze termeni arbitrari de ordinul α respectiv β.

Admitem următoarele definiții uzuale:

D 2.1. „$=_D$“ înseamnă „desemnează“.

D 2.2. $p \supset q = {}_D \neg p \vee q$.

D 2.3. $p \,\&\, q =_D \neg(p \supset \neg q)$.

D 2.4. $p \equiv q =_D [(p \supset q) \,\&\, (q \supset p)]$.

D 2.5. $(v_\alpha) =_D \neg(\exists v_\alpha)\neg$.

D 2.6. Dacă α nu este de genul succesor și $\alpha \geqslant \beta$, atunci:

$$b_\alpha = c_\beta =_D (v_\alpha)\,(v_\alpha \in b_\alpha \equiv v_\alpha \in c_\beta).$$

$$c_\beta = b_\alpha = {}_D b_\alpha = c_\beta.$$

D 2.7. Dacă β este de genul succesor și $\beta > \alpha$ sau $\beta = \alpha$, atunci:

$$b_\alpha = c_\beta =_D (v_{\beta-1})\,(v_{\beta-1} \in b_\alpha \equiv v_{\beta-1} \in c_\beta).$$

$$c_\beta = b_\alpha =_D b_\alpha = c_\beta.$$

Teoremele sistemului sînt acele propoziții ale sistemului care sînt sau axiome. sau deductibile din alte teoreme, conform regulilor de inferență *Ri* 1 — Ri 8, care se referă la proprietățile standard ale noțiunilor $\neg$, $\vee$, $(\exists)$.

Axiomele sistemului sînt de 7 genuri.

Ax I. Legea terțului exclus: pentru orice propoziție p a sistemului, $\neg p \vee p$.

Ax II. Axiomele identității: pentru orice γ, $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$,

$$[x_\alpha = y_\beta \,\&\, x_\alpha \in z_\gamma] \supset y_\beta \in z_\gamma.$$

Ax III. Axiomele însumării infinite: pentru orice număr limită α, dacă

$$\beta < \alpha, \text{ atunci } (x_\beta)\,(\exists y_\alpha)\,(y_\alpha = x_\beta).$$

Ax IV. Axiomele abstracției:

$$y_\beta \in \hat{x}_\beta F(x_\beta) \equiv F(y_\beta).$$

Ax V. Axiomele mulțimilor perechi: pentru orice număr limită α,

$$(\exists z_\alpha)\ [z_\alpha = \hat{u}_\alpha\ (u_\alpha = x_\alpha \vee u_\alpha = y_\alpha)].$$

Ax VI. Axiomele fundării:

$$(\exists x_\alpha)\ x_\alpha \in z_\alpha \supset (\exists y_\alpha)\{y_\alpha \in z_\alpha\ \&\ (x_\alpha)\ \neg[x_\alpha \in y_\alpha\ \&\ x_\alpha \in z_\alpha]\}$$

Ax VII. Axiomele ordinului mărginit: Dacă $\alpha > \beta$ și $x_\alpha \in y_{\beta+1}$, atunci $(\exists z_\beta)\ (z_\beta = x_\alpha)$; dacă $\alpha > \beta$, $x_\alpha \in y_\beta$ și β nu este de gen succesor, atunci

$$(\exists z_\beta)\ (z_\beta = x_\alpha)].$$

Ax VIII. Axiomele limitării: vom deduce teoria numerelor întregi nenegative și vom demonstra că, oricare ar fi α, este posibilă enumerarea tuturor mulțimilor de ordinul α a căror existență este cerută de sistem (înaintea adăugării *Ax* VIII); după aceea putem să formulăm axiomele limitării, care afirmă că aceste mulțimi enumerate sînt toate mulțimile sistemului.

Din regulile *Ri* 7 și *Ri* 8 putem deduce următoarele consecințe în cadrul sistemului:

T 2.1. Dacă b_α este un termen și v_α o variabilă de ordin α,

$$F(b_\alpha) \supset (\exists v_\alpha)\, F(v_\alpha) \quad \text{și} \quad (v_\alpha)\, F(v_\alpha) \supset F(b_\alpha).$$

T 2.2. Dacă $F(v_\alpha) \supset q$ este teoremă și v_α nu intră în q, atunci $(\exists v_\alpha)\, F(v_\alpha) \supset q$ este de asemenea o teoremă.

Prin combinarea *Ax* II, *Ax* IV, *D* 2.6 și a *D* 2.7, putem obține principiul obișnuit al extensionalității, precum și teoria obișnuită a identității. În speță, acestea rezultă direct din *D* 2.6 și *D* 2.7.

T 2.3. $(x_\alpha)\ x_\alpha = x_\alpha$.

Conform *Ax* IV, *Ax* II, *T* 2.1, avem în mod imediat:

T 2.4. $[x_\alpha = y_\beta\ \&\ F(x_\alpha)] \supset F(y_\beta)$.

Ax IV întruchipează principiul fundamental al teoriei mulțimilor. În linii mari, ea afirmă că fiecare proprietate exprimabilă în sistem definește o mulțime a sistemului. Din *Ax* IV și *T* 2.1 urmează:

T 2.5. Dacă $\hat{x}_\beta F(x_\beta)$ este un termen de ordinul α, atunci $(\exists z_\alpha)\ (y_\beta)\ [y_\beta \in z_\alpha \equiv F(x_\beta)]$.

Totodată, conform *T* 2.1, *D* 2.6 și *D* 2.7:

T 2.6. Dacă $\hat{x}_\beta F(x_\beta)$ este un termen de ordinul α, atunci $(\exists z_\alpha)\ [z_\alpha = \hat{x}_\beta\, F(x_\beta)]$.

Putem observa că în *T* 2.5 și *T* 2.6, $\alpha > \beta$. Important este faptul că $\alpha = \beta + 1$ numai în cazurile cînd $F(x_\beta)$ este o propoziție de ordin $\leqslant \beta$. Aceasta, spre deosebire de o teorie impredicativă sau de o teorie cu axioma reductibilității, în care *T* 2.5 și *T* 2.6 sînt mai tari, prin faptul că α este luat întotdeauna ca $\beta + 1$ indiferent de ordinul lui $F(x_\beta)$.

Ax V este importantă pentru definirea perechilor ordonate și astfel pentru reducerea relațiilor și funcțiilor la mulțimi.

Excluzînd mulțimile suspecte, Ax VI ne garantează principiul inducției matematice și cel al inducției transfinite.

Ax VIII ne permite să reducem considerațiile cu privire la toate mulțimile la considerații despre toate numerele întregi nenegative (corespunzătoare acestor mulțimi). Drept urmare, multe teoreme generale despre mulțimi (de exemplu, axioma alegerii, teoremele celei mai mici margini superioare) pot fi demonstrate prin inducție matematică. Într-adevăr, dacă am dispune de inducția matematică în absența axiomei Ax VI, am putea totodată să deducem Ax VI din Ax VIII prin inducție. Pentru ca Ax VIII să aibă semnificația vizată, trebuie să presupunem ceea ce se cheamă o interpretare normală a numerelor întregi nenegative; la rîndul său, această interpretare pare să apeleze la axiomele fundării Ax VI. Așadar, deducerea formală a Ax VI din formularea actuală a Ax VIII nu pare posibilă, deși axiomele intuitive tari de limitare ar îngloba poate Ax VI în calitate de cazuri particulare.

Ax VII formulează principiul că dacă α este limita numerelor ordinale $\beta_1, \beta_2, \ldots$, atunci mulțimile de ordin oarecare β_i se numără printre mulțimile de ordinul α. De exemplu, toate mulțimile de ordin finit sînt în același timp mulțimi de ordin ω. Exemplul poate fi extins cu ușurință la cazul general cînd α este un număr ordinal oarecare.

T 2.7. Oricare ar fi α și β, dacă $\alpha > \beta$, atunci $(x_\beta)\ (\exists y_\alpha)\ (y_\alpha = y_\beta)$.

Demonstrație. Dacă α este 0, aceasta este banal, deoarece $0 > \beta$ este întotdeauna fals. Dacă α este un număr limită, aceasta rezultă din Ax III. Să admitem, de aceea, că α este de genul succesor și că $\alpha = \gamma + 1$. Dacă β este de asemenea de genul succesor, atunci vom lua

$$y_\alpha = \hat{z}_\gamma\ [z_\gamma \in x_\beta\ \&\ (\exists u_{\beta\text{-}1})\ (u_{\beta\text{-}1} = z_\gamma)].$$

Conform D 2.7, $x_\beta = y_\alpha$. Dacă β nu este de genul succesor, atunci vom lua

$$y_\alpha = \hat{z}_\gamma[z_\gamma \in x_\beta\ \&\ (\exists u_\beta)(u_\beta = z_\gamma)].$$

Iarăși, conform D 2.7, $x_\beta = y_\alpha$.

Combinînd T 2.6 cu T 2.9, avem:

T 2.8. Dacă $\hat{x}_\gamma\ F(x_\gamma)$ este de ordin β și $\alpha > \beta$ sau $\alpha = \beta$, atunci $(\exists z_\alpha)$ $[z_\alpha = \hat{x}_\gamma\ F(x_\gamma)]$.

Pe scurt, mulțimile sistemului sînt cumulative: toate mulțimile de un ordin inferior oarecare sînt totodată mulțimi de un ordin superior oarecare.

Una dintre consecințele Ax VI este:

T 2.9. $(y_\alpha)\ \neg y_\alpha \in y_\alpha$.

Demonstrație. Dacă $y_\alpha \in y_\alpha$, atunci $\hat{x}_\alpha(x_\alpha = y_\alpha)$ ar fi o mulțime care contrazice Ax VI.

În mod similar:

T 2.10. $(x_\alpha)\ (y_\alpha)\ \neg(x_\alpha \in y_\alpha\ \&\ y_\alpha \in x_\alpha)$.

Demonstrație. În caz contrar, mulțimea $\hat{z}_\alpha(z = x_\alpha \vee z_\alpha = y_\alpha)$ ar viola Ax VI.

Ax III este necesară deoarece, potrivit modului în care termenii (sau, mai precis, termenii de mulțimi) au fost introduși în sistem, nici un termen care nu conține variabile libere nu este de ordinul α, dacă α este un număr limită.

Ax III garantează că dacă α este un număr limită, orice mulțime determinată de un termen de ordin inferior lui α este totodată o mulțime de ordinul α sau, cu alte cuvinte, orice termen de ordin inferior lui α este totodată un termen de ordinul α.

În aparență, *Ax* VII este independentă de celelalte axiome. Ea servește la restrîngerea în oarecare măsură a efectului admiterii în calitate de aserțiuni cu sens a enunțurilor că o mulțime de ordin superior aparține unei mulțimi de ordin inferior. *Ax* VII afirmă, de fapt, că dacă o mulțime b aparține unei mulțimi c de ordinul $\alpha(\alpha > 0)$, atunci b trebuie să fie identică (adică coextensională) cu o mulțime de ordin inferior lui α.

Observațiile care urmează se referă la mulțimile finite. Conform *T* 2.5 și definiției după care $\hat{x}_0(x_0 \neq x_0)$ este de ordinul 0, avem

T 2.11. $(\exists z_0)\,[z_0 = \hat{x}_0(x_0 \neq x_0)]$.

Similar, conform *T* 2.6 și definiției termenilor de ordinul 0, avem:

T 2.12. Dacă b și c sînt termeni de ordinul 0, atunci $(\exists z_0)\,[z_0 = \hat{x}_0(x_0 \in b \vee x_0 = c)]$.

Întrucît variabilele sînt termeni, avem:

T 2.13. $(\exists z_0)\ [z_0 = \hat{x}_0(x_0 \in u_0 \vee x_0 = y_0)]$.

Combinînd *T* 2.11, *T* 2.13 și *Ax* III, putem deduce o teorie a mulțimilor finite, construite pornind de la mulțimea vidă.

Aceasta depinde de clauza specială cu privire la termenii de ordinul 0. Dacă nu admitem această clauză, vom fi puși în situația următoare: $\hat{x}_0\,(x_0 \neq x_0)$ este de ordinul 1, $\hat{x}_1\,[x_1 \in \hat{x}_0\ (x_0 \neq x_0) \vee x_1 = \hat{x}_0\ (x_0 \neq x_0)]$ este de ordinul 2, și așa mai departe. Atunci, dacă presupunem că nu există un ordin minim, am avea o infinitate de mulțimi finite de ordinul ω. Într-adevăr, din *Ax* VIII ar urma atunci în mod intuitiv:

$$(\exists z_\omega)\,[z_\omega = \hat{x}_0(x_0 \neq x_0)];\ (\exists z_\omega)\,[z_\omega = \hat{u}_{\omega}(u_{\omega} \in x \vee u_{\omega} = y_\omega)].$$

Cu toate acestea, dezvoltarea formală a teoriei este probabil mai complicată decît abordarea prezentă.

Trebuie observat că *Ax* V este, din punct de vedere intuitiv, o consecință a *Ax* VIII. Astfel, conform *Ax* VIII, fiecare mulțime de ordinul α (unde α este un număr limită) este de ordin β, $\beta < \alpha$. De aceea, cuplul alcătuit din două mulțimi de ordinul α este iarăși de ordinul α. Dar întrucît pentru formularea *Ax* VIII noi avem nevoie, în prealabil, de o teorie elaborată cu ajutorul *Ax* V, nu este clar dacă putem formaliza o deducere a *Ax* V din *Ax* VIII.

Pentru fiecare α, Σ_α este acea parte a simbolismului de mai sus care conține numai variabile și mulțimi de ordin $\leqslant \alpha$. În cazul cînd α este un număr limită, Σ_α este acea parte a simbolismului de mai sus care conține numai variabile și mulțimi de ordin $< \alpha$. Dacă α nu este un număr limită, sistemul Σ_α ar fi, desigur, tocmai sistemul $\Sigma_{\alpha-1}$. Vom desemna prin Σ întregul formalism, adică suma sau reuniunea tuturor sistemelor Σ_α.

Riguros vorbind, sistemul Σ nu este un sistem formal sau logistic în sensul obișnuit, deoarece nu există vreun mod efectiv de a da de la început toate simbolurile primitive. Pentru fiecare α, Σ_α este un sistem formal. Deși pentru orice α dat, putem construi efectiv un sistem Σ_α, nu avem un mod efectiv de determinare a tuturor acestor numere ordinale α. Este poate mai corect să considerăm Σ ca pe o schemă de sisteme formale sau ca o rețetă de fabricare a unor sisteme formale ori de cîte ori este dat un număr ordinal α. Cu toate acestea, pentru ceea ce urmărim este mai convenabil să spunem mai departe că Σ este un sistem.

§ 3. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

Relațiile pot fi identificate cu perechi ordonate, triplete ordonate și așa mai departe. Notațiile pentru perechi ordonate și neordonate, triplete ordonate etc. pot fi introduse astfel, încît perechea sau tripletul sau n-uplul de mulțimi de același ordin sau de ordine diferite să aibă același ordin ca mulțimea de ordinul cel mai înalt.

Perechea neordonată alcătuită din x_α și y_β:

D 3.1. $\{x_\alpha, y_\beta\} = {}_D\{y_\beta, x_\alpha\} = {}_D\hat{z}_\alpha(z_\alpha = x_\alpha \vee z_\alpha = y^\beta) \quad (\alpha \geqslant \beta)$.

Mulțimea al cărei unic membru este x_α:

D 3.2. $\{x_\alpha\} = {}_D\{x_\alpha, x_\alpha\}$.

Dacă $\alpha \geqslant \beta$ și α nu este un număr ordinal de gen succesor, atunci

D 3.3. $\langle x_\alpha, y_\beta\rangle = {}_D\{\{x_\alpha\}, \{x_\alpha, y_\beta\}\}$.

$\langle x_\beta, y_\alpha\rangle = {}_D\{\{x_\beta\}, \{x_\beta, y_\alpha\}\}$.

Avînd în vedere Ax V, $\langle x_\alpha, y_\beta\rangle$ sau $\langle x_\beta, y_\alpha\rangle$ este o mulțime de ordinul α.

Dacă $\alpha \geqslant \beta$ și α este un număr ordinal de genul succesor, situația se complică. Ca aproximare, putem defini mai întîi mulțimea pereche a lui x_α și y_β:

D 3.4. $x_\alpha \times y_\beta = {}_D\hat{z}_{\alpha-1}(\exists x_{\alpha-1})\ (\exists y_{\beta-1})\ (z_{\alpha-1}) = \langle x_{\alpha-1}, y_{\beta-1}\rangle \,\&\, x_{\alpha-1} \in x_\alpha \,\&$

$\&\ y_{\beta-1} \in y_\beta)$,

ori de cîte ori β este un succesor și presupunînd că am definit deja $\langle x_{\alpha-1}, y_{\beta-1}\rangle$.

$$x_\alpha \times y_\beta = {}_D\hat{z}_{\alpha-1}(\exists x_{\alpha-1})\ (\exists w_\beta)\ (z_{\alpha-1}) = \langle x_{\alpha-1} w_\beta\rangle \,\&\, x_{\alpha-1} \in x_\alpha \,\&\, w_\beta \in y_\beta),$$

ori de cîte ori β nu este de genul succesor și în ipoteza că am definit deja $\langle x_{\alpha-1} w_\beta\rangle$. La fel, în cazul lui $y_\alpha \times x_\beta$.

Motivul pentru care nu putem să identificăm mulțimea pereche alcătuită din x_α și y_β cu perechea ordonată a lui x_α și y_β este că mai multe cupluri de mulțimi pot avea aceeași mulțime pereche; de exemplu, dacă y_β este vid, atunci $x_\alpha \times y_\beta$ este mulțimea vidă, indiferent de natura mulțimii x_α. Pentru a ocoli această dificultate recurgem la diferite artificii. Metoda aplicată mai jos este destul de complicată. Poate că există metode mai simple.

Pentru orice x_α, y_β, ..., z_γ (în total trei sau mai multe mulțimi), n-uplul lor se obține luîndu-se în mod repetat perechea ordonată a două mulțimi:

D 3.5. $\langle x_\alpha, y_\beta, ..., z_\gamma\rangle = {}_D\langle x_\alpha, \langle y_\beta, ..., z_\gamma\rangle\rangle$.

Întrucît mulțimea vidă va fi identificată cu numărul zero, facem uz de următoarea abreviere:

D 3.6. $0 = {}_D\hat{x}\ (x_0 \neq x_0)$.

Dacă $\alpha \geqslant \beta$ și α este de genul succesor, atunci:

D 3.7. $\langle x_\alpha, y_\beta\rangle = {}_D\hat{z}_{\alpha-1}\,(\exists x_{\alpha-1})\,(\exists y_{\beta-1})\ [(x_{\alpha-1}\in x\ \&\ z_{\alpha-1} = \langle\{0\},$
$x_{\alpha-1},\ 0\rangle) \vee (y_{\beta-1}\in y_\beta\ \&\ z_{\alpha-1} = \langle 0,\ 0,\ y_{\beta-1}\rangle)]$

ori de cîte ori β este succesor.

Cînd β nu este de genul succesor, vom înlocui în definiția de mai sus $y_{\beta-1}$ prin w_β. La fel, pentru $\langle y_\beta, x_\alpha\rangle$.

Pentru extinderea noțiunii de n-upluri ordonate la cazul banal cînd n este 1 stabilim:

D 3.8. $\langle x_\alpha = {}_D x_\alpha\rangle$.

Se poate observa că definițiile D 3.3, D 3.5 și D 3.7 conțin un moment inductiv așa că, în general, ele trebuie aplicate în mod succesiv. Cînd sînt luate împreună, perechile ordonate și n-uplurile ordonate sînt definite pentru mulțimi de toate ordinele.

Acum sîntem în măsură să discutăm neformal enumerarea tuturor mulțimilor de orice ordin dat.

Pentru orice număr ordinal α, există mulțimea universală V_α care conține ca membri toate mulțimile de ordinul α:

D 3.9. $V_\alpha = {}_D\hat{x}_\alpha\ (x_\alpha = x_\alpha)$.

Conform AxIV și T 2.3, avem:

T 3.1. $(x_\alpha)\ x_\alpha\in V_\alpha$.

Mulțimile de ordinul 0 sînt determinate pe baza definiției termenilor și ele cuprind toate mulțimile și numai acele mulțimi care satisfac următoarele condiții:

(i) $0\in v_0$, (ii), dacă $x_0\in v_0$ și $y_0\in v_0$ atunci $\hat{z}_0(z_0\in x_0 \vee z_0 = y_0)\in v_0$.

Enumerarea acestor mulțimi nu prezintă nici o dificultate. O formalizare a enumerării va fi discutată ceva mai încolo.

Mulțimile de ordin 1 sînt determinate de Ax IV, astfel încît pentru fiecare propoziție $F(y_0)$ de ordinul 1 există o mulțime corespunzătoare $\hat{y}_0F(y_0)$. Pentru enumerarea mulțimilor de ordinul 1 este suficient să enumerăm toate aceste propoziții. Nu este însă necesar să deosebim o propoziție de alta echivalentă, care este variantă alfabetică a ei (de exemplu: $x_0 = x_0$ și $y_0 = y_0$, sau $(x_0)\ \neg y_0\in x_0$ și $(z_0)\neg\, y_0\in z_0$), întrucît ele definesc una și aceeași mulțime.

Se va demonstra că toate mulțimile de ordinul 1 sînt enumerate printr-o mulțime din Σ_2. Această posibilitate depinde de faptul că există numai un număr finit de tipuri de propoziții atomice (adică de propoziții care nu conțin ca părți alte propoziții) și că există numai un număr finit de moduri de obținere a unor propoziții mai complexe din altele mai puțin complexe.

Mai exact, aceasta depinde de următorul rezultat cunoscut (vezi și Bernays 1937 sau Gödel 1940, p. 8).

*T*3.2. Dacă p este o propoziție de ordinul 1, care nu conține y_1, dacă nici o variabilă de ordinul 1 nu apare în p imediat înaintea lui $\in$ și dacă $x_0, \ldots, z_0$ sînt $k (k \geqslant 1)$ variabile de ordinul 0, atunci principiile de forma

$$(\exists y_1)\ (x_0) \ldots (z_0)\ (\langle x_0, \ldots, z_0\rangle \in y_1 \equiv p) \tag{1}$$

sînt deductibile din următoarele cazuri particulare:

(i) $(\exists y_1)\ (x_0)\ (\langle x_0,\ y_0\rangle \in y_1 \equiv x_0 \in y_0)$.

(ii) $(\exists y_1)\ (x_0)\ [x_0 \in y_1 \equiv (x_0 \in x_1\ \&\ x_0 \in z_1)]$.

$(\exists y_1)\ (x_0)\ (x_0 \in y_1 \equiv \neg x_0 \in x_1)$.

(iii) $(\exists y_1)\ (x_0)\ [x_0 \in y_1 \equiv (\exists y_0)\ (\langle y_0,\ x_0\rangle \in x_1)]$

$(\exists y_1)\ (x_0)\ (y_0)\ (x_0 \in y_1 \equiv \langle y_0,\ x_0\rangle \in x_1)$.

(iv) $(\exists y_1)\ (x_0)\ (y_0)\ (z_0)\ (\langle x_0,\ y_0,\ z_0\rangle \in y_1 \equiv \langle y_0,\ z_0,\ x_0\rangle \in x_1)$.

$(\exists y_1)\ (x_0)\ (y_0)\ (z_0)\ (\langle x_0,\ y_1,\ z_0\rangle \in y_1 \equiv \langle x_0,\ z_0,\ y_0\rangle \in x_1)$.

*Demonstrația T*3.2. este aproape exact aceeași cu cea a lui Bernays (1937) și Gödel 1940. Nu este nevoie să o repetăm.

Este ușor de văzut că (1) este echivalent cu principiul:

(2) $(\exists y_1)\ (w_0)\ (w_0 \in y_1 \equiv q)$, care acoperă acele cazuri ale *T*3.2 (sau ale *Ax* IV) în care q este o propoziție de ordinul 1. Astfel, conform *Ax* VII, putem trece cu vederea cazurile cînd variabilele de ordinul 1 apar înaintea lui $\in$; de exemplu, $x_1 \in y_0$ și $x_1 \in y_1$ pot fi înlocuite prin $(\exists x_0)\ (x_0 = x_1\ \&\ x_0 \in y_0)$ și respectiv $(\exists x_0)\ (x_0 = x_1\ \&\ x_0 \in y_1)$. Dacă nu luăm în considerare aceste cazuri, se constată că (2) este literalmente conținută în (1). Pe de altă parte, dîndu-se (2), putem să obținem (1) prin substituirea formulei $(\exists x_0) \ldots (\exists z_0)\ (w_0 = \langle x_0, \ldots, z_0\rangle\ \&\ p)$ în locul lui q.

Întrucît (2) sau partea care îi corespunde acestui principiu în *Ax* IV este singurul principiu de generare a mulțimilor de ordinul 1 (cu alte cuvinte, singurul principiu de generare a membrilor lui V_1), considerațiile făcute fac să fie foarte plauzibilă ipoteza că V_1 conține numai toate acele mulțimi generate pe baza cazurilor (i)—(iv) ale *T*3.2. Vom formula această ipoteză ca o axiomă de limitare și vom demonstra mai tîrziu că este consistentă.

Problema următoare rezidă în enumerarea tuturor mulțimilor de ordin n, pentru un număr întreg pozitiv arbitrar n. Enumerarea poate fi realizată prin extindere directă a cazului mulțimilor de ordinul 1. Se va demonstra că toate mulțimile de ordinul n sînt enumerate printr-o mulțime în Σ_{n+2}. Aceasta depinde de o generalizare a *T*3.2:

*T*3.3 Dacă p este o propoziție de ordinul $n + 1$ (un întreg pozitiv) care nu conține y_{n+1}, dacă nici o variabilă de ordinul $n + 1$ nu apare în p imediat înain-

tea lui $\in$ iar $x_i, \ldots, z_j$ sînt k variabile ($k \geqslant 1$) de ordine $\leqslant n$, atunci principiile de forma

$$(\exists y_{n+1})\,(x_i) \ldots (z_j)\,(\langle x_i, \ldots, z_j\rangle \in y_{n+1} \equiv p)$$

sînt deductibile din următoarele cazuri particulare:

(A) $(\exists y_{n+1})\ (x_n)\,(z_n)\,(\langle x_n,\ z_n\rangle \in y_{n+1} \equiv x_n \in z_n)$;

(B) Pentru orice $y_i (i = 0,\ 1, \ldots, n)$, $(\exists y_{n+1})\,(x_n)\,(x_n \in y_{n+1} \equiv x_n \in y_i)$;

(C) Fiind date două mulțimi x_{n+1} și z_{n+1}:

$(\exists y_{n+1})\,(x_n)\,[x_n \in y_{n+1} \equiv (x_n \in x_{n+1}\ \&\ x_n \in z_{n+1})]$,

$(\exists y_{n+1})\,(x_n)\,(x_n \in y_{n+1} \equiv \neg x_n \in z_{n+1})$,

$(\exists y_{n+1})\,(x_n)\,(y_n)\,(\langle x_n,\ y_n\rangle \in y_{n+1} \equiv y_n \in z_{n+1})$,

$(\exists y_{n+1})\,(x_n)\,(y_n)\,(w_n)\,(\langle x_n,\ y_n,\ w_n\rangle \in y_{n+1} \equiv \langle y_n,\ w_n,\ x_n\rangle \in z_{n+1})$,

$(\exists y_{n+1})\,(x_n)\,(y_n)\,(w_n)\ (\langle x_n,\ y_n,\ w_n\rangle \in y_{n+1} \equiv \langle y_n,\ x_n,\ w_n\rangle \in z_{n+1})$,

$(\exists y_{n+1})\,(y_n)\,[y_n \in y_{n+1} \equiv (\exists x_i)\,(\langle x_i,\ y_n\rangle \in x_{n+1}]$.

$(i = 0,\ 1, \ldots, n)$.

Demonstrația $T3.3$ este similară demonstrației $T3.2$. Propozițiile de forma $x_i \in z_j$ $(i < n)$ pot fi înlocuite prin $(\exists x_n)\ (x_n = x_i\ \&\ x_n \in z_j)$, propozițiile de forma $x_n \in z_j$ $(j < n + 1)$ pot fi înlocuite prin $x_n \in y_{n+1}$ pentru un y_{n+1} convenabil ales (în baza lui (B)). În consecință, cele $(2n + 8)$ cazuri speciale de mai sus sînt adecvate.

Aici pare din nou plauzibil că V_{n+1} conține (toate mulțimile și) numai mulțimile generate de cele $(2n + 8)$ axiome în $T3.3$. Această presupunere va fi formulată ca o axiomă de limitare și consistența ei va fi demonstrată.

În vederea unei utilizări ulterioare, vom introduce cîteva definiții curente:

$D\,3.10.$ $x_\alpha \subseteq y_\beta =_D (z_\alpha)\ (z_\alpha \in x_\alpha \supset z_\alpha \in y_\alpha)$.

$D\,3.11.$ $x_\alpha \subset y_\beta =_D (x_\alpha \subseteq y_\beta\ \&\ x_\alpha \neq y_\beta)$.

$D\,3.12.$ $D(x_\alpha) =_D \hat{y}_\alpha\,(\exists z_\alpha)\ (\langle z_\alpha,\ y_\alpha\rangle \in x_\alpha)$ (α nefiind de genul succesor).

$$D(x_{\beta+1}) =_D \hat{y}_\beta (\exists z_\beta)\ (\langle z_\beta,\ y_\beta\rangle \in x_{\beta+1}).$$

$D\,3.13.$ $W(x_\alpha) =_D \hat{y}_\alpha (\exists z_\alpha)\ (\langle y_\alpha,\ z_\alpha\rangle \in x_\alpha)$ (α nefiind de genul succesor).

$$W(x_{\beta+1}) =_D \hat{y}_\beta (\exists z_\beta)\ (\langle y_\beta,\ z_\beta\rangle \in x_{\beta+1}).$$

$D\,3.14.$ $x_\alpha \in \hat{y}_\beta(z_\gamma) =_D (\exists w_\beta)\,[x_\alpha \in w_\beta\ \&\ (u_\beta)\ (\langle u_\beta,\ z_\gamma\rangle \in y_\beta = u_\beta = w_\beta)]$.

Dacă y_β este o funcție, atunci $y_\beta(z_\gamma)$ este valoarea funcției ori de cîte ori valoarea argumentului este z_γ.

D 3.15. $\hat{x}_\alpha \hat{y}_\alpha F(x_\alpha, y_\alpha) = {}_D\hat{z}_\alpha (\exists x_\alpha)(\exists y_\alpha)[z_\alpha = \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \,\&\, F(x_\alpha, y_\alpha)]$.

D 3.16. $\hat{x}_\alpha \hat{y}_\alpha \hat{z}_\alpha F(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) = {}_D\hat{w}_\alpha (\exists x_\alpha)(\exists y_\alpha)(\exists z_\alpha)[w_\alpha = \langle x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\rangle \,\&\, F(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)]$.

§ 4. TEORIA ÎNTREGILOR NENEGATIVI

Este convenabil să adaptăm sistemului Σ teoria numerelor ordinale transfinite și cea a întregilor nenegativi dezvoltată de von Neumann și Bernays într-un cadru diferit (vezi, în special, Bernays, 1941, „Journal of Symbolic Logic", vol. 6). Modificările cerute sînt puține la număr. Sînt incluse unele detalii, în vederea unei prezentări complete. Demonstrațiile mai lungi sînt omise, ținînd seama de faptul că în literatura de specialitate pot fi întîlnite demonstrații similare.

Definițiile numerelor ordinale și cardinale de care vom face uz mai jos nu sînt singurele definiții posibile în cadrul sistemului. La fel de bine am fi putut adopta definițiile mai tradiționale date de către Cantor și succesorii acestuia (inclusiv Whitehead și Russell). Întrucît diferitele abordări duc, în esență, la aceeași teorie în cadrul sistemului prezent, nu avem nevoie să facem aici o comparație între ele.

D 4.1. Spunem că o mulțime x_α este tranzitivă, dacă și numai dacă $(y_\alpha)(z_\alpha)[(y_\alpha \in z_\alpha \,\&\, z_\alpha \in x_\alpha) \supset y_\alpha \in x_\alpha]$.

D 4.2. Spunem că o mulțime x_α este un număr ordinal (sau, prescurtat, ord (x_α)) dacă sînt satisfăcute următoarele condiții: (1) x_α este tranzitivă; (2) relația $\in$ este conexă în x_α, adică $(y_\alpha)(z_\alpha)[(y_\alpha \in x_\alpha \,\&\, z_\alpha \in x_\alpha) \supset (y_\alpha \in z_\alpha \vee y_\alpha = z_\alpha \vee z_\alpha \in y_\alpha)]$.

D 4.3. Literele α, β, γ, δ vor fi folosite ca variabile luînd ca valori mulțimi care sînt numere ordinale în sistem, De exemplu, α_α sau β_α sînt variabile, luînd ca valori toate mulțimile de ordinul α, care sînt numere ordinale.

În sistemul Σ se pot demonstra următoarele teoreme:

T 4.1. Dacă y_β este o mulțime nevidă de numere ordinale și $u_{\beta+1} = \hat{x}_\beta(z_\beta)(z_\beta \in y_\beta \supset x_\beta \in z_\beta)$ (adică $u_{\beta+1}$ este intersecția tuturor elementelor lui y_β), atunci $u_{\beta+1} \in y_\beta$.

Demonstrația acestei teoreme este absolut analogă celei pentru teorema 2 de la p. 7 din Bernays (1941).

D 4.4. Dacă γ_α și δ_β sînt două numere ordinale de ordinul α, respectiv β, atunci $\gamma_\alpha < \delta_\beta$, dacă și numai dacă $\gamma_\alpha \subset \delta_\beta$; $\gamma_\alpha \leqslant \delta_\beta$ dacă și numai dacă $\gamma_\alpha < \delta_\beta$ sau $\gamma_\alpha = \delta_\beta$.

T 4.2. $(\gamma_\alpha)(\delta_\beta)(\gamma_\alpha < \delta_\beta \vee \gamma_\alpha = \delta_\beta \vee \delta_\beta < \gamma_\alpha)$.

Demonstrație. Să considerăm mulțimea $\{\gamma_\alpha, \delta_\beta\}$. Conform *T* 4.1, intersecția lui γ_α și δ_β aparține mulțimii și deci este sau γ_α sau δ_β. Dacă inter-

secția este γ_α, atunci $\gamma_\alpha \leqslant \delta_\beta$; dacă intersecția este δ_β, atunci $\delta_\beta \subseteq \gamma_\alpha$. Așadar, conform *D* 4.4, teorema este demonstrată.

T 4.3. Fiecare mulțime de numere ordinale are un cel mai mic membru; cu alte cuvinte,

$$(x_\alpha)\ \{(y_\alpha)\ [y_\alpha \in x_\alpha \supset \mathrm{Ord}\ (y_\alpha)] \supset (\exists z_\alpha)\ (z_\alpha \in x_\alpha\ \&\ (y_\alpha)\ (y_\alpha \in x_\alpha \supset z_\alpha \leqslant y_\alpha)]\}.$$

Demonstrație. Conform *T* 4.1, intersecția tuturor membrilor lui x_α aparține de asemenea lui x_α. Conform *D* 4.4, ea constituie cel mai mic membru al lui x_α.

Acum putem dezvolta teoria întregilor nenegativi.

D 4.5. Succesorul x'_α al unei mulțimi x_α este mulțimea $\hat{y}_\alpha(y_\alpha \in x_\alpha \vee y_\alpha = x_\alpha)$.

D 4.6. Mulțimea x este un număr ordinal finit sau un întreg nenegativ (prescurtat, $Nn\ (x_\alpha)$), dacă și numai dacă $Ord(x_\alpha)$ și $(\beta_\alpha)\ [\beta_\alpha \leqslant x_\alpha \supset \{\beta_\alpha = 0 \vee \vee (\exists y_\alpha)\ (\beta_\alpha = y'_\alpha)\}]$.

Axiomele lui Dedekind-Peano sînt consecințe imediate: *T* 4.4. $Nn(0)$.

Demonstrație. Se verifică ușor că mulțimea vidă 0 satisface toate condițiile definițiilor *D* 4.2 și *D* 4.6.

T 4.5. $Nn(x_\alpha) \supset Nn(x'_\alpha)$.

T 4.6. $(x_\alpha)\ [Nn(x_\alpha) \supset x'_\alpha \neq 0]$.

T 4.7. $(x_\alpha)\ (y_\beta)\ \{[(Nn(x_\alpha)\ \&\ Nn(y_\beta)\ \&\ x'_\alpha = y'_\beta] \supset x_\alpha = y_\beta\}$.

T 4.8. Principiul inducției matematice.

$$(x_\alpha)\ \{[0 \in x_\alpha\ \&\ (y_\alpha)\ [([Nn(y_\alpha)\ \&\ y_\alpha \in x_\alpha] \supset y'_\alpha \in x_\alpha)] \supset [(y_\alpha)\ (Nn(y_\alpha) \supset y_\alpha \in x_\alpha)]\}$$

Demonstrație. Să presupunem că există un z_α, astfel încît $Nn(z_\alpha)$ însă $\neg z_\alpha \in x_\alpha$. Să considerăm mulțimea $w_{\alpha+1}$ a tuturor z_α de acest fel. Conform *T* 4.3, $w_{\alpha+1}$ are un cel mai mic membru w_α. Conform *D* 4.6, avem sau $w_\alpha = 0$ sau $(\exists y_\alpha)\ (w_\alpha = y'_\alpha)$. Dacă $w_\alpha = 0$, atunci $w_\alpha \in x_\alpha$, ceea ce contrazice ipoteza. Dacă $w_\alpha = y'_\alpha$ atunci, conform *D* 4.6, $Nn(y_\alpha)$. Sau $y_\alpha \in x_\alpha$ și atunci, prin ipoteză, y'_α, sau $w_\alpha \in x_\alpha$, ceea ce constituie o contradicție. Dacă $\neg y_\alpha \in x_\alpha$, atunci $y_\alpha \in w_{\alpha+1}$ și w_α nu mai este cel mai mic membru al lui $w_{\alpha+1}$, ceea ce de asemenea constituie o contradicție. Așadar, mulțimea $w_{\alpha+1}$ este vidă și oricare ar fi z_α, $Nn(z_\alpha) \supset z_\alpha \in x_\alpha$.

Se poate demonstra, de asemenea, că toate numerele întregi nenegative sînt mulțimi de ordinul 0:

T 4.9. $(x_\alpha)\ [Nn(x_\alpha) \supset (\exists y_0)(y_0 = x_\alpha)]$.

Demonstrație. Să considerăm $x_{\alpha+1} = \hat{x}_\alpha\ [(\exists y_0)\ (y_0 = x_\alpha)]$. Conform *D* 3.6. $0 \in x_{\alpha+1}$. Să admitem că $Nn(y_\alpha)$ și $y_\alpha \in x_{\alpha+1}$. Conform *A x* V și *D* 4.5, $y'_\alpha \in x_{\alpha+1}$. Așadar, conform *T* 4.8, teorema este demonstrată.

D 4.7. Fie m, n, k, i, j variabile, luînd ca valori mulțimi care sînt întregi nenegativi. Conform *T* 4.9, nu este nevoie să atașăm indici de ordin acestor variabile, deoarece toți întregii nenegativi sînt mulțimi de ordinul 0 și ca atare de ordin oarecare.

D 4.8. $1 = 0'$, $2 = 1'$, $3 = 2'$ etc. ca de obicei.

Cu ajutorul variabilelor introduse în *D* 4.7, teoremele *T* 4.5—*T* 4.8 pot fi enunțate mai succint:

T 4.5. $Nn(m')$.

T 4.6. $m' \neq 0$.

T 4.7. $m' = n' \supset m = n$.

T 4.8. Principiul inducției matematice.

$$(x_\alpha)\,[0 \in x_\alpha \,\&\, (m)(m \in x \supset m' \in x_\alpha)] \supset (n)n \in x_\alpha.$$

Justificarea funcțiilor recursive din punctul de vedere al teoriei mulțimilor a fost dată pentru prima dată de Dedekind, în 1888. Avînd în vedere scopul urmărit de noi, este indicat să introducem o generalizare a rezultatului lui Dedekind valabilă pentru diverse genuri de definiții inductive:

T 4.10. (Generalizarea teoremei lui Dedekind cu privire la definițiile inductive).[1]

Să admitem că o mulțime arbitrară M este introdusă printr-o schemă de inducție

$$(D)\ \begin{cases} \langle x_i, \ldots, z_j, 0\rangle \in M \equiv H(x_i, \ldots, z_j), \\ \langle x_i, \ldots, z_j, n'\rangle \in M \equiv G(x_i, \ldots, z_j, n, M), \end{cases}$$

unde $x_i, \ldots, z_j$ sînt k ($k \geqslant 0$) variabile arbitrare de ordine $\leqslant \alpha$, H și G sînt formule de ordine $\leqslant \alpha + 1$ (în cazul cînd M este înlocuit printr-o variabilă de mulțimi de ordin $\alpha + 1$) iar M intră în G numai în contexte de forma $\langle a_i, \ldots, a_j, b\rangle \in M$, unde b ia o valoare mai mică decît n. Atunci, putem defini o mulțime $x_{\alpha+2}$ de ordinul $\alpha + 2$ în sistemul $\Sigma_{\alpha+2}$, astfel încît rezultatele înlocuirii lui M prin $x_{\alpha+2}$ în (D) devin teoreme ale sistemului $\Sigma_{\alpha+2}$.

Demonstrația acestei teoreme se obține imediat din literatura existentă. În rezumat, pentru orice m există o mulțime $y_{\alpha+1}$ de ordinul $\alpha + 1$ care, substituită în locul lui M, în (D), face ca toate cazurile lui (D) pînă la $n = m$ să fie teoreme în $\Sigma_{\alpha+1}$. Reuniunea sau suma acestor mulțimi $y_{\alpha+1}$ pentru $m = 0, 1, 2, \ldots$ este mulțimea cerută $x_{\alpha+2}$ de ordin $\alpha + 2$.

În particular, dacă M este o funcție, putem totodată să rescriem (D) în forma

$$\begin{cases} x_i = M(\ldots, z_j, 0) \equiv x_i = H(\ldots, z_j), \\ x_i = M(\ldots, z_j, n') \equiv x_i = G(\ldots, z_i, n, M). \end{cases}$$

Din *T* 4.10 rezultă deci ca un corolar:

T 4.11. Să admitem că o funcție arbitrară f este definită printr-o schemă de inducție

$$\begin{cases} f(w_m, \ldots, z_i, 0) = h(w_m, \ldots, z_i), \\ f(w_m, \ldots, z_i, n') = g(w_m, \ldots, z_i, n, f), \end{cases}$$

care satisface condițiile corespunzătoare celor din *T* 4.10. În acest caz se poate defini o mulțime $x_{\alpha+2}$ de ordinul $\alpha + 2$ care satisface definiția lui f.

Atît în *T* 4.10, cît și în *T* 4.11, dacă α este 0, $h(w_m, \ldots z_i)$ definește o mulțime de ordin 0, iar $g(w_m, \ldots, z_i, n, c)$ definește o mulțime de ordinul 0 pentru

orice mulțime c de ordinul 0 (la fel pentru G și H) atunci este valabilă o teoremă mai tare, pe baza definiției termenilor de ordinul 0. Pe scurt, se cere numai o mulțime x_1 de ordinul 1, deoarece, pentru orice m dat, o mulțime y_0 de ordinul 0 substituită în locul lui f este suficientă deja pentru ca toate cazurile pînă la $n = m$ să devină teoreme în Σ_0. Analiza aspectelor relevante se găsește în lucrarea lui Bernays din 1941 (în special la p. 12). De aici rezultă că toate funcțiile primitiv recursive (în particular, adunarea și înmulțirea) pot fi definite în Σ_1 și, conform T 4.4—T 4.8, teoria elementară a numerelor în forma ei uzuală (de exemplu, sistemul din Hilbert-Bernays) poate fi dezvoltată în cadrul sistemului Σ_1.

În fapt, dacă facem uz de scheme, teoria elementară a numerelor poate fi obținută chiar și în Σ_0. Aceasta este posibil, deoarece orice mulțime definită x_1 de ordinul 1 este introdusă în Σ_1 printr-o propoziție definitorie $F(y_0)$ (să zicem) de ordinul 1, care nu conține variabile libere și deci conține numai variabile de ordinul 0. Întrucît în cadrul teoriei elementare a numerelor putem vorbi întotdeauna despre propoziția definitorie a unei mulțimi de numere întregi nenegative, în loc de a vorbi despre însăși această mulțime, există posibilitatea unei reformulări a teoriei elementare a numerelor în Σ_0.

Acest fapt cunoscut poate fi enunțat ca teoremă:

T 4.12. Se poate obține în sistemul Σ_0 teoria elementară a numerelor.

În particular, dacă luăm următorul caz simplu al T 4.10

$$\begin{cases} \langle x_0, 0\rangle \in M \equiv x_0 = 0, \\ \langle x_0, n'\rangle \in M \equiv (\exists y_0)\ (x_0 = \hat{z}_0(z_0 = y_0 \vee z_0 \in y_0) \,\&\, \langle y, n\rangle \in M), \end{cases}$$

putem găsi o mulțime Nn de ordinul 1, astfel încît

$$(x_\alpha)\ [Nn(x_\alpha) \equiv (\exists y_0)\ (y_0 = x_\alpha \,\&\, y_0 \in Nn)].$$

D 4.9. Spunem că mulțimea Nn de ordinul 1 astfel determinată este mulțimea întregilor nenegativi (mulțimea numerelor ordinale finite).

Poate că este interesant să notăm faptul că nu există o mulțime unică de numere ordinale care să corespundă predicatului *Ord*, deoarece, oricare ar fi α, există numere ordinale de ordin superior lui α. Pentru orice α dat putem defini însă o mulțime On_α (de ordinul $\alpha + 1$) compusă din numai toate acele mulțimi de ordinul α, care sînt numere ordinale. Astfel, conform Ax VI, putem defini On_α:

D 4.10. Pentru orice x_α, $x_\alpha \in On_\alpha$, dacă și numai dacă x_α este tranzitivă, iar $\in$ este conexă în x_α (vezi și D 4.2).

Mai putem defini funcții pe On_α prin intermediul inducției transfinite; cu alte cuvinte, putem găsi o funcție F în cadrul sistemului de așa natură, încît $F(0)$ ia o valoare prestabilită și pentru orice $\beta \leqslant \alpha$ valoarea lui $F(\beta)$ depinde, într-un mod definit, de valorile luate de F pentru numerele ordinale mai mici ca β. Metoda este similară celei uzuale (cf. Gödel, 1940, 7.5), dar trebuie acordată o atenție specială ordinului mulțimilor care intervin.

Notăm, în treacăt, că în general în orice sistem Σ_α putem defini mai multe numere ordinale decît cele care sînt $\leqslant \alpha$. Cu toate acestea, nu rezultă că există un β care poate fi definit în Σ (adică într-un sistem Σ_α), dar care nu este folosit ca indice de ordin. De fapt, dorim să folosim toate numerele ordinale definibile în Σ ca indici de ordin al mulțimilor și variabilelor. Bineînțe-

les, împotriva acestui lucru nu se poate ridica nici o obiecție. Este la fel cu a spune că pentru orice număr natural n putem defini, în sistemul cu bază n, 10 n pînă la $10\,n + 9$, că există un sistem cu bază 0 și că oricare ar fi numărul natural i definibil într-un al j-lea sistem mai există și un al i-lea sistem.

§ 5. NUMĂRABILITATEA TUTUROR MULȚIMILOR

În acest paragraf vom arăta cum următoarele două teoreme pot fi demonstrate prin aplicarea T 4.10:

T 5.1. Pentru orice α putem găsi o funcție E_α de ordinul $\alpha + 2$, astfel încît E_α enumeră toate mulțimile de ordinul α; cu alte cuvinte, $D(E_\alpha) = Nn$ și $W(E\alpha) = V_\alpha$.

T 5.2. Pentru orice α putem defini un model al lui Σ_α în $\Sigma_{\alpha+2}$ și putem formaliza o demonstrație de consistență a lui Σ_α în $\Sigma_{\alpha+2}$ (adică putem demonstra o propoziție $Con(\Sigma_\alpha)$ în $\Sigma_{\alpha+2}$).

Considerațiile făcute în cursul demonstrării ambelor teoreme sînt similare. Ne vom limita la discuția teoremei T 5.1, afirmînd totodată că T 5.2 se poate demonstra în mod analog. În legătură cu T 5.2, cititorul este invitat, de asemenea, să consulte cap. XVIII. Notăm numai faptul că, întrucît inducția matematică fără restricții stă la dispoziția noastră în sistemul Σ, dificultățile legate de formalizarea demonstrațiilor de consistență, dificultăți de natura celor discutate în cap. XVIII nu mai survin aici.

Este ușor să găsim o funcție care enumeră toate mulțimile de ordin 0 generate de $A\,x\,\mathrm{V}$. Astfel, fie $a(n)$ cel mai mic m, astfel încît $(\exists k)\,(n = m + 2^k)$, unde m este un multiplu par al lui 2^k și fie $b(n)$ acel număr k, astfel încît $n = a(n) + 2^k$. Problema noastră constă în a găsi o funcție M, astfel încît:

$$\begin{cases} \langle x_0,\ 0\rangle \in M \equiv x_0 = \hat{y}_0\,(y_0 \neq y_0), \\ \langle x_0,\ n'\rangle \in M \equiv x_0 = \hat{y}_0\,[y_0 \in M(a(n')) \vee y_0 = M(b(n'))]. \end{cases}$$

Conform T 4.10, există o funcție de ordinul 2, care satisface aceste condiții. În realitate, pe baza $A\,x\,\mathrm{V}$ putem găsi o mulțime de ordinul 1, care substituită în locul lui M în propozițiile de mai sus face din capul locului ca rezultatele să constituie teoreme ale sistemului Σ_1. Această mulțime enumeratoare va fi notată prin E_0. Funcția E_0 enumeră mulțimea V_0 a tuturor mulțimilor de ordin 0 a căror existență este cerută de axiomele sistemului Σ.

Să admitem că V_1 constă din numai toate acele mulțimi care satisfac condițiile de mai jos (vezi și T 32):

(i) $\hat{x}_0\hat{y}_0(x_0 \in y_0) \in V_1$;

(ii) dacă $x_1 \in V_1$ și $z_1 \in V_1$ atunci $\hat{x}_0(x_0 \in x_1 \,\&\, x_0 \in z_1) \in V_1$;
dacă $x_1 \in V_1$ atunci $\hat{x}_0(\neg x_0 \in x_1) \in V_1$;

(iii) dacă $x_1 \in V_1$ atunci $\hat{x}_0(\exists y_0)\,(\langle y_0,\ x_0\rangle \in x_1) \in V_1$;
dacă $x_1 \in V_1$ atunci $\hat{x}_0\hat{y}_0(y_0 \in x_1) \in V_1$;

(iv) dacă $x_1 \in V_1$ atunci $\hat{x}_0\hat{y}_0\hat{z}_0\,(<y_0, z_0, x_0> \in x_1) \in V_1$;
dacă $x_1 \in V_1$ atunci $\hat{x}_0\hat{y}_0\hat{z}_0\,(<y_0,\ x_0, z_0> \in x_1) \in V_1$.

Să încercăm să găsim o mulțime de ordinul 3 care să enumere toți membrii lui V_1 (vezi și Gödel 1940).

Să considerăm toate tripletele ordonate $\langle i, m, n\rangle$ de numere întregi pozitive, astfel încît $0 < i < 8$. Evident, este foarte ușor să ordonăm toate aceste triplete și să definim o funcție de (ordinul 1) care le enumeră:

D 4.12. $\langle i_1, m_1, n_1\rangle$ precede $\langle i_2, m_2, n_2\rangle$, dacă și numai dacă sau $i_1 < i_2$ sau $i_1 = i_2$, însă $m_1 + n_1 < m_2 + n_2$, sau $i_1 = i_2$, $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ însă $m_1 < m_2$.

D 4.13. $J(m)$ este al m-lea triplet $\langle i, m, n\rangle$ $(0 < i < 8)$ conform relației de ordonare definită prin *D* 4.12.

De asemenea, este ușor să definim funcțiile $K_1(m)$, $K_2(m)$, $K_3(m)$ (tot de ordinul 1) astfel încît:

D 4.14. $K_j(m)$ este al j-lea membru al lui $J(m)$.

În vederea enumerării tuturor mulțimilor lui V_1, vom defini acum o mulțime M, prin schema următoare:

$$\langle x_1, 1\rangle \in M \equiv x_1 = \hat{w}_0\hat{z}_0(w_0 \in z_0)$$

$$\langle x_1, n'\rangle \in M \equiv \{[K_1(n') = 1 \,\&\, x_1 = M(1)] \vee [K_1(n') = 2 \,\&\, x_1 = \hat{w}_0(w_0 \in$$

$$\in M\,[K_2(n')]\,\&\, w_0 \in M\,[K_3(n')] \vee [K_1(n') = 3 \,\&\, x_1 = \hat{w}_0\,(\neg w_0 \in M\,[K_2(n')])] \vee$$

$$\vee [K_1(n') = 4 \,\&\, x_1 = \hat{x}_0(\exists y_0)(\langle y_0, x_0\rangle \in M([K_2(n')])] \vee [K_1(n') = 5 \,\&\, x_1 =$$

$$= \hat{x}_0\hat{y}_0(y_0 \in M\,[K_2(n')])] \vee [K_1(n') = 6 \,\&\, x_1 = \hat{x}_0\hat{y}_0\hat{z}_0(\langle y_0, z_0, x_0\rangle \in$$

$$\in M\,[K_2(n')])] \vee K_1(n') = 7 \,\&\, x_1 = \hat{x}_0\hat{y}_0\hat{z}_0(\langle y_0, x_0, z_0\rangle \in M\,[K_2(n')])]\}.$$

Din *T* 4.10 urmează că există o mulțime x_3 de ordinul 3, astfel încît atunci cînd x_3 este substituită în locul lui M, în propozițiile de mai sus, rezultatele devin teoreme ale lui Σ_3. În cele ce urmează vom nota prin E_1 funcția astfel definită. Așadar, funcția enumeratoare a lui V_1 este funcția E_1 de ordinul 3. Similar, pentru orice întreg pozitiv n, putem defini o funcție enumeratoare E_n de ordinul $n + 2$, care să enumere mulțimea V_n a tuturor mulțimilor de ordinul n dată de *T* 3.3. Pentru fixarea ideilor, să admitem că am obținut funcțiile enumeratoare E_0, E_1, E_2, E_3 pentru mulțimile respective V_0, V_1, V_2, V_3 și că încercăm să definim E_4.

Conform *T* 3.3, mulțimile lui V_4 sînt determinate prin următoarele condiții:

(*A*) $\hat{x}_3\hat{z}_3(x_3 \in z_3) \in V_4$,

(*B*) Dacă $x_4 \in V_3$ atunci $x_4 \in V_4$.

(*C*) Dacă $x_4 \in V_4$ și $z_4 \in V_4$, atunci $\hat{x}_3(x_3 \in x_4 \,\&\, x_3 \in z_4) \in V_4$, ..., $\hat{x}_3\hat{y}_3\hat{z}_3$ $(\langle y_3, x_3, z_3\rangle \in x_4) \in V_4$ (9 clauze corespunzătoare cazurilor din (*C*) de la *T* 3.3).

Putem să considerăm mulțimile din V_4 ca definite printr-o schemă inductivă compusă din: (A) un număr finit de clauze dintre care fiecare în parte arată că o anumită mulțime dată de ordinul $\leqslant 4$ aparține mulțimii V_4; (B) un număr finit de clauze dintre care fiecare în parte arată că membrii unei anumite mulțimi enumerate de ordin $\leqslant 5$ aparțin lui V_4; (C) un număr finit de clauze dintre care fiecare în parte arată că o funcție de ordin $\leqslant 5$ (de

exemplu, funcția „complementara lui") aplică membri lui V_4 tot în membri ai lui V_4.

În vederea găsirii unei funcții enumeratoare pentru V_4, putem proceda similar ca în cazul lui V_4. Întrucît propozițiile de genul (C) sînt în număr finit, există un întreg pozitiv maxim, astfel încît numărul argumentelor oricărei funcții este $\leqslant n$. Să presupunem că există m_1 clauze de genul (A), m_2 clauze de ordinul (B), m_3 clauze de genul (C), iar $m = m_1 + m_2 + m_3$. Să considerăm toate $(n+1)$ — uplurile $\langle i_1, \ldots i_{n+1} \rangle$ de numere întregi pozitive cu $1 \leqslant i_1 \leqslant m$. Acestea pot fi enumerate (printr-o mulțime de ordinul 1). Toți membrii mulțimii V_4 pot fi reprezentați prin aceste $(n+1)$-upluri în modul următor: pentru orice i_1, cu $1 \leqslant i_1 \leqslant m_1$, toate $(n+1)$ -uplurile $\langle i_1, \ldots, i_{n+1}\rangle$ reprezintă o mulțime și numai una, dată printr-o clauză de genul (A); pentru orice i_1, dat, cu $m_1 + 1 \leqslant i_1 \leqslant m_1 + m_2$ și pentru orice i_{n+1} dat toate $(n+1)$-uplurile $\langle i_1, \ldots, i_{n+1}\rangle$ reprezintă al i_{n+1} -lea membru al celei de a $(i_1 - m_1)$ mulțimi date prin clauzele de genul (B); pentru orice i_1 dat, $m_1 + m_2 + 1 \leqslant i_1 \leqslant m$, toate $(n+1)$ -uplurile $\langle i_1, \ldots, i_{n+1}\rangle$ reprezintă valoarea celei de-a $(i_1 - m_1 - m_2)$ — a funcții, unde valorile argumentelor sînt reprezentate respectiv prin al i_2-lea, ..., i_{n+1}-lea $(n+1)$ -upluri. (Dacă funcția are mai puțin de n locuri de argumente, să zicem j locuri, vom folosi exact numerele $i_2, \ldots, i_{j+1}$). Corespondența dintre $(n+1)$-upluri și membrii lui V_4 poate fi reprezentată printr-o mulțime de ordinul 6. Este, de asemenea, posibil să enumerăm toate $(n+1)$ printr-o mulțime de ordinul 1. Prin urmare, V_4 poate fi enumerată printr-o mulțime de ordinul 6.

O comparație cu definiția lui E_1 ar lămuri modul în care V_4 și, oricare ar fi numărul pozitiv întreg n, V_n pot fi enumerate printr-o funcție E de ordinul $n+2$.

Problema enumerării mulțimii V_ω este oarecum deosebită, deoarece o teoremă corespunzătoare lui T 3.3 pentru propoziții p de ordinul ω ar necesita o infinitate de clauze care să corespundă cazurilor (A) — (C) de la T 3.3. Aplicarea metodei de enumerare de mai sus ar cere un fel de alternare a unei infinități de clauze.

Amintim din nou faptul că în cadrul modelului nostru intuitiv, V_ω conține toate mulțimile și numai acele mulțimi care aparțin unora dintre mulțimile V_0, V_1, V_2, ...; cu alte cuvinte, V_ω este exact reuniunea mulțimilor V_i, pentru toți întregii nenegativi i.

Pentru găsirea unei funcții E_ω care enumeră V_ω vom introduce mai întîi o enumerare a mulțimilor V_0, V_1, V_2, ... prin următoarea condiție:

$$\begin{cases} \langle x_\omega,\ 0\rangle \in M \equiv x_\omega = V_0, \\ \langle x_\omega,\ n'\rangle \in M \equiv x_\omega = \hat{y}_\omega[y_\omega \subseteq M(n)]. \end{cases}$$

Conform T 4.10, există o funcție de ordinul $\omega + 2$ care satisface aceste condiții. Dat fiind că pentru orice m dat o mulțime de ordin finit este deja suficientă pentru satisfacerea propozițiilor pentru toate cazurile pînă la m, putem găsi o funcție de ordinul $\omega + 1$ care, substituită în locul lui M în aceste propoziții, face ca rezultatele substituției să fie teoreme ale sistemului $\Sigma_{\omega+1}$. Această funcție enumeratoare va fi notată prin U_ω. Astfel, pentru

orice n, $U_\omega(n) = V_n$. Aceasta ne permite, într-un sens, să facem o inducție după indicii de ordin și să reducem o infinitate de clauze la un număr finit.

Totodată, putem defini și o funcție T_ω de ordinul $\omega + 2$ astfel încît, pentru orice n, să avem $T_\omega(n) = E_n$. În esență, aceasta depinde de faptul că, oricare ar fi n, dacă se dă E_n, putem construi E_{n+1} din E_n, cu ajutorul lui U_ω, printr-un număr finit de clauze. (În fapt, opt clauze). Astfel, T este definită prin aceste condiții:

(A) $\langle x_\omega, 0\rangle \in T_\omega = x_\omega = E_0$.

(B) $\langle x_\omega, n'\rangle\ T_\omega$, dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele opt condiții:

(i) $(m)\ \{K_1(m) = 1 \supset x_\omega(m) = \hat{y}_\omega \hat{z}_\omega [y_\omega \in U_\omega(n)\ \&\ z_\omega \in U_\omega(n)\ \&\ y_\omega \in \in z_\omega]\}$;

(ii) $(m)\ \{K_1(m) = 2 \supset x_\omega(m) = [T_\omega(n)]\,[K_2(m)]\}$;

(iii) $(m)\ \{K_1(m) = 3 \supset x_\omega(m) = \hat{y}_\omega(y_\omega \in U_\omega(n)\ \&\ y_\omega \in [T_\omega(n)]\,[K_2(m)]\ \&\ \&\ y_\omega \in [T_\omega(n)]\,[K_3(m)]\}$;

. . . . . .

(viii) $(m)\ \{K_1(m) = 8 \supset x_\omega(m) = \hat{y}_\omega [y_\omega \in U_\omega(n)\ \&\ (\exists z_\omega)\ (z \in U_\omega [f(n, m)]\ \&\ \&\ \langle z_\omega, y_\omega\rangle \in [T(n)]\,[K_2(m)\,])]\}$.

În clauza (viii), funcția f este astfel, încît $f(n, m)$ este restul împărțirii lui $K_3(m)$ prin $n + 1$. Evident, f poate fi definită printr-o mulțime de ordinul 1, iar (viii) acoperă toate cazurile $\hat{z}_n(\exists w_i)\ (\langle w_i, z_n\rangle \in x_{n+1})$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n$.

Din T 4.10 rezultă că condițiile care definesc T_ω sînt satisfăcute de o funcție de ordinul $\omega + 2$ în sistemul $\Sigma_{\omega+2}$.

Dîndu-se T_ω, enumerarea E_ω a mulțimii V_ω poate fi definită într-un mod uzual:

$$\begin{tikzcd}
E_0: & a_{01}, \arrow[r] & a_{02}, \arrow[dl] & a_{03} \arrow[r] & a_{04}, \ldots \arrow[dl] \\
E_1: & a_{11}, \arrow[d] & a_{12}, \arrow[ur] & a_{13}, \arrow[dl] & a_{14}, \ldots \\
E_2: & a_{21}, \arrow[ur] & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, \ldots
\end{tikzcd}$$

Este ușor să definim o funcție $g(m, n)$, astfel încît $a_{m,n}$ să fie a $g(m, n)$-a în enumerarea de mai sus, precum și două funcții g_1 și g_2, astfel încît $g_1(k)$ și $g_2(k)$ sînt m și respectiv n, dacă $g(m, n)$ este k. Făcînd uz de g_1 și g_2 putem defini E_ω:

$$E_\omega(n) = Eg_1(n)\ [g_2(n)] = [T_\omega(g_1(n))]\,[g_2(n)].$$

T_ω fiind de ordinul $\omega + 2$, E_ω este de asemenea de ordinul $\omega + 2$.

În lumina celor de mai sus este plauzibil că, în general, V_α poate fi enumerată printr-o mulțime E_α de ordinul $\alpha + 2$ și că T 5.1 și T 5.2 sînt adevărate.

În fapt, dacă $\alpha = \omega + n$ și $\alpha = \omega \cdot n$, nu este greu să găsim E prin considerații foarte asemănătoare celor de mai sus. Chestiunea se complică atunci cînd ajungem la numere ordinale mai înalte. Nu vom discuta aceste complicații, ci vom admite că T 5.1 și T 5.2 au fost stabilite în deplina lor generalitate.

§ 6. CONSECINȚE ALE ENUMERĂRILOR

Fiind date funcțiile enumeratoare E_α (de ordinul $\alpha + 2$), putem formula acum axiomele de limitare:

Ax VIII. Oricare ar fi α, $(x_\alpha)\,(\exists m)\ [E_\alpha(m) = x_\alpha]$.

Axiomele alegerii rezultă drept consecințe imediate din numerabilitatea tuturor mulțimilor:

C I. Pentru fiecare mulțime x_α de mulțimi nevide y_α, există o mulțime $z_{\alpha+2}$ care conține un membru și numai unul din orice mulțime Y_α în x_α. Mai exact, dacă α este $\beta + 1$ pentru unii β, atunci există deja o asemenea mulțime $z_{\alpha+1}$; dacă α este $\beta + 2$ pentru unii β, atunci există deja o asemenea mulțime z_α.

De exemplu, fie $x_{\beta+2}$ o mulțime de mulțimi nevide $y_{\beta+1}$ de ordinul $\beta + 1$. Toate mulțimile de ordinul β pot fi enumerate prin E_β. Fie $\mu y_{\beta+1}$ primul element al lui $y_{\beta+1}$ în cadrul enumerării. În acest caz, mulțimea căutată $z_{\beta+2}$ este tocmai mulțimea $\hat{w}_\beta(\exists y_{\beta+1})\ (y_{\beta+1} \in x_{\beta+2}\ \&\ w_\beta = \mu y_{\beta+1})$.

Demonstrarea C I în mod formal în Σ impune folosirea Ax VIII și a inducției matematice. Detaliile sînt omise.

În mod similar, în calitate de consecințe, mai decurg și forme ale ipotezei continuului. Astfel, dat fiind că V_α este numerabil, oricare ar fi α, rezultă că și mulțimea On_α a tuturor numerelor ordinale de ordinul α, ca submulțime a lui V_α, este la rîndul ei numerabilă. Pe baza funcției enumeratoare E_α (de ordinul $\alpha + 2$) se poate defini cu ușurință o funcție enumeratoare E'_α (de asemenea de ordinul $\alpha + 2$) pentru On_α.

C II. Oricare ar fi α, există o corespondență biunivocă (în $\Sigma_{\alpha+2}$) între toate mulțimile de ordinul α și toate numerele ordinale de ordinul α.

În termenii lui E_α și E'_α, corespondența este dată cu ușurință de

$$\langle x_\alpha,\ y_\alpha \rangle \in C \equiv (\exists m)\ [x_\alpha = E_\alpha(m)\ \&\ y_\alpha = E'_\alpha(m)].$$

Conform teoremei lui Gödel, pentru orice sistem Σ_α există o propoziție aritmetică a sistemului Σ_α care nu este decidabilă în Σ_α. Conform T 5.2, $Con(\Sigma_\alpha)$ este demonstrabilă în $\Sigma_{\alpha+2}$. În consecință, conform demonstrației celei de a doua teoreme a lui Gödel, propoziția indecidabilă a lui Σ_α din prima teoremă a lui Gödel este și ea decidabilă în $\Sigma_{\alpha+2}$. Rezultă că propoziția indecidabilă a lui Gödel dintr-un sistem oarecare Σ_α este decidabilă în întregul sistem Σ.

De aici nu urmează, desigur, că sistemul Σ nu ar conține propoziții indecidabile. După cum se pare, această chestiune rămîne deschisă.

Cu toate acestea, sistemul Σ pare să dea un fel de replică la teoremele lui Gödel. Printre altele, T 5.2 arată clar că a doua teoremă a lui Gödel nu implică faptul că o demonstrație de consistență trebuie să constituie un raționament mai puțin sigur din punct de vedere intuitiv decît metodele folosite în sistemul despre care s-a demonstrat astfel că este consistent. Oricare ar fi α, $\Sigma_{\alpha+2}$ este, din punct de vedere intuitiv, tot atît de sigur ca Σ_α.

Problema demonstrării consistenței unui sistem dat este cu totul deosebită de cea a formalizării unor demonstrații date de consistență. Mai important este probabil să fie convingător. Există un consens surprinzător de larg asupra naturii sistemelor admise ca fiind consistente, precum și asupra naturii celor considerate ca neconsistente. Mai greu este poate să exprimăm și să analizăm motivele acestui consens.

Prezența lui Ax VIII ridică problema dacă orice sistem Σ_α este categoric relativ la teoria întregilor nenegativi conținută în el, adică problema dacă orice interpretare dată a teoriei întregilor nenegativi din Σ_α determină o interpretare unică a însuși acestui sistem. Într-un sens, răspunsul este evident afirmativ, deoarece orice relație între două mulțimi poate fi considerată drept o relație între numerele întregi corespunzătoare din cadrul enumerărilor, iar relația este stabilită dacă știm totul despre întregii pozitivi.

Pe de altă parte, dacă luăm teoria întregilor ca fiind alcătuită din absolut aceleași teoreme ale lui Σ_α care corespund teoremelor teoriei elementare obișnuite a întregilor nenegativi, nu este de loc ușor să dăm un răspuns.

Ideea unor axiome de limitare este destul de naturală și nu este nouă. Fiind dat un sistem de teoria mulțimilor, există axiome care afirmă categoric că cutare și cutare mulțimi există, și axiome care afirmă că cutare și cutare mulțimi există, cu condiția să existe mulțimile cutare și cutare. O axiomă de limitare încearcă să afirme că admitem acele mulțimi a căror existență este realmente cerută de axiomele de existență și nu admitem nici o altă mulțime.

De exemplu, Fraenkel (1922) propune să adăugăm sistemului lui Zermelo axioma următoare: nu există alte mulțimi în afara celor a căror existență este cerută de axiomele enunțate explicit. O asemenea axiomă este nesatisfăcătoare, deoarece nu este formulată efectiv prin simboluri ale sistemului. Se pune, de aceea, problema traducerii ei într-o formulă exprimabilă în respectiva teorie a mulțimilor (în cazul concret, teoria lui Zermelo). Dacă sistemul conține o infinitate de axiome de existență (așa cum este cazul teoriei lui Zermelo) nu cunoaștem dacă o asemenea formulare este întotdeauna posibilă. Chiar și în cazurile cînd formularea este posibilă, nu este simplu să ajungem la ea.

O a doua dificultate, consemnată pentru prima dată de către von Neumann (1925), privește chestiunea categoricității. Să luăm iarăși teoria mulțimilor a lui Zermelo și să admitem că s-a formulat o axiomă care afirmă că există numai mulțimile a căror existență este cerută. Se poate întîmpla ca sistemul să aibă modele diferite și intersectate, fără să existe însă modelul cel mai mic. În speță, intersecția tuturor modelelor sistemului nu este neapărat un model al sistemului. În această situație se pot întîmpla două lucruri cel puțin.

Se poate întîmpla ca axioma de limitare presupusă să nu se soldeze cu rezultatul urmărit și să ducă la contradicții. Acesta ar fi cazul dacă, de exemplu, dăm o restricție precisă care, ca să spunem așa, exclude toate mulțimile care nu au denumiri în sistem, în timp ce, totuși, fiecare model apelează la mulțimi care nu sînt denumite în sistem. Cu alte cuvinte, uneori o axiomă postulează, în mod explicit, numai cutare și cutare mulțimi, în timp ce pentru obținerea unui model pentru axiomă avem nevoie de mai multe mulțimi „pentru umplerea lacunelor", din cauza prezenței unor definiții impredicative sau referiri circulare.

Sau se mai poate întîmpla ca axioma să fie formulată mult prea larg; în acest caz nu ajungem la contradicții, însă interpretarea axiomei devine ambiguă,

deoarece nu mai este limpede care sînt mulțimile a căror existență este cerută. Să luăm, de exemplu, două modele intersectate, care să nu conțină o parte comună, constituind la rîndul ei un model; există mulțimi care figurează într-un model, dar nu în celălalt; sînt oare acestea mulțimi a căror existență este cerută în mod strict de către axiome, sau nu sînt?

Aceste dificultăți sînt strîns legate de prezența mulțimilor și definițiilor impredicative în cadrul sistemelor standard de teoria mulțimilor. Aceste obstacole nu se ridică în calea teoriei noastre Σ, deoarece nu admitem nici o mulțime impredicativă, nici o mulțime nenumărabilă.

Într-un anumit sens, propoziția „$V = L$" la Gödel, 1940, poate fi considerată ca axiomă de limitare într-o teorie standard a mulțimilor cu mulțimi impredicative. Gödel realizează acest lucru prin folosirea, pe scară largă, a numerelor ordinale transfinite.

§ 7. TEORIA NUMERELOR REALE

Pe baza teoriei întregilor nenegativi este foarte ușor să dezvoltăm (încă în Σ_1) teoria uzuală a numerelor raționale, aplicînd, de exemplu, metoda lui Bernays 1942 (luînd triplete de fracții în loc de numere raționale). Astfel, fracțiile pot fi identificate cu anumite mulțimi de ordin 0, după care se definește o mulțime Fr de ordinul 1, care conține toate fracțiile și numai fracții și se introduc variabile r, s, t (de ordinul 0) definite pe mulțimea fracțiilor.

Numerele reale pot fi definite ca de obicei:

D 7.1. Pentru orice α, x_α este un număr real (de ordinul α), sau, mai succint, $Rn(x_\alpha)$, dacă și numai dacă: (1) $x_\alpha \subset Fr$ și x_α nu este vidă;

$$(2)\ (s)(t)\ [(t \in x_\alpha\ \&\ s \leqslant t) \supset s \in x_\alpha];\quad (3)\ (s)\ [s \in x_\alpha \supset (\exists t)\ (t > s\ \&\ t \in x_\alpha)]$$

Este evident că, fiind finită, nici o mulțime de ordinul 0 nu poate fi număr real. Totuși, pentru orice $\alpha > 0$, există numere reale de ordinul α.

D 7.2. Pentru orice $\alpha(\alpha > 0)$ există o mulțime Rn_α de ordinul $\alpha + 1$, care este compusă din toate numerele reale de ordinul α și numai din acestea.

Din *D* 7.1 rezultă că, pentru oricare două numere reale x_α și y_β avem sau

$$x_\alpha \subset y_\beta \text{ sau } y_\beta \subset x_\alpha \text{ sau } x_\alpha = y_\beta.$$

D 7.3. Spunem că un număr real x_α este mai mic ca y_β, dacă și numai dacă $x_\alpha \subset y_\beta$. O mulțime de numere reale este mărginită superior (respectiv inferior), dacă există un număr real, care nu este mai mic (respectiv mai mare) decît vreun membru al mulțimii.

Teorema celei mai mici margini superioare rezultă imediat.

T 7.1. (Cea mai mică margine superioară). Orice mulțime de numere reale mărginită superior are o cea mai mică margine superioară; mai exact, pentru orice $z_{\beta+1}$, dacă $z_{\beta+1} \subset Rn_\beta$ și $(\exists y_\beta)\ [y_\beta \in Rn_\beta\ \&\ (x_\beta)\ (x_\beta \in z_{\beta+1} \supset x_\beta \leqslant y_\beta)$, atunci există un număr real $w_{\beta+1}$ care este cea mai mică margine superioară a lui $z_{\beta+1}$; dacă α este un număr ordinal infinit ce nu e de genul succesor (un număr limită) și z_α este o mulțime de numere reale, atunci există o margine superioară minimă de ordinul α.

Demonstrație. Fiind dat $z_{\beta+1}$, fie $w_{\beta+1} = \hat{t}\ (\exists y_\beta)\ (y_\beta \in z_{\beta+1}\ \&\ t \in y_\beta)$. Atunci $w_{\beta+1}$, după cum putem constata cu ușurință, este un număr real și

totodată cea mai mică margine superioară a lui $z_{\beta+1}$. În cazul cînd α este un număr limită, cea mai mică margine superioară $\hat{t}(\exists y_\alpha)\ (y_\alpha \in z_\alpha\ \&\ t \in y_\alpha)$ a lui z_α este prin definiție de ordin $\alpha + 1$. Cu toate acestea, conform modelului intuitiv, există cel puțin un w_β, $\beta < \alpha$ și $z_\alpha = w_\beta$. De aceea, cea mai mică margine superioară este de ordinul α (și de fapt este $< \alpha$, dacă dorim). Aceste aserțiuni pot fi demonstrate în sistem pe baza axiomei de limitare. Un caz apropiat va fi discutat ceva mai tîrziu.

D 7.4. O mulțime x_α este finită sau, mai succint, $Fin(x_\alpha)$, dacă și numai dacă există o mulțime y_α de ordinul α, astfel încît $(\exists n)\ (D(y_\alpha) = n)$ (trebuie observat că n coincide cu mulțimea tuturor întregilor nenegativi $< n$) și $W(y_\alpha) = x_\alpha$ și y_α este biunivocă. Mulțimea x_α este infinită dacă nu este finită.

Pentru justificarea acestei definiții, vom observa că dacă α este finită și conține membrii $y^0, \ldots, y^k$, atunci mulțimea $\hat{w}_\alpha(w_\alpha = \langle y^0 0\rangle \vee \ldots \vee w_\alpha = \langle y^k, k\rangle)$ este o mulțime de ordin $< \alpha$, deoarece $y^0, \ldots, y^k$ sînt toate de ordin $< \alpha$ (Cazul excepțional cînd $\alpha = 0$ poate fi tratat fără dificultăți).

D 7.5. O fracție t este mai mică decît un număr real x, dacă și numai dacă $t \in x_\alpha$; t este mai mare decît x_α, dacă și numai dacă $(\exists s)\ (s < t\ \&\ \neg s \in x_\alpha)$. Un număr real x_α este un punct limită al mulțimii de numere reale y_α, dacă și numai dacă, pentru orice $t < x_\alpha$ și $s > x_\alpha$ există o infinitate de numere reale y_α, $t < y_\alpha$ și $s > y_\alpha$.

T 7.2. Teorema punctului limită (Bolzano-Weierstrass). Fiind dată o mulțime infinită și mărginită de numere reale (adică o mulțime mărginită superior și mărginită inferior), ea are un punct limită; mai exact, dacă x_α este o mulțime infinită dată de numere reale care este mărginită, atunci există un număr real $y_{\alpha+1}$, care este un punct limită al x_α.

Demonstrație. Vom defini

$$y_{\alpha+1} = \hat{t}\ (\exists w_\alpha)\ (\exists z_\alpha)\ [\mathrm{Fin}\ (z_\alpha)\ \&\ z_\alpha = \hat{u}_\alpha(u_\alpha \in x_\alpha\ \&\ u_\alpha < w_\alpha)\ \&\ t \in w_\alpha].$$

Putem demonstra printr-un raționament uzual că $y_{\alpha+1}$ este un număr real și un punct limită al lui x_α.

D 7.6. Spunem că o mulțime x_α de numere reale este un interval închis sau deschis, dacă există două numere reale $y_{\alpha-1}$ și $z_{\alpha-1}$ (sau y_α și z_α dacă α este un număr ordinal limită), $x_\alpha = \hat{w}_{\alpha-1}(w_{\alpha-1} \in Rn_{\alpha-1} \& y_{\alpha-1} \leqslant w_{\alpha-1}\ \&\ w_{\alpha-1} \leqslant z_{\alpha-1})$ sau $x_\alpha = \hat{w}_{\alpha-1}(w_{\alpha-1}(w_{\alpha-1} \in Rn_{\alpha-1}\ \&\ y_\alpha < w_{\alpha-1}\ \&\ w_{\alpha-1} < z_{\alpha-1})$. Spunem că punctele $y_{\alpha-1}$ și $z_{\alpha-1}$ sînt extremitățile intervalului.

D 7.7. O mulțime y_β de intervale acoperă o mulțime x_α de numere reale, dacă fiecare membru al lui x_α aparține cel puțin unuia dintre intervalele din y_β.

T 7.3. Teorema de acoperire (Heine-Borel), Dacă x^α este o mulțime de intervale deschise și x_α acoperă un interval închis y_β, atunci există o submulțime finită z_α a lui x_α care acoperă de asemenea y_β.

Demonstrație. Să presupunem $\alpha = \gamma + 2$ și $\beta = \delta + 1$. Extremitatea stîngă a lui y_β trebuie să se afle într-un interval $z_{\gamma+1}$ în x_α, avînd extremitățile z_γ și w_γ. Pentru a ne fixa atenția să menținem $z_{\gamma+1}$ și z_γ fixate. Să considerăm acum următoarea mulțime de corespondențe biunivoce între submulțimile lui x_α și submulțimile lui Nn: $M_{\alpha+1} = \hat{w}_\alpha[(w_\alpha$ este o corespondență biunivocă) $\& D(w_\alpha) \subseteq Nn\ \&\ W(w_\alpha) \subseteq x_\alpha\ \&\ \hat{w}_\alpha(1) = z_{\gamma+1}\ \&\ (n)\ (f[w_\alpha(n)] \in w_\alpha(n'))]$, unde

$f[w_\alpha(n)]$ este o funcție ușor definibilă ce ne dă punctul de extremitate dreaptă a lui $w_\alpha\,(n)$.

Sînt două posibilități. Sau există un membru w_α a lui $M_{\alpha+1}$, astfel încît $Fin(w_\alpha)$ și extremitatea dreaptă a lui y_β aparțin unui membru al domeniului lui w_α, și atunci teorema este demonstrată.

Sau, pentru orice w_α a lui $M_{\alpha+1}$, dacă $Fin(w_\alpha)$, atunci nu există nici un m, astfel încît $w_\alpha(m)$ să includă extremitatea dreaptă a lui y_β. Trebuie să demonstrăm că aceasta este imposibil. Să considerăm mulțimea $K_{\alpha+1} = \hat{x}_\delta\,\{\hat{x}_\delta \in y_\beta\,\&\,\&(\exists w_\alpha)\,(\exists n)\,[w_\alpha \in M_{\alpha+1}\,\&\,x_\delta \in w_\alpha(n)]\}$. Se poate demonstra că $K_{\alpha+1} = y_\beta$. Într-adevăr, în caz contrar, există membri y_δ ai lui y_β, care nu aparțin la $K_{\alpha+1}$. Sau există cea mai mică asemenea mulțime y_δ, sau există un punct limită y_δ a unor asemenea puncte. Nici unul dintre aceste două cazuri nu este posibil, deoarece y_δ, prin ipoteză, aparține unui interval $u_{\gamma+1}$ din x_α și de aceea extremitatea stîngă a lui $u_{\gamma+1}$ aparține la $K_{\alpha+1}$, însă extremitatea dreaptă nu aparține. Dar aceasta este imposibil, deoarece $u_{\gamma+1}$ poate fi luat ca fiind intervalul următor.

Așadar, $(\exists w_\alpha)\,(\exists n)\,[w_\alpha \in M_{\alpha+1}$ și extremitatea dreaptă a lui y_β aparține la $w_\alpha(n)]$. Cu alte cuvinte, există o submulțime finită w_α a lui x_α, care acoperă intervalul y_β.

În cazul cînd $\alpha \neq \gamma + 2$ sau $\beta \neq \delta + 1$, raționăm în mod similar.

Trebuie observat că posibilitatea deducerii teoremelor T7.1, T7.2, T7.3 nu este surprinzătoare, deoarece atunci cînd este necesar nu am ezitat să facem uz de numere reale de ordine superioare.

§ 8. MODELE INTUITIVE

Transparența sistemelor Σ_α reiese cel mai bine în urma examinării mai exacte a construcției pas cu pas a propozițiilor și termenilor. Într-adevăr, sistemele Σ_α sînt construite într-un mod care permite interpretarea variabilelor cu variabile definite pe domeniul expresiilor formale. Ca urmare, putem realiza o bineordonare a expresiilor și, în mod special, a propozițiilor sistemului Σ_α astfel încît să obținem modele acceptabile intuitiv pentru sistemele de axiome. Natura sistemelor Σ_α, ca și justificarea axiomelor (inclusiv a axiomelor de limitare), poate fi sesizată mai ușor, dacă înțelegem modelele intuitive pentru sistemele Σ_α.

Pentru facilitarea considerațiilor care urmează, ne vom mărgini la propozițiile lui Σ în care nu apar variabile libere. Aceasta nu afectează generalitatea tratării deoarece, de exemplu, $F(x_\alpha)$ și $(x_\alpha)\,F(x_\alpha)$ sînt echivalente, iar după aceea putem da lui $F(x_\alpha)$ aceeași valoare de adevăr ca lui $(x_\alpha)\,F(x_\alpha)$.

*D*8.1. $Aj(a,\,b) = D\hat{x}_0\,(x_0 \in a \vee x_0 = b)$.

Ca și înainte, vom numi termeni de bază toți termenii din Σ_α care conțin numai 0 (mulțimea vidă) și Aj sau se obțin din aceștia substituind în locul constantelor variabile libere de ordinul 0. În general, cînd b este un termen de bază constant, vom evalua, în mod direct, $a \in b$ și nu eliminînd mai întîi $\in$ conform Ax IV. Aceasta constituie o deosebire importantă între termenii de bază și toți ceilalți termeni.

*D*8.2. Toate propozițiile unui sistem arbitrar Σ_α care nu conțin variabile libere pot fi bineordonate după următoarele principii:

Să admitem o enumerare a tuturor acestor propoziții în așa fel, încît orice propoziție să fie pusă în corespondență cu un număr întreg pozitiv. Fie p o propoziție arbitrară din Σ_α care este astfel pusă în corespondență cu n_0. Fie n_1 numărul intrărilor în p (numărînd toate repetițiile) ale simbolurilor primitive, fie n_2 numărul intrărilor (numărînd toate repetițiile) ale simbolurilor în p în cadrul termenilor de bază, fie n_3 numărul intrărilor (numărînd toate repetițiile) ale variabilelor de ordin 0 în p, dar nu înăuntrul termenilor de bază, fie $n_{2k+2} (k = 1, 2, \ldots)$ numărul intrărilor în p (numărînd toate repetițiile) ale variabilelor de ordin k, fie n_{2k+3} numărul intrărilor în p (numărînd toate repetițiile) ale variabilelor de ordin k într-un termen care intră într-un context de forma $b \in c$, unde ordinul lui b este $\geqslant c$. În mod similar, pentru orice număr infinit $\beta + n$ (n fiind un întreg nenegativ), fie $n_{\beta+2n}$ numărul intrărilor în p (numărînd toate repetițiile) ale variabilelor de ordinul $\beta+n$ și fie $n_{\beta+2n+1}$ numărul acelora dintr-un termen b, care intră într-un context de forma $b \in c$, unde ordinul lui b este $\geqslant c$. Întrucît p este de lungime finită, nu pot apare decît un număr finit de genuri de variabile. De aceea, fiecărui p i se asociază un număr finit de întregi pozitivi n_γ. Dacă, de exemplu, numerele sînt $n_{\alpha_1}, \ldots, n_{\alpha_k}, n_1, n_0 (\alpha_1 > \ldots > \alpha_k > 1 > 0)$, atunci îi asociem lui p numărul ordinal $\omega^{\alpha_1} \cdot n_{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha} k \cdot n_{\alpha_k} + \ldots + \omega \cdot n_1 + n_0$. Astfel, orice propoziție capătă un număr ordinal și niciodată două propoziții nu capătă unul și același număr ordinal. Spunem că o propoziție p este anterioară lui q, dacă și numai dacă numărul ordinal al lui p este mai mic ca numărul ordinal al lui q.

Fiind dată bineordonarea din *D*8.2 a propozițiilor sistemului Σ_α, putem defini acum un model al lui Σ_α în felul următor: o grupă de propoziții cu numere ordinale mici sînt numite în primul rînd adevărate sau false conform interpretării intuitive, apoi adevărul și falsitatea propozițiilor mai complexe sînt determinate complet prin relația lor față de propoziții anterioare și de valorile de adevăr ale acestora din urmă.

Înainte de a furniza detalii, observăm următoarele caracteristici ale bineordonării:

*T*8.1. Conform cu bineordonarea dată în *D*8.2 : (1) p și q preced ambele $p \vee q$; (2) p precede $\neg p$; (3) dacă b este un termen de ordinul β sau mai mic, $F(b)$ precede $(\exists x_\beta)\ F(x_\beta)$; (4) dacă b este un termen de ordinul $\beta (\beta > 0)$ sau mai mic, $F(b)$ precede $b \in \hat{x}_\beta F(x_\beta)$; (5) dacă a este de ordin mai mic decît b, iar b nu are un ordin superior lui c, atunci $a \in b$ vine înainte de $c \in b$; (6) dacă b este un termen de bază constant, $F(b)$ precede $(\exists x_0)\ F(x_0)$.

Modelul sau definiția adevărului pentru Σ_α se poate defini după cum urmează:

Să enumerăm toți termenii de bază constanți ai lui Σ_α, astfel încît termenul b să vină înaintea unui termen c, atunci cînd b este parte a lui c. Fie a, b, c, d termeni constanți oarecari de acest gen:

*D*8.3. (1) Pentru fiecare c, $c \in 0$ este fals; (2) pentru orice c și orice d, $d \in c$ este fals, dacă c vine înaintea lui d; (3) dacă adevărul și falsitatea tuturor propozițiilor de forma $b \in d$ — unde b și d preced $A_j\ (a, c)$ — sînt decise, atunci $b \in A_j\ (a, c)$ este adevărat, dacă sau $b \in a$ este adevărat sau, pentru orice d înaintea lui b, $d \in c$ este adevărat, atunci și numai atunci cînd $d \in b$ este adevărat; $b \in A_j(a, c)$ este falsă, atunci cînd ea nu este adevărată.

Este clar că această definiție nu face decît să precizeze ideea noastră intuitivă despre relațiile între mulțimile finite construite pornind de la 0. De exemplu, $0 \in \{0\}$, dar nu $0 \in \{\{\{0\}\}\}$ etc.

Spre a completa descrierea pe care o dăm modelului pentru Σ_α mai adăugăm numai:

*D*8.4. (1) Pentru orice propoziție p, $\neg p$ este adevărată sau falsă, după cum p este adevărată sau falsă; (2) $p \vee q$ este adevărat sau fals, dacă cel puțin una dintre p și q este adevărată sau, respectiv, falsă; (3) $(\exists x_\beta)\, F(x_\beta)$ este adevărat sau fals, după cum există sau nu un termen b de ordinul β sau mai mic, astfel încît $F(b)$ să fie adevărat; (4) $b \in \hat{y}_\beta F(y_\beta)$, — unde b este de ordinul β, iar $\hat{y}_\beta F(y_\beta)$ nu este termen de bază — este fals sau adevărat după cum $F(b)$ este sau respectiv nu este adevărat; (5) dacă ordinul lui c nu este superior celui al lui b, atunci $b \in c$ este adevărat sau fals, după cum există sau nu un termen a de ordin inferior celui al lui b, astfel încît $a \in c$ este adevărat și, oricare ar fi termenul d de ordin inferior celui al lui b, $d \in b$ este adevărat, atunci și numai atunci cînd $d \in a$ este adevărat; (6) $(\exists x_0)\, F(x_0)$ este adevărat sau fals, după cum există sau nu un termen de bază b, astfel încît $F(b)$ să fie adevărat.

Este foarte ușor de văzut, pe baza acestor descrieri, că orice propoziție p dintr-un sistem Σ_α este sau adevărată, sau falsă, însă nu poate fi și una și alta. Prin urmare, dacă b și c sînt amîndoi termeni de bază constanți, atunci, conform *D*8.3, $b \in c$ este adevărat sau fals, dar nu ambele. Dacă p este o propoziție mai complexă, stabilim prin inducție, conform *T*8.1 și *D*8.4, că p este și de această dată sau adevărată, sau falsă, însă nu amîndouă la un loc.

Următoarea problemă constă în verificarea faptului că toate teoremele oricărui sistem Σ_α sînt adevărate. În acest scop este suficient, așa cum se obișnuiește, să arătăm că toate axiomele sînt adevărate, iar regulile de inferență duc de la propoziții adevărate la propoziții adevărate. Problema este similară celei tratate de Fitch (1938).

Evident, toate regulile de inferență *Ri*1—*Ri*8 care privesc numai funcțiile de adevăr și cuantificarea duc de la propoziții adevărate la propoziții adevărate, prin intermediul clauzelor (1)—(3) din *D*8.4. În mod similar, legea terțului exclus *Ax*1 este adevărată.

Conform (1)—(3) din *D*8.4, *Ax*III este adevărată.

Conform (1)—(4) din *D*8.4 (în special (4), desigur), *Ax*IV este adevărată.

*Ax*VIII este adevărată, deoarece modelul este, ca să spunem așa, croit pe măsura acestor axiome. Astfel, la nivelul inferior avem numai mulțimile construite pornind de la 0 prin aplicări repetate ale *Aj*. La nivele (ordine) superioare avem numai mulțimi desemnate de termenii de mulțimi specificați prin descrierea formalismului. O comparație cu paragraful următor poate să arate și mai clar că *Ax* VIII este adevărată în cadrul modelului. Din observațiile cu privire la *Ax* V în § 7 rezultă aproape imediat că *Ax* V este adevărată.

Ax VII este adevărată, ținînd seamă de (5) din *D*8.4.

Ax VI este adevărată, întrucît modelul exclude mulțimile suspecte.

Cele mai mari dificultăți suscită verificarea *Ax* II. Este necesar și suficient să verificăm *T*2.4: pentru 2 termeni constanți oarecare, b și c, $[b_\alpha = c_\beta \,\&\, F(b_\alpha)] \supset F(c_\beta)$, unde $F(b_\alpha)$ este o propoziție oarecare, care nu conține variabile libere.

Dacă $\alpha = \beta = 0$ (adică dacă b și c sînt termeni de bază constanți) iar $F(b)$ este sau $b \in d$ sau $d \in b$, unde d este un alt termen de bază constant, atunci $T2.4$ este adevărată, conform $D5.3$.

Să presupunem că $\alpha > 0$.

Dacă $b_\alpha = c_\beta$ și $b_\alpha = d_0$ sînt adevărate, atunci $c_\beta = d_0$ este, de asemenea, adevărată. Așadar, dacă $\alpha \geqslant \beta$, dat fiind că toate mulțimile de ordinul β sînt de asemenea de ordinul α, atunci aserțiunea este adevărată conform definițiilor egalității.

Dacă $\alpha < \beta$, $b_\alpha = d_0$ este echivalent cu $(x_\beta)\,[x_\beta \in b_\alpha \equiv x_\beta \in d_0]$, conform Ax VIII. Prin urmare, afirmația este adevărată și în acest caz.

Dacă $b_\alpha = c_\beta$ și $b_\alpha \in d$ sînt adevărate, unde d este de ordinul 0, atunci, conform Ax VII, există un termen d_0 astfel, încît $b_\alpha = d_0$ este adevărat. Prin urmare, $c_\beta = d_0$ este adevărat. Dacă $b_\alpha \in d$ este adevărată, atunci, conform (5) din $D8.4$, $d_0 \in d$ este adevărat. Prin urmare, $c_\beta = d_0$ este adevărat, iarăși conform (5) din $D8.4$. $c_\beta \in d$ este și ea o propoziție adevărată. Prin urmare, $T2.4$ este adevărată pentru orice α și β, dacă $F(b_\alpha)$ este $b_\alpha \in d$, unde d este de ordinul 0.

Dacă $F(b_\alpha)$ este de forma $b_\alpha \in \hat{x}_\alpha G(x_\alpha)$, unde $\hat{x}_\alpha F(x_\alpha)$ nu este un termen de bază — atunci cazul se reduce la cazul anterior în care $F(b_\alpha)$ este $G(b_\alpha)$.

Dacă $F(b_\alpha)$ este de forma $\neg G(b_\alpha)$, cazul se reduce la cel anterior: $[c_\beta = b_\alpha \,\&\, G(c_\beta)] \supset G(b_\alpha)$.

Dacă $F(b_\alpha)$ este de forma $G(b_\alpha) \vee H(b_\alpha)$, cazul se reduce la cazurile în care $F(b_\alpha)$ este $G(b_\alpha)$ și respectiv $H(b_\alpha)$. Similar, dacă $F(b_\alpha)$ este de forma $(\exists x_\gamma) G(x_\gamma, b_\alpha)$.

Considerînd ansamblul acestor cazuri, printr-un raționament inductiv se demonstrează că Ax II este adevărată.

În consecință, toate teoremele fiecărui sistem Σ_α sînt adevărate. Întrucît, oricare ar fi p, p și $\neg p$ nu pot fi ambele adevărate, se demonstrează că sistemele sînt consistente.

O demonstrație mai constructivă a consistenței va fi expusă în cuprinsul paragrafului următor.

§ 9. DEMONSTRAȚII DE CONSISTENȚĂ

Sistemul Σ sau mai curînd orice sistem Σ_α, pentru un α dat, poate fi demonstrat ca consistent, urmînd linia lui Lorenzen (1951) și Schütte (1952).

Ne propunem să demonstrăm că ansamblul axiomelor I—VIII și al regulilor $Ri1$—$Ri8$ nu duce la contradicții.

În principiu, utilizăm un sistem auxiliar L, a cărui consistență poate fi sesizată cu ușurință și demonstrăm după aceea că toate teoremele lui Σ sînt și teoreme în L.

Sistemul auxiliar L poate fi descris astfel:

$L1$. Dacă a, b sînt termeni de mulțime de bază (adică termeni de mulțime construiți plecînd de la 0 prin aplicarea exclusiv a lui Aj), $a \in b$ sau $\neg a \in b$ constituie o teoremă după cum $a \in b$ este adevărat sau fals, potrivit semnificației sale intuitive.

$L2$. Dacă $p_1 \vee \ldots \vee p_n$ este o teoremă, atunci rezultatele obținute prin omiterea termenilor care se repetă, gruparea termenilor și permutarea termenilor rămîn teoreme.

L3. (*i*) $p \to p \vee q$; (*ii*) $p \vee q \to p \vee \neg\neg q$; (iii) $\neg p \vee r$, $\neg q \vee r \to \neg(p \vee q) \vee r$; (iv) *Ri*7; (v) *Ri*8.

L4. $\neg(\exists x_0)\ F(x_0)$ este o teoremă dacă, pentru orice termen de mulțime de bază b, $\neg F(b)$ este o teoremă.

L5. $\neg(\exists x_\alpha)\ F(x_\alpha)$ este o teoremă, dacă pentru fiecare termen de mulțime b de ordinul α sau mai mic, $\neg F(b)$ este o teoremă.

L6. Dacă p este o teoremă care conține ca parte a sa $F(b)$, b este un termen de mulțime de ordin arbitrar și $\hat{y}_\beta F(y_\beta)$ este un termen de mulțime, însă nu un termen de bază, atunci rezultatul substituirii $b \in \hat{y}_\beta F(y_\beta)$ în locul lui $F(b)$ în p este de asemenea o teoremă.

L7. Să presupunem că b, c sînt termeni de bază, $\alpha > 0$, iar $d_\alpha = b$ este o teoremă. Atunci, dacă $b \in c$ este teoremă, $d_\alpha \in c$ este de asemenea teoremă; dacă $\neg b \in c$ este teoremă, $\neg d_\alpha \in c$ este de asemenea teoremă.

Este ușor de văzut că acest sistem L este consistent. De exemplu, $0 \in 0$ nu este teoremă în sistem. Astfel, potrivit semnificației sale intuitive, *L*1 nu face ca $0 \in 0$ să fie o teoremă. La fel, nici una dintre celelalte reguli *L*2—*L*6 nu poate face ca $0 \in 0$ să devină o teoremă. În genere, *L*2 duce de la o teoremă la o altă teoremă de lungime sau complexitate egală, *L*3—*L*6 duc de la teoreme mai scurte sau mai puțin complexe la altele mai lungi sau mai complexe. *L*7 nu poate să producă $0 \in 0$ în calitate de concluzie, întrucît nu poate conduce la concluzii de forma $d_\alpha \in c$, cînd $\alpha = 0$. Prin urmare, nici una dintre regulile *L*1—*L*7 nu poate avea ca consecvent $0 \in 0$, care este în cadrul sistemului considerat una dintre propozițiile cele mai simple.

Ceva mai greu este să verificăm că toate teoremele fiecărui sistem Σ_α sînt totodată teoreme ale sistemului auxiliar de mai sus.

*Ri*1—*Ri*3 sînt cazuri ale lui *L*2.

*Ri*4, *Ri*5, *Ri*7, *Ri*8 sînt cazuri ale lui *L*3.

Prin urmare, trebuie să considerăm numai axiomele sistemului precum și *Ri*6 (*modus ponens*, *Schnittsregel*, regula de detașare).

Pentru demonstrarea faptului că *Ax* I este teoremă, considerăm diversele forme posibile ale lui p. Dacă p este $a \in b$ unde a, b sînt termeni de bază constanți, atunci, conform cu *L*1, sau $a \in b$ sau $\neg a \in b$ constituie o teoremă a sistemului L. În consecință, conform (i) din *L*3 și lui *L*2, $\neg p \vee p$ este teoremă.

Fiind dat că $\neg p \vee p$ și $\neg q \vee q$ sînt teoreme ale lui L, este ușor de arătat, pe baza lui *L*3 și *L*2, că $\neg\neg p \vee p$ și $\neg(p \vee q) \vee (p \vee q)$ sînt teoreme ale lui L.

În mod similar, dacă b este de ordinul β și $\neg F(b) \vee F(b)$ este teoremă a lui L, atunci $\neg b \in \hat{y}_\beta F(y_\beta) \vee b \in yF(y_\beta)$ este de asemenea o teoremă a lui L, conform *L*6.

Dacă pentru unii b de ordinul β, $\neg F(b) \vee F(b)$ este teoremă a lui L, atunci $\neg(\exists x_\beta)\ F(x_\beta) \vee (\exists x_\beta)\ F(x_\beta)$ este teoremă a lui L, conform cu (iv) și (v)din *L*3 și cu *L*2.

În consecință, oricare ar fi p, $\neg p \vee p$ este o teoremă a lui L. Cu alte cuvinte, toate cazurile axiomei *Ax* I sînt teoreme ale lui L.

Pasul cel mai dificil îl constituie demonstrarea faptului că aplicarea regulii *Ri*6 („Schnittsregel“, detașare) conduce de la teoreme ale lui L la teoreme ale lui L. Demonstrația poate fi efectuată la fel ca la Schütte (1952).

Observăm, în primul rînd că, plecînd de la orice demonstrație în L a formulei $\neg(p \vee q) \vee r$, putem găsi o demonstrație a lui $\neg p \vee r$ și o demonstrație a lui $\neg q \vee r$. Aceasta este evident, deoarece (iii) din *L*3 este unica regulă care

avea în calitate de consecvent o propoziție de forma $\neg(p \vee q) \vee r$. În mod similar, plecînd de la o demonstrație în L a lui $p \vee \neg\neg q$, putem găsi o demonstrație pentru $p \vee q$, întrucît (ii) din $L3$ este unica regulă care are în calitate de consecvent o propoziție de forma $p \vee \neg\neg q$. Plecînd de la o demonstrație a lui $\neg(\exists x_\alpha)\, F(x_\alpha) \vee p$ în L, putem găsi o demonstrație a lui $\neg F(b) \vee p$, pentru orice termen b de ordinul α sau mai mic; dacă $\alpha = 0$, putem găsi o demonstrație a lui $\neg F(b) \vee p$ pentru orice termen de bază constant b.

Să presupunem că $p \vee q$ și $\neg q \vee r$ sînt ambele teoreme ale lui L. Vrem să arătăm că $p \vee r$ este de asemenea o teoremă în L.

În acest scop, să facem abstracție, ca mai sus, de formulele cu variabile libere și să presupunem că toate formulele lui L sînt corelate cu numere ordinale, ca în $D9.2$. Vom demonstra rezultatul printr-o inducție după numărul ordinal corelat cu formula eliminată q: rezultatul este valabil cînd q este de forma cea mai simplă; dacă rezultatul este adevărat pentru toate formulele cruciale cu numere ordinale mai mici ca cel al lui q, atunci rezultatul este adevărat cînd formula eliminată este q.

(I) q este o formulă $b \in c$, unde b și c nu conțin nici o variabilă liberă.

(Ia) b și c sînt termeni de bază constanți. Conform $L1$, sau $b \in c$ sau $\neg b \in c$ este o teoremă a lui L. Datorită consistenței lui L sau $b \in c$ sau $\neg b \in c$ nu este o teoremă a lui L. Dacă $b \in c$ nu este o teoremă, atunci $b \in c$ putea să fie introdusă în demonstrația lui $p \vee b \in c$ numai prin (i) din $L3$. Așadar, p este deja o teoremă a lui L. În consecință, conform (i) din $L3$, $p \vee r$ este de asemenea o teoremă. În mod similar, dacă $\neg b \in c$ nu este o teoremă a lui L, atunci r este deja o teoremă a lui L și deci $p \vee r$ este de asemenea o teoremă.

(Ib) Dacă c este un termen constant, însă b nu este. Să considerăm mai întîi demonstrația lui $p \vee b \in c$ în L. Dacă $b \in c$ este introdus pe baza lui (i) p. $L3$, atunci, ștergînd pretutindeni pe $b \in c$, obținem o demonstrație a lui p. Aplicînd din nou (i) din $L3$, obținem $p \vee$ r. Dacă $b \in c$ nu este introdus pe baza lui (i) din $L3$, el nu poate fi introdus inițial decît pe baza lui $L7$, deoarece nici o altă regulă care conține $b \in c$ în antecedent nu poate conține $b \in c$ în consecvent. Prin urmare, avem un termen de bază d, astfel încît $d = b$ și $d \in c$ sînt două linii în demonstrația pentru $p \vee b \in c$. Atunci, $\neg b \in c$ nu poate fi introdus în demonstrația lui $\neg b \in c \vee r$ decît pe baza lui (i) din $L3$. În caz contrar, $\neg b \in c$ poate fi introdus pentru prima oară numai pe baza lui $L7$, deoarece nici o altă regulă care nu conține $\neg b \in c$ în antecedent nu-l poate conține în consecvent. Atunci am avea pentru un anumit termen de bază e că $e = b$ și $\neg e \in c$ sînt două linii în demonstrația lui $\neg b \in c \vee r$. Aceasta nu este posibil, în cazul cînd d și e coincid, deoarece atunci $d \in c$ și $\neg e \in c$ nu pot fi ambele teoreme. Așadar, dacă $\neg b \in c$ nu este introdus pe baza lui (i) din $L3$, trebuie să existe doi termeni de bază distincți d și e, astfel încît $d = b$ și $e = b$ să fie ambele teoreme în L. Vrem să demonstrăm că aceasta nu se poate întîmpla niciodată. Întrucît d și e sînt distincți, există un termen de bază a, astfel încît sau $a \in d$ și $\neg a \in e$ sînt ambele teoreme sau $\neg a \in d$ și $a \in e$ sînt ambele teoreme. Sau $a \in b$ sau $\neg a \in b$ este o teoremă. Oricare ar fi cazul, nu putem avea în același timp ca teoreme $d = b$ și $e = b$. În consecință, $\neg b \in c$ poate fi introdus în demonstrația lui $\neg b \in c \vee r$ numai pe baza lui (i) din $L3$. Dar atunci, ștergînd din cuprinsul întregii demonstrații $\neg b \in c$ obținem o demonstrație a lui r. Prin urmare, aplicînd iarăși (i) din $L3$, căpătăm $p \vee r$.

(Ic) Dacă c nu este un termen de bază. Să presupunem că c este $\hat{x}_\alpha F(x_\alpha)$. Reducem acest caz la cazul mai simplu, cînd q este $F(b)$.

(II) q are forma $p_1 \vee p_2$. Conform observațiilor preliminare, pornind de la demonstrația lui $\neg(p_1 \vee p_2) \vee r$, putem găsi demonstrații pentru $\neg p_1 \vee r$ și $\neg p_2 \vee r$. Așadar, putem reduce aplicarea regulii de detașare la cazuri mai simple:

$$p \vee p_1 \vee p_2,\ \neg p_2 \vee r \to p \vee p_1 \vee r,$$
$$\to p \vee r \vee p_1$$
$$p \vee r \vee p_1,\ \neg p_1 \vee r \to p \vee r \vee r$$
$$\to p \vee r.$$

(III) q are forma $\neg p_1$. Pornind de la demonstrația lui $\neg\neg p_1 \vee r$, putem obține o demonstrație a lui $p_1 \vee r$. În consecință, putem reduce acest caz la unul mai simplu:

$$p_1 \vee r,\ p \vee \neg p_1 \to r \vee p_1,\ p_1 \vee p$$
$$\to r \vee p$$
$$\to p \vee r.$$

(IV) q are forma $(\exists x_\alpha) F(x_\alpha)$. Pornind de la demonstrația lui $p \vee (\exists x_\alpha) F(x_\alpha)$ obținem pentru unii b_α și unii p_1 o demonstrație a lui $p_1 \vee F(b_\alpha)$ și de asemenea pornind de la demonstrația lui $\neg(\exists x_\alpha) F(x_\alpha) \vee r$ o demonstrație pentru $\neg F(b_\alpha) \vee r$. Prin urmare, putem reduce acest caz la unul mai simplu:

$$p_1 \vee F(b_\alpha),\ \ F(b_\alpha) \vee r \to p_1 \vee r.$$

Acum, dacă în derivarea lui $p \vee (\exists x_\alpha) F(x_\alpha)$ din $p_1 \vee F(b_\alpha)$ înlocuim atît $F(b_1)$, cît și $(\exists x_\alpha) F(x_\alpha)$ prin r, căpătăm din nou o derivare a cărei ultimă linie este:

$$p_1 \vee r \to p \vee r.$$

Aceasta completează demonstrația faptului că dacă $p \vee q$ și $\neg q \vee r$ sînt teoreme ale lui L, atunci și $p \vee r$ este teoremă a lui L. Ca urmare, avem dreptul să facem uz, dacă dorim, de regula de detașare în L.

Problema care mai rămîne acum constă în a demonstra că Ax II-Ax VIII sînt teoreme ale lui L.

Conform $L6$ și $L1$, toate cazurile pe care le comportă Ax IV sînt teoreme ale lui L.

Cazurile Ax III sînt teoreme ale lui L conform lui (iv) din $L3$ (respectiv $Ri7$) și lui $L5$.

Cazurile Ax V sînt teoreme ale lui L, conform lui $L5$, deoarece orice termen de mulțime de ordinul α (α fiind un număr limită) este, totodată, de un ordin oarecare mai mic ca α.

Faptul că Ax VIII și Ax VI sînt teoreme ale lui L poate fi constatat, dacă reflectăm asupra semnificației formulelor relevante. De exemplu, oricare ar fi termenul b_α, putem găsi un anumit n_0 definit astfel, încît $E_\alpha(n_0) = b_\alpha$ este teoremă a lui L, dacă descompunem E_α conform definiției sale.

Demonstrarea *Ax* II și a *Ax* VII în L este o chestiune complicată. Vom face următoarea observație generală. Conform definiției egalității, în L se poate demonstra că $b_0 = c_1$ (sau $c_1 = b_0$), pentru termeni b_0 și c_1 aleși în mod adecvat. Pentru c_1 și c_2 adecvat aleși putem demonstra totodată că $c_1 = c_2$, deoarece $c_1 = c_2$ este echivalent cu

$$(x_0)\,[x_0 \in c_1 \equiv x_0 \in c_2] \,\&\, (x_1)\,[x_1 \in c_2 \supset (\exists y_0)\,(y_0 = x_1)].$$

Și așa mai departe. Iată cum este posibil să demonstrăm $a_\alpha = b_\beta$, cînd $\alpha \neq \beta$.

Pentru a justifica *Ax* II, demonstrăm că pentru orice termeni dați a_α și b_β

$$a_\alpha = b_\beta \supset [F(a_\alpha) \equiv F(b_\beta)] \tag{i}$$

este o teoremă a lui L. Dacă $\alpha = \beta = 0$ și $F(a)_\alpha$ este $a_\alpha \in c_\gamma$ sau $c_\gamma \in a_\alpha$, atunci $F(a_\alpha)$ și $F(b_\beta)$ reprezintă același lucru, deoarece doi termeni de bază diferiți nu pot desemna niciodată una și aceeași mulțime. Dacă $\alpha = 0$ sau $\beta = 0$, însă nu ambele și $F(a_\alpha)$ este $a_\alpha \in c_0$, atunci (i) este teoremă a lui L, conform *L7*. Dacă $\alpha = 0$ sau $\beta = 0$ însă, nu ambele, $F(a_\alpha)$ este $c_\gamma \in a_\alpha$ și $a_\alpha = b_\beta$ este teoremă a lui L, atunci (i) este teoremă conform definiției egalității, dacă există un d_0, $d_0 = c_\gamma$ iar (i) este de asemenea teoremă în caz contrar, deoarece atît $\neg c_\gamma \in a_\alpha$, cît și $\neg c_\gamma \in b_\beta$ sînt atunci teoreme. În mod similar, dacă $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, dar $F(a_\alpha)$ este $a_\alpha \in c_0$, atunci (i) este și în acest caz o teoremă. Cînd $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ și $F(a_\alpha)$ este $c_\gamma \in a_\alpha$, putem elimina a_α și b_β pe baza lui *L6*. Cazurile în care $F(a_\alpha)$ conține operatori logici pot fi stabilite cu ușurință prin inducție, deoarece, așa cum am arătat, regula de detașare este derivabilă în L. De exemplu, este ușor să demonstrăm:

$$p \supset [q \equiv r],\ p \supset [q_1 \equiv r_1] \rightarrow p \supset [(q \,\&\, q_1) \equiv (r \,\&\, r_1)].$$

Demonstrația *Ax* VII în L depinde de faptul că, de exemplu, pentru a demonstra $a_\alpha \in b_{\beta+1} (\alpha > \beta)$ în L trebuie să facem uz la un anumit stadiu de *L7* și trebuie să fim în stare să demonstrăm că există un termen c_β astfel încît $a_\alpha = c_\beta$. Detaliile acestui raționament sînt omise.

§ 10. SISTEMUL R

Pentru facilitarea comparației cu teoria tipurilor, descriem un sistem R foarte apropiat de sistemul Σ_ω.

10.1. Niveluri. Tipuri. Ordine

În R, întregii nenegativi sînt indivizii sau, cu alte cuvinte, obiecte de nivel 0 sau de nivelul cel mai coborît. Mulțimile de numere întregi și relațiile între aceste numere întregi constituie obiectele de primul nivel. Mulțimile de aceste mulțimi și relații de indivizi, precum și relațiile dintre aceste mulțimi de indivizi și relațiile dintre indivizi alcătuiesc obiectele de al doilea nivel și așa mai departe, *ad infinitum*.

Toate mulțimile și relațiile sînt introduse prin abstractizare, pornind de la formulele propoziționale cu variabile libere. Fiecărei mulțimi sau relații i se atribuie un întreg pozitiv ca ordin al ei, în conformitate cu complexitatea

definiției sale. Astfel, ordinul 1 este atribuit unei mulțimi sau relații introduse prin folosirea noțiunilor exprimabile în teoria elementară a numerelor și a căror definiție nu presupune deci alte totalități în afară de cea a întregilor nenegativi. De ordin 2 este o mulțime sau relație a cărei definiție în sistemul R nu presupune alte totalități în afară de totalitățile întregilor nenegativi, mulțimilor și relațiilor de ordinul 1. Nu este necesar ca definiția unei mulțimi sau relații de ordinul 2 să implice ambele genuri de totalități; fiecare mulțime sau relație de ordin 1 este totodată mulțime sau relație de ordin 2. În mod similar, o mulțime sau o relație a cărei definiție nu implică totalități de ordin superior lui 2 (socotind totalitatea întregilor nenegativi ca avînd ordinul 0) este de ordinul 3. Și așa mai departe, *ad infinitum*.

În afară de nivel și de ordin, orice mulțime sau relație are și un tip care parțial este determinat de ordinul ei și parțial — de către tipurile membrilor săi. De exemplu, o mulțime de întregi nenegativi de ordinul 5 este de tipul 5(0), o relație triadică de ordinul 8 între întregi nenegativi este de tipul 8(0, 0,0), o mulțime de ordinul 12 de mulțimi de tipul 5(0) este de tipul 12(5(0)), o relație diadică de ordinul 9 între întregi nenegativi și relații de tip 8(0, 0, 0) este de tipul 9(0, 8(0,0,0)), și așa mai departe. Fiind dat tipul unei mulțimi sau relații, cunoaștem nu numai ordinul, ci și nivelul acestei mulțimi sau relații.

Mai precis, semnele de tip se definesc în felul următor. Simbolul 0 este unicul semn de tip de ordin 0 și nivel 0. Dacă $t_1, \ldots t_n$ sînt semne de tip oarecare avînd, fiecare în parte, un ordin inferior lui m ($m > 0$) iar nivelul maxim al $t_1, \ldots, t_n$ este k, atunci $m\,(t_1, \ldots, t_n)$ este un semn de tip de ordin m și nivel $k+1$. Totodată, pentru aceiași $t_1, \ldots, t_n$, semnul $(t_1, \ldots, t_n)$ este un semn de tip general de nivel $k + 1$ (și de ordinul ω, dacă dorim). Interzicem însă folosirea acestor semne de tip general în calitate de componente ale construcției unor noi semne de tip. Vorbind despre semne de tip, vom înțelege, de regulă, semnele de tip de ordine finite. Caracterizarea semnelor de tip, trebuie observat, este recursivă. De exemplu, 0, 1(0), 1(0, 0), 2(0), 2(0, 0), 3(0), 4(0, 0, 0), 15(0, 0) sînt semne de tip de nivelul 1, 2(1(0)), 3(0,1(0)) sînt semne de tip de nivelul 2, 4(0, 3(2(1(0), 0))), 7(4(1(0), 2(1(0), 0))) sînt semne de tip de nivelul 4, 9(6(5(3 (2(0)))) este un semn de tip de nivelul 5 și așa mai departe. Din caracterizarea semnelor de tip rezultă că nivelul unui semn de tip, t, este, în principiu, numărul celei mai lungi succesiuni de perechi de paranteze din t, prezentînd proprietatea că fiecare pereche neextremă este cuprinsă în predecesorul ei și cuprinde succesorul ei.

Totodată, întrucît definiția oricărei mulțimi (sau relații) presupune neapărat totalitatea membrilor acestei mulțimi (sau cea a membrilor care umplu fiecare din locurile relației), rezultă că ordinul oricărei mulțimi sau relații este întotdeauna mai mare (cel puțin cu 1) decît ordinul membrilor săi. Așadar, ordinul oricărui semn de tip este întotdeauna cel puțin tot atît de mare ca nivelul său. De exemplu, nu putem avea niciodată un semn de tip de ordinul 4 și nivel 5, deși putem avea unul de ordinul 5 și nivel 4 sau unul de ordinul 5 și nivel 5.

10.2. Expresiile sistemului R

Expresiile principale ale sistemului R sînt termenii și propozițiile. Printre termeni se numără cei care desemnează întregi nenegativi, precum și cei care desemnează mulțimi și relații, obținuți prin abstracție din propoziții. Propo-

zițiile se obțin fie din termeni — făcînd uz de semnul identității $=$ sau de semnul apartenenței $\in$ — fie din alte propoziții, aplicînd operațiile din domeniul funcțiilor de adevăr sau operația de cuantificare.

Mai precis, expresiile lui R sînt după cum urmează:

10.2.1. Unități de bază: $|$ (nici-nici), $=$ (identitatea), $\in$ (apartenența), $\hat{}$ (abstracția), 0 (zero), 1 (unu), $+$ (adunarea), $\cdot$ (înmulțirea), $w, x, y, z, \ldots,$, (virgula), ((paranteză stîngă),) (paranteză dreaptă).

10.2.2. Numeralele 2, 3, 4 și așa mai departe sînt introduse ca prescurtări pentru $1 + 1$, $2 + 1$, $3 + 1$ și așa mai departe.

10.2.3. Semnele de tip se definesc ca în 10.1.

10.2.4. Variabile (de ordine finite): Dacă t este un semn de tip, atunci w^t, x^t, y^t, z^t, x_1^t , y_1^t și așa mai departe sînt variabile de tipul t. Variabilele m, n, k, i, j și așa mai departe vor fi întrebuințate adesea, cînd acest lucru este convenabil, în locul variabilelor w^0, x^0, y^0, z^0, w_1^0 și așa mai departe. Nivelul unei variabile este nivelul semnului ei de tip.

10.2.5. Termeni de ordinul 0 și nivel 0: variabilele m, n, k , i, j și așa mai departe; numeralele 0 și 1; dacă a și b sînt, atunci $a + b$ și $a \cdot b$ sînt.

10.2.6. Propoziții de ordinul m (m un număr întreg pozitiv): (1) dacă a și b sînt termeni de ordinul 0, atunci $a = b$ este o propoziție de ordinul m; (2) dacă t este $k(t_1, \ldots, t_n)$, $k \leqslant m$, $a_1, \ldots, a_n$ sînt termeni respectiv de tipul $t_1, \ldots, t_n$, iar b este un termen de tipul t, atunci $(a_1, \ldots, a_n) \in b$ este o propoziție de ordinul m (de exemplu, $(j, 0) \in x^{n(0\,0)}$ este de ordinul n); (3) dacă p, q, $F(x^t)$ sînt propoziții de ordinul m și ordinul lui t este mai mic ca m, atunci $p \mid q$, $(x^t)F(x^t)$ sînt propoziții de ordinul m.

10.2.7. Termeni de tip k $(t_1, \ldots, t_n)$ (k finit) : (1) dacă t este $j(t_1, \ldots, t_n)$ și $j \leqslant k$, variabilele w^t, x^t, y^t și așa mai departe sînt de tip k; (2) dacă $F(x_1^{t_1}, \ldots, x_n^{t_n})$ este o propoziție de ordinul k, atunci $\hat{x}_1^{t_1} \ldots \hat{x}_n^{t_n} F(x_1^{t_1}, \ldots, x_n^{t_n})$ este un termen de tipul k $(t_1, \ldots, t_n)$. Prin urmare, un termen obținut dintr-o propoziție prin abstracție este de același ordin ca această propoziție. De aici și din 10.2.6. rezultă că, în general, dacă $j \leqslant k$, un termen de tip $j(t_1, \ldots, t_n)$ este, de asemenea, de ordinul $k(t_1, \ldots, t_n)$.

10.2.8. Variabile generale sau variabile de ordinul ω (de ordin infinit): dacă t este $(t_1, \ldots, t_n)$, unde $t_1 \ldots, t_n$ sînt semne de tip oarecare (de ordine finite), w^t, x^t, y^t, z^t, x_1^t și așa mai departe, sînt variabile de tip t și ordin ω. Aici, ca și în cazul variabilelor obișnuite, nivelul unei variabile este cel al semnului de tip al variabilei. Ceva mai încolo vom înțelege că variabilele generale servesc ca variabile de ordin indefinit și nu ca variabile de ordin infinit.

10.2.9. Propoziții de ordinul ω: (1) dacă t este $(t_1, \ldots, t_n)$, $a_1, \ldots, a_n$ sînt termeni respectiv de tipurile $t_1, \ldots, t_n$ și b este un termen de tipul t, atunci $(a_1, \ldots, a_n) \in b$ este o propoziție de ordinul ω; (2) dacă a și b sînt termeni de tipurile $k(t_1, \ldots, t_n)$ și respectiv $(t_1, \ldots, t_n)$ sau sînt ambele de tipul $(t_1, \ldots, t_n)$ atunci $a = b$, $b = a$ sînt propoziții de ordinul ω; (3) dacă p, q, $F(x^t)$ sînt pro-

poziții de ordinul ω și ordinul lui t este finit, atunci $p \mid q$ și $(x^t)\ F(x^t)$ sînt propoziții de ordinul ω; (4) Fiecare propoziție de un ordin finit este totodată propoziție de ordin ω.

10.2.10. Termeni de tipul $(t_1, ..., t_n)$ (și de ordinul ω): (1) dacă t este $(t_1, ..., t_n)$ sau $k(t_1, ..., t_n)$ (pentru unii k), atunci fiecare variabilă w^t, x^t, y^t și așa mai departe, este de asemenea un termen de tip $(t_1, ..., t_n)$; (2) dacă $F(x_1^{t_1}, ..., x_n^{t_n})$ este o propoziție de ordinul ω, atunci $\hat{x}_1^{t_1}, ..., \hat{x}_n^{t_n} F(x_1^{t_1}, ..., x_n^{t_n})$ este un termen de tipul $(t_1, ..., t_n)$. De aici și din 11.2.9. rezultă că fiecare termen de tipul $k(t_1, ..., t_n)$, unde k este întreg pozitiv oarecare, este totodată un termen de tipul $(t_1, ..., t_n)$.

10.2.11. Propoziții de ordinul $\omega + 1$: (1) O propoziție de ordinul ω este, de asemenea, de ordinul $\omega + 1$; (2) dacă p, q, $F(x^t)$ sînt propoziții de ordinul $\omega + 1$, unde t poate fi de ordinul ω, atunci $p \mid q$ și $(x^t)\ F(x^t)$ sînt propoziții de ordinul $\omega + 1$. Cu alte cuvinte, propozițiile de ordinul $\omega + 1$ pot să conțină variabile generale legate, adică pot implica o referire la anumite totalități de mulțimi sau relații de toate tipurile $k(t_1, ..., t_n)$ $(k = 1, 2, 3, ...)$.

Este important să nu admitem nici un termen care ar conține variabile generale legate. Conform abordării constructive generale, atare termeni ar trebui să fie de ordinul $\omega + 1$. Întrucît în R vrem să ne mărginim la obiecte de ordine finite și astfel la termeni de ordin nu mai mare ca ω, ne abținem de la introducerea unor constante sau a unor variabile de ordinul $\omega + 1$. Permiterea variabilelor generale legate în definirea termenilor și tratarea acestor termeni ca fiind de ordinul ω (adică tratarea lor ca valori ale variabilelor generale) ar însemna, desigur, întrebuințarea definițiilor impredicative pe care hotărîsem să le interzicem.

10.3. Definiții și axiome fundamentale ale lui R.

Cu ajutorul semnelor de bază $\mid$ și ( ), putem defini în maniera uzuală semnele $\supset$ (dacă ... atunci,), & (și), $\equiv$ (dacă și numai dacă), $\neg$ (nu), $\vee$ (sau), $\exists$ (pentru unii). Așa cum este uzual, $a \neq b$ desemnează $\neg a = b$.

Axiomele și regulile de inferență ale sistemului R sînt similare celor din Σ_ω, bineînțeles cu anumite ajustări necesare. De exemplu, axiomele teoriei elementare a numerelor sînt înglobate ca axiome pentru indivizi (adică pentru obiecte de nivelul cel mai coborît).

În teoria R nu știm dacă formulele de forma

$$(\exists y)\,(t_i, ..., t_n)\ (x^{t_i}) ... (w^{t_n})\ [(x^{t_i}, .., w^{t_n}) \in y(t_i, ..., t_n) \equiv p],$$

unde p conține variabile generale, sînt adevărate sau false. Dacă am putea să demonstrăm că toate propozițiile de acest fel sînt adevărate, am fi în măsură să le adăugăm ca axiome și să căpătăm un sistem în esență echivalent cu teoria simplă a tipurilor. Într-adevăr, într-un atare sistem, am putea să omitem toate formulele și axiomele care nu cuprind decît variabile generale și rezultatul ar fi exact teoria simplă a tipurilor. Pe de altă parte, în teoria

simplă a tipurilor am putea să introducem, totodată, prin definiții contextuale, variabilele de ordine finite.

Dacă dorim, în teoria R ne putem dispensa cu totul de relații, în maniera obișnuită. Într-adevăr, ținînd seama de prezența la bază a teoriei elementare a numerelor, putem identifica relațiile cu mulțimi adecvat alese de același nivel.

În anumite scopuri ar putea fi folositoare și adăugarea la R a unor mulțimi de ordinul $\omega + 1$ pentru fiecare tip. În linii mari, acestea ar îndeplini rolul de clase sau de II-lucruri din teoria mulțimilor a lui von Neumann-Bernays.

CAPITOLUL XXV
NUMERELE ORDINALE ȘI TEORIA PREDICATIVĂ A MULȚIMILOR[1]

Noțiunea de predicativitate a lui Poincaré și Russell pare să merite a fi reluată din nou în studiu, avînd în vedere lucrările recente ale lui Lorenzen și alții care ne permit să sperăm o bază predicativă pentru matematica uzuală. Modelul predicativ al lui Gödel al teoriei clasice a mulțimilor relativ la numerele ordinale clasice și lucrările mai recente ale mai multor logicieni asupra mulțimilor hiperaritmetice creează impresia că problema precizării noțiunii filozofice de predicativitate a devenit aproape rezolvabilă. În cele ce urmează vor fi descrise unele tentative foarte seducătoare de a răspunde la această chestiune. Credem că unele dintre ideile vagi descrise mai jos ar putea conduce mințile mai capabile la rezultate mai bine conturate. În particular, există temeiuri pentru a crede că domeniul extrem de atrăgător al teoriei hiperaritmetice a mulțimilor nu ne oferă un cadru concludent pentru tratarea tuturor mulțimilor predicative. Unele extinderi noi par să reclame un examen mai atent.Deocamdată, vom da un sistem de axiome H relativ simplu, sistem care, după cum se pare, codifică mulțimile hiperaritmetice la fel de bine cum sistemele uzuale codifică noțiunea de număr natural și noțiunea de mulțime arbitrară.

Numerele ordinale au o importanță centrală în examinarea structurii amănunțite a definițiilor și demonstrațiilor. Numerele ordinale par să fie indispensabile ca instrument de măsură a complexității, iar problema determinării numerelor ordinale acceptabile consacră un spațiu amplu diferitelor sisteme de numere ordinale. În afara faimoasei clase a numerelor ordinale recursive, vor fi discutate și sisteme mai restrînse, denumite strict efective, precum și sisteme mai largi, care par să rămînă într-un oarecare domeniu vag al „constructivului".

Noțiunea de definiție inductivă nu este nici ea cu totul clară, dacă trecem dincolo de exemplele familiare și încercăm să obținem o definiție generală exactă. Vor fi formulate unele dificultăți, dîndu-se totodată cu titlu de încercare o caracterizare generală.

[1] Acest capitol a apărut în „Zeitsch. f. math. Logik u. Grundlagen der Mathematik", vol. 5, 1959.

§ 1. SISTEME DE NOTAȚIE PENTRU NUMERE ORDINALE

Vom studia reprezentarea numerelor ordinale prin întregi pozitivi sau nenegativi. Această restrîngere la numere întregi înseamnează că ne interesează numai sistemele de notație pentru prima și a doua clasă de numere ale lui Cantor. După cum se știe, orice bineordonare a unei clase de întregi pozitivi (domeniul acesteia) determină o secțiune a celei de a doua clase de numere, dar nu este obligatoriu acceptabilă în calitate de sistem de notație pentru numerele ordinale, deoarece s-ar putea să nu avem un mijloc efectiv pentru a spune, de exemplu, dacă un întreg dat în cadrul domeniului reprezintă numărul ordinal 0, un succesor sau un număr limită.

Dacă folosim x^* pentru desemnarea numărului ordinal reprezentat de x, pare posibil să enunțăm unele cerințe minime pe care o bineordonare V cu domeniul D_V(o clasă de întregi pozitivi) trebuie să le satisfacă, pentru ca să fie un sistem de notație a numerelor ordinale:

DEFINIȚIA 1. O bineordonare V este un sistem de notație pentru numere ordinale dacă:

(1) *$x \neq y$, dacă $x^* \neq y^*$, adică nu există două numere ordinale care să fie reprezentate prin același număr întreg*;

(2) *există o metodă efectivă pentru a determina, pentru toți x, $D_V(x)$, dacă x^* este 0, un succesor sau un număr limită;*

(3) *există o metodă efectivă pentru a determina, pentru toți x, x^* fiind un succesor, un y, astfel încît y^* este predecesorul lui x^**;

(4) *există o metodă efectivă pentru a determina, pentru orice x, $D_V(x)$, un y astfel încît y^* este succesorul lui x^*.*

Observația 1. Se poate obiecta că prin folosirea întregilor pozitivi în locul numeralelor pentru reprezentarea numerelor ordinale, putem întîmpina dificultăți, dat fiind că pot exista termeni numerici diferiți, astfel încît să nu putem decide efectiv dacă ei reprezintă sau nu același întreg. În practică, vom folosi numai termeni numerici ale căror numerale corespunzătoare pot fi găsite efectiv, evitînd în felul acesta dificultatea semnalată. Totuși, în cele ce urmează, adesea vom avea o situație mai limpede dacă gîndim în termeni de expresii numerice. În cadrul fiecărui sistem folosim, în general, o clasă de expresii numerice de așa natură, încît nu există două expresii diferite care să reprezinte același număr întreg; totodată, adesea este mai convenabil să se facă uz de proprietățile sintactice ale expresiilor.

Observația 2. După cum se știe, nici un sistem de notație, fiind numerabil, nu ar putea reprezenta, desigur, întreaga a doua clasă de numere.

Observația 3. Pentru precizie, vom adopta ipoteza Church-Turing: o funcție sau un predicat definit pe o mulțime D de întregi pozitivi este efectiv calculabil sau decidabil, dacă și numai dacă este general recursiv relativ la D.

Observația 4. Fiind dat un sistem V de notație și V fiind o bineordonare, există, de regulă, o clasă numerabilă de funcții $f_1, f_2, \ldots$ astfel încît (1) $D_V(f_n(m))$ dacă $D_V(m)$, și $V(f_n(m), f_n(k))$ dacă $V(m, k)$; (2) fiecare număr ordinal limită x^* are, pentru orice notație x, o funcție $f_x(n)$, $x^* = \lim (f_x(n))^*$. În general,

sau putem extrage clasa funcţiilor din bineordonarea V, sau putem s-o introducem în mod explicit de la bun început.

Dacă ne interesează sisteme efective de notaţie, am impune, natural, şi alte condiţii (cf. Church 1938 şi Kleene 1938):

Definiţia 2. O bineordonare V este un sistem efectiv calculabil de notaţie pentru numere ordinale, dacă există funcţii parţial recursive g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 *astfel încît: (1)* $x^* = y^*$ *dacă* $x = y$; *(2) dacă* $D_V(x)$, $g_1(x)$ *este 1, 2, 3, după cum* x^* *este 0,* x^* *este un succesor,* x^* *este o limită; (3) dacă* $D_V(x)$ *şi* $g_1(x)$ *este 2,* $(g_2(x))^*$ *este predecesorul lui* x^*; *(4) dacă* $D_V(x)$, $(g_3(x))^*$ *este succesorul lui* x^*; *(5) dacă* $D_V(x)$ *şi* $g_1(x) = 3$, $g_4(x)$ *este o funcţie recursivă (este un număr Gödel al unei funcţii recursive)* $f(n)$ *astfel încît* $D_V(n) \to D_V(f(n))$, $V(m, n) \to V(f(m), f(n))$, *şi lim* $(f(n))^* = x^*$; *(6) dacă* x *este o funcţie recursivă* $f(n)$ *care satisface primele două condiţii şi dacă* $D_V(g_5(x))$, *atunci* $(g_5(x))^* = lim\ (f(n))^*$.

Observaţia 5. Întrucît, de obicei, avem de-a face cu sisteme în care succesorul unui număr ordinal este reprezentat dacă numărul ordinal respectiv este reprezentat, nu am prevăzut de loc condiţiile (4) ale definiţiilor 1 şi 2, că într-un anumit sistem de notaţie ar putea exista un cel mai înalt număr ordinal reprezentabil. Spre deosebire de aceasta, clauza „dacă $D_V(g_5(x))$" din condiţia (6) poate fi eliminată numai în sisteme efective excepţional de bogate.

Observaţie 6. Întrucît $D_V(x)$, dacă şi numai dacă $g_1(x) = 1$ sau $V(\mu\, x(g_1(x) = 1), x)$, dacă g_1 este general recursivă, atunci D_V este general recursivă în V şi funcţiile general recursive în D_V sînt general recursive în V.

Făcînd uz de funcţiile $g_1, \ldots, g_5$ general recursive în D_V din definiţia de mai sus, obţinem o altă clasă de sisteme efective.

De foarte multe ori ne interesează sisteme care posedă proprietăţi atrăgătoare suplimentare.

Definiţia 3. O bineordonare V este un sistem efectiv maximal, dacă satisface ipoteza de mai sus, atunci cînd ipoteza „dacă $D_V(g_5(x))$*" este înlăturată din (6), adică atunci cînd toate şirurile recursive crescătoare admit limite.*

Pentru justificarea acestei definiţii, enunţăm următoarea teoremă (Kleene, 1938, p. 154).

1.1. Dacă V este un sistem efectiv maximal şi V' este un sistem efectiv arbitrar, orice număr ordinal reprezentabil în V' este reprezentabil şi în V.

Clasa numerelor ordinale reprezentabile în sisteme efective maximale se bucură deci de o măsură de stabilitate şi este denumită, pe drept cuvînt, clasa numerelor ordinale recursive. Cel mai mic ordinal care nu se află în această clasă este denumit adesea ω_1; desigur, el este mai mic ca minimul celei de a treia clase clasice de numere.

Sistemul efectiv maximal folosit pe scara cea mai largă este sistemul lui Kleene $<_0$.

Definiţia 4. Relaţia $x <_0 y$ *are loc atunci cînd* $v(x, y)$ *are loc pentru toţi V care satisfac următoarele condiţii: (1)* $V(1, 2)$; *(2)* $V(1, x) \to V(x, 2x)$;

(3) dacă $V(x, y)$ și $V(y, z)$, atunci $V(x, z)$; (4) dacă $(x)\,(Ey)\,T(e, x, y)$ și $(x)\,V(e(x), e(x+1))$, atunci $V(e(y), 3^e)$. $0(x)$ dacă și numai dacă $V(1, 2x)$.

Observația 7. Între această formulare și formularea inițială a lui Kleene există cîteva diferențe minore: Kleene folosește 2^x în locul lui $2x$, $3 \cdot 5^e$ în locul lui 3^e, șiruri de întregi pozitivi reprezentînd numere ordinale finite în locul numerelor pozitive întregi, adică (4'), dacă $(x)\,(Ey)\,T(e, 2^x, y)$ și $(x)\,V(e(2^x), e(2^{x+1}))$ atunci $V(e(2)^y, 3^e)$. Aceste modificări neesențiale par indicate în lumina vastei aplicări a sistemului, dat fiind că noua formulare aduce cu sine o oarecare simplificare a notației. Ultima dintre modificările făcute cere un mic comentariu. Dacă $e(n)$ dă un număr ordinal limită reprezentat prin 3^e, conform (4'), atunci 3^e reprezintă același număr ordinal conform lui (4), unde $e'(n) = e(2^n)$; reciproc, dacă 3^e reprezintă un număr ordinal conform lui (4), atunci $3^{e'}$ reprezintă același număr ordinal conform lui (4'), unde $e'(n) = e(g(n))$, $g(1) = 1$, $g(n+1) = 2^{\mu k(2^k > n)}$.

O abatere formală mai importantă de la definiția inițială a lui Kleene constă în separarea lui 0 din $<_0$. Drept urmare, aici nu se pune de loc problema transformării unei definiții inductive implicite într-o definiție explicită. Această formulare a fost introdusă la Wang, 1957.

Fiind dat un sistem efectiv, dorim, eventual, să punem cerința suplimentară ca să existe o metodă efectivă de a decide dacă două numere întregi reprezintă același număr ordinal sau, în ipoteza că nu reprezintă, de a decide care dintre ele reprezintă un număr ordinal mai mare. Ajungem la următoarea definiție:

DEFINIȚIA 5. *O bineordonare V este un sistem strict efectiv de notație pentru numere ordinale, dacă este un sistem efectiv și: (7) există o funcție general recursivă $g_6(x, y)$ astfel încît, pentru orice x și y, $g_6(x, y)$ este 1, 2, 3, 4, 5, 6, după cum $x^* = y^*$, $V(x, y)$, $x^* < y^*$, $y^* < x^*$, $V(y, x)$ sau dacă fie $-D_V(x)$, fie $-D_V(y)$.*

§ 2. SISTEME STRICT EFECTIVE

Alte două proprietăți dezirabile sînt unicitatea reprezentării și recursivitatea lui V și D_V. Cum se raportează aceste proprietăți la condiția (7) din definiția de mai sus?

2.1. O bineordonare V este un sistem strict efectiv, numai dacă este un astfel de sistem efectiv, încît atît V cît și D_V sînt general recursive.

Întrucît $D_V(x) \equiv g_6(x, x) = 1$ și $V(x, y) \equiv g_6(x, y) = 2$.

2.2. Dacă V este un sistem strict efectiv, există o submulțime recursivă a lui D_V care conține o reprezentare, și numai una, pentru orice număr ordinal reprezentat în D_V.

Nu avem de făcut altceva decît să luăm acei membri a ai lui D_V, astfel încît nici un întreg mai mic ca a nu reprezintă același număr ordinal ca a.

2.3. Dacă V este un sistem efectiv și D_V este general recursiv, V este recursiv numerabil.

Întrucît D_V este general recursiv, şi g_1, g_2, g_4 sînt general recursive, dacă dăm o valoare comună tuturor x pentru care — $D_V(x)$. Aşadar, putem găsi un $P(x, y, n)$ (primitiv) recursiv care are loc, dacă şi numai dacă $D_V(x)$, $D_V(y)$ şi (i) $g_1(x) = 1$, însă $g_1(y) \neq 1$, sau (ii) $g_1(y) = 2$, $g_2(y) = (n)_0$ şi $P(x, (n)_0, (n)_1)$ sau $x = (n)_0$, sau (iii) $g_1(x) = 3$, $g_4(x) = (n)_0$, $\{(n)_0\}(x)_2 = (n)_3$, şi $P(x, (n)_3, (n)_1)$. Dar $V(x, y)$ dacă şi numai dacă $(En)\ P(x, y, n)$.

2.4. Dacă V este un sistem efectiv, astfel încît D_V este general recursiv şi nu există doi întregi care să reprezinte acelaşi număr ordinal, atunci V este strict efectiv.

Conform Df. 5, trebuie să găsim numai o funcţie general recursivă $g_5(x, y)$, care este 1, 2, 5 sau 6 după cum $x^* = y^*$, $V(x, y)$, $V(y, x)$, — $D_V(x)$ sau — $D_V(y)$. Definiţia poate fi dată prin cazurile:

$$g_6(x, y) = 1 \equiv (D_V(x) \text{ şi } D_V(y) \text{ şi } x = y),\ g_6(x, y) = 4 \equiv (-D_V(x)\ V - D_V(y));$$

dacă nu are loc nici una dintre ele, $g_6(x, y) = 2$ sau 5 după cum $(En)\ P(x, y, n)$ sau $(En)\ P(y, x, n)$, care este recursiv, deoarece putem să verificăm $P(x, y, 1)$, $P(y, x, 1)$, $P(x, y, 2)$, $P(y, x, 2)$, ... şi să ajungem întotdeauna la o concluzie.

Exemplul 1. Un sistem strict efectiv în care $x^* = y^*$ nu implică $x = y$ · $1^* = 0$, $3^* = 0$, $(2x)^* = x^* + 1$.

Exemplul 2. Un sistem efectiv care nu este strict efectiv, dar satisface o condiţie mai slabă: (7′) există o funcţie general recursivă g, (x, y) care este 1, 2, 3 sau 4 după cum $x^* = y^*$, $x^* < y^*$, $y^* < x^*$, sau are loc fie — $D_V(x)$, fie — $D_V(y)$. Astfel, $1^* = 0$, $(2x)^* = x^* + 1$, $(3^i)^* = \omega$, $(5^i)^* = \omega 2$, şirurile pentru 3^i şi 5^j fie $f(3^i, 1) = 2i$, $f(3^i, n + 1) = 2f(3^i, n)$, $f(5^j, 1) = 3^j$, $f(5^j, n + 1) = 2f(5^j, n)$, însă $V(2^n 3^i, 5^j)$ este valabil numai atunci cînd, pentru toţi n, $\{i\}(n)$ este definit, dacă şi numai dacă $\{j\}(n)$ este definit. Aşadar, V nu este recursiv, deoarece, în caz contrar, am putea decide dacă o definiţie recursivă defineşte o funcţie general recursivă. În treacăt fie spus, acesta este totodată un sistem efectiv, care posedă un domeniu D_V general recursiv, însă nu este strict efectiv.

2.5. Fiind dat un sistem strict efectiv V, există un sistem strict efectiv V', care conţine reprezentări pentru mai multe numere ordinale.

Să definim $f(1) = \mu_x D_V(x)$, $f(n + 1) = \mu_x(f(n) < x$ şi $V(f(n), x))$; avem un şir recursiv a cărui limită reprezintă un număr ordinal care nu admite reprezentare în D_V. Putem să definim atunci cu uşurinţă V', de exemplu, luînd ca D_V mulţimea numerelor x pentru care există un y astfel, încît $D_V(y)$ şi $x = 3^y$, sau $x = 2^n$, pentru orice n pozitiv. Putem admite că 2^* este noul număr ordinal limită, iar $(2^{n+1})^*$ este $2^* + n$.

Această teoremă exclude posibilitatea unui sistem maxim în mulţimea tuturor sistemelor strict efective de notaţie pentru numere ordinale. Această situaţie contrastează cu cea a clasei sistemelor efective care admite maxime conţinînd reprezentări pentru toate numerele ordinale recursive şi numai pentru acestea.

S-ar putea crede că un sistem efectiv maximal cu o reprezentare unică pentru fiecare număr ordinal trebuie să fie mai complex decît $<_0$. Se demon-

strează la Spector (1955) (corolarul 3 al teoremei 4) că există un atare sistem care este recursiv în $<_0$ și deci, într-un sens bine definit, nu este mai complex. Vom da aici un exemplu puțin diferit care se bucură de o proprietate suplimentară.

2.6. Există un sistem efectiv maximal U, astfel încît (i) U este recursiv în $<_0$, (ii) fiecare număr ordinal $<\omega_1$ posedă o reprezentare unică în D_U; (iii) $O(a) \equiv (Ey)\,(D_U(y)$ și $D_U(y +_0 a))$ (în ce privește definiția lui $+_0$, vezi Kleene 1955 a).

Un corolar imediat este:

2.7. Există un sistem efectiv care posedă o reprezentare pentru fiecare număr ordinal reprezentabil în el, dar acesta nu este un sistem strict efectiv.

Pentru demonstrarea lui 2.6, punem $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = \mu x(O(x)$ și $a_n < x)$, $b_{n+1} = b_n +_0 a_{n+1}$, $D_U(a) \equiv (En)\,(a <_0 b_n)$, $U(x, y) \equiv (D_U(y)$ și $x <_0 Y)$. Conform teoremelor II și I ale lui Kleene 1955 a, $D_U(a)$ este recursiv în O și U este recursiv în $<_0$. Dar Kleene a demonstrat: $a <_0 a +_0 b$ dacă $O(a)$ și $1 <_0 b$. Așadar, $b_n <_0 b_{n+1}$ și nu există doi întregi în D_U care reprezintă același număr ordinal. Evident, $O(x) \equiv (En)\,(x = a_n)$ și $\lim a^*_n = \omega_1$. Întrucît $b^* \leqslant (a +_0 b)^*$, $a^* \leqslant b^*$, $\lim b^*_n = \omega_1$. Întrucît fiecare membru al lui O este un a_n și D_U se include în O, (iii) rezultă cu ușurință.

Combinînd 2.6 cu teorema I, Kleene 1955 *a*, putem introduce o măsură destul de arbitrară a complexității predicatelor și propozițiilor de formele $(\alpha)\,(Ex)\,R(a, \bar{\alpha}(x))$ și $(\alpha)\,(Ex)\,R(\bar{\alpha})\,(x)$. Astfel, pentru orice asemenea predicat $A(a)$, putem găsi un primitiv recursiv ξ, astfel încît $A(a) \equiv O(\xi(a))$.

Definim:

$$i(x) = \mu_y(D_U(y)\,\&\,D(y +_0 x)),$$

$$j(\hat{a}A(a), a) = i(\xi(a),$$

$j(\hat{a}\,A(a)) =$ (cea mai mică margine superioară în ordonarea U a tuturor valorilor lui $j(\hat{a}\,A(a), a)$).

$$j(B) = j(\hat{a}(B\,\&\,a = a), 1).$$

În aceste definiții, B este o propoziție oarecare de forma cerută și luăm în mod arbitrar 5 ca notație pentru ω_1, astfel că $j(\hat{a}A(a))$ poate lua uneori valoarea 5.

Dacă luăm acum un calcul al predicatelor de ordinul doi, bazat pe numerele naturale, și includem în el un număr suficient de reguli pentru transformarea cuantorilor care să garanteze că fiecare predicat capătă o formă normală uniformă în ierarhia analitică, putem obține o „logică ordinală" prin adăugarea unei reguli — „oracol" conform căreia, pentru orice n dat, $D_U(n)$ poate fi scris ca o teoremă, dacă este adevărat. Într-un asemenea „sistem", toate propozițiile aritmetice și hiperaritmetice devin demonstrabile. În consecință, pentru fiecare propoziție B de acest gen, în forma sa normală, putem să demonstrăm: $B \equiv D_U(j(B))$. Dar jumătatea dreaptă a echivalenței, în cazul că este adevărată, este o teoremă datorită „oracolului". Spre deosebire de cazurile studiate la Turing 1939, invarianța relativă la reprezentările diferite

ale aceluiaşi număr ordinal devine adevărată în mod banal, deoarece fiecare B are o ordine în D_U şi fiecare număr ordinal ω_1 posedă o notaţie unică în D_U.

În mod similar, putem da, de asemenea, o măsură destul de artificială a complexităţii definiţiilor general recursive după complexitatea propoziţiei care enunţă că definiţia defineşte o definiţie general recursivă, care este întotdeauna de forma $(x)\,(Ey)\,R(x, y)$, R fiind recursiv. Sau alternativ putem să transformăm definiţia într-o recursie ordinală şi să considerăm membrul lui D_U care corespunde, printr-o corespondenţă standard oarecare, bineordonării recursive cerute. De exemplu, la Myhill 1953 şi Routledge 1953 s-a arătat că recursiile ordinale cu diferite bineordonări, avînd tipul de ordine ω, sînt suficiente pentru producerea tuturor funcţiilor general recursive. Dacă luăm o imagine biunivocă obişnuită, de exemplu a, în 0, a fiecărei bineordonări în parte, atunci i(a) poate fi luată ca măsură pentru definiţia general recursivă iniţială.

În această ordine de idei, poate că este interesant să observăm că putem să introducem şi în mod direct un sistem de notaţii unice pentru toate numerele ordinale recursive.

Definiţia 4' *Sistemul L este intersecţia tuturor relaţiilor tranzitive V, astfel încît:* (1) $V(1, 2)$; (2) $V(1, x) \to V(x, 2x)$; (3) *dacă* $(x)\,(Ey)\,T(e, x, y)$, $(x)\,V(e(x), e(x+1))$ *şi pentru nici un* f, *cu* $f < e$, *nu este adevărat că* $V(1, 3^f)$ *şi* $(m)\,(\exists n)\,(Ek)\,V(e(m), f(k))$ *şi* $V(f(m), e(n))$, *atunci* $V(e(z), 3^e)$.

În încheierea acestui paragraf, vom da cîteva exemple de sisteme strict efective de notaţii pentru numere ordinale.

Exemplul 3. Un sistem de notaţie pentru toate numerele ordinale α, $\alpha < \omega^\omega$. $1^* = 0$, $(2x)^* = x^* + 1$, $3^* = \lim (2^n)^* = \omega$, $(3^{2x})^* = \lim (2^n 3^x)^* = (3^x)^* + \omega$, dacă $(3^y)^* = \lim (f(n))^*$, atunci $((3^{(3y)})^* = \lim (3^{f(n)})^*$. Sau altfel: V_3 este cea mai restrînsă relaţie tranzitivă care satisface următoarele condiţii: (1) $V_3(1, 2)$, $V_3(1, 3)$, (2) dacă $V_3(x, y)$, atunci $V_3(y, 2y)$, (3) dacă $V_3(x, 3y)$, atunci $V_3(2x, 3^y)$, (4) dacă $V_3(x, y)$, atunci $V_3(3^x, 3^y)$. Domeniul D_3 se defineşte ca $\hat{x}\,V_3(1, 2x)$ sau ca clasa cea mai mică ce satisface: (1) $D_3(1)$, (2) $D_3(x) \to D_3(2x)$, (3) $D_3(x) \to D_3(3^x)$. Se poate verifica faptul că dacă o expresie x în D_3 conţine numai intrări ale lui 3, atunci $(3^{(3^x)})^* = (3^x)^* \omega$. Dacă preferăm o notaţie unidimensională, putem scrie (m, n) în locul lui $2^m 3^n$, atunci 3^3 este $3^{(0,1)}$ sau $(0, (0, 1))$, $3^{(3^3)}$ este $(0, (0, (0, 1)))$. Dacă verificăm mai întîi $(0, (0, (0, 1)))^* = \omega^3$, constatăm atunci: $(n, (0, (0, 1)))^* = \omega^3 + n$, $(0, (n, (0, 1)))^* = \omega^3 + \omega n$, $(0, (0, (n, 1)))^* = \omega^3 + \omega^2 n$, $(0, (0, (0, n))) = \omega^3 + \omega^3 n$, $(0, (0, (0, (0, 1))))^* = \omega^4$.

Exemplul 4. Un sistem de notaţie pentru toate numerele ordinale α, $\alpha < \omega^{(\omega^\omega)}$. Domeniul D_4 al lui V_4 este clasa cea mai mică ce satisface: (1) $D_4(1)$, $D_4(p_n)$, p_n fiind al n-lea număr prim, cu $p_0 = 2$, (2) dacă $D_4(x)$, atunci $D_4(2x)$, (3) dacă toţi $a_1, \ldots, a_n$ se află în D_4 şi oricare ar fi j, a_j nu conţine nici o parte care este un număr prim mai mare decît p_{i_j}, $0 < i_1 < \ldots < i_n$, atunci $D_4(p_{i_1}^{a_1} \ldots p_{i_n}^{a_n})$. $V_4(x, y)$ este cea mai restrînsă relaţie tranzitivă care satisface: dacă $x = 2^{p_{r_1}^{j a_1}} \ldots p_{r_n}^{a_n}$, $y = 2^{p_{s_1}^{k b_1}} \ldots p_{s_m}^{b_m}$, $j, k \geqslant 0$, $m, n \geqslant 0$, $0 < r_1 < \ldots < r_n$, $0 < s_1 \ldots < s_m$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, $D_4(x)$, $D_4(y)$, atunci $V_4(x, y)$, dacă sau (1) $m = n$,

$a_i = b_i$, $r_i = s_i$, și $j < k$ sau (2) există un t, $0 \leqslant t < m$, $r_n = s_m$, $a_n = b_m$, ..., $r_{n-t+1} = s_{m-t+1}$, $a_{n-t+1} = b_{m-t+1}$ și (i) $r_{n-t} < s_{m-t}$ sau (ii) $r_{n-t} = s_{m-t}$ însă $V_4(a_{n-t}, b_{n-t})$, sau (iii) $t = n$.

Exemplul 5. O extindere V_5 a lui V_4, care folosește toți întregii pozitivi. Domeniul D_5 este clasa cea mai mică, astfel încît: (1) $D_5(1)$, (2) dacă $D_5(x)$, atunci $D_5(2x)$, (3) $D_5(p_n)$, pentru $n \geqslant 0$, (4) dacă $a_1, ..., a_n$ sînt toți în D_5, $0 < i_1 < ... < i_n$, atunci $D_5(p_{i_1}^{a_1}, ... p_{i_n}^{a_n})$. Sînt deschise diferite căi de extindere a lui V_4 la un V_5 pe D_5. Calea pe care o alegem este următoarea. $V_5(x, y)$ este relația tranzitivă minimă care satisface: (1) dacă $V_4(x, y)$, atunci $V_5(x, y)$; (2) dacă $D_4(x)$ dar $-D_4(y)$, atunci $V_5(x, y)$; (3) dacă $x = 2^j p_r^a$, $y = 2^k p_s^b$, atunci $V_5(x, y)$, dacă și numai dacă sau (i) $p_r^a = p_s^b$, dar $j < k$, sau (ii) $b = p_r^a$ sau $V_5(p_r^a, b)$ sau (iii) $V_5(b, p_r^a)$, $a \neq p_s^b$, $- V(p_s^b, a)$, iar $r < s$ sau $r = s$ și $V_5(a, b)$; (4) dacă $x' = p_{r_1}^{a_1} ... p_{r_n}^{a_n}$, $y' = p_{s_1}^{b_1} ... p_{s_m}^{b_m} x = 2^j x'$, $y = 2^k y'$, $V_5(p_{r_i}^{a_i}, p_{r_{i+1}}^{a_{i+1}})$, $V_5(p_{r_i}^{b_i}, p_{r_{i+1}}^{b_{i+1}})$, atunci $V_5(x, y)$, dacă sau (i) $x' = y'$, $j < k$, sau (ii) există un i, $0 \leqslant i < m$, $a_n = b_m$, $r_n = s_m$, ..., $a_{n-i+1} = b_{m-i+1}$, $r_{n-i+1} = s_{m-i+1}$ și $V_5(p_{r_{n-i}}^{a_{n-i}}, p_{s_{n-i}}^{b_{n-i}})$ sau $i = n$.

Exemplul 6. Un sistem de notație pentru toate ordinalele α, $\alpha < \varepsilon_0$. Domeniul D_6 și ordonarea V_6 sînt de așa natură, încît: $1^* = 0$, $2^* = 1$. $(2^2)^* = \omega$, $a^* + 1 = (3^b)^*$ dacă $a = 2^b$, $a^* = (2^{a_1})^* + 1 + ... + (2^{a_m})^*$ dacă $a = p_1^{a_1} ... p_m^{a_m}$ și $- V_6(a_i, a_{i+1})$, $a^* + 1 = (ap_{m+1})^*$, dacă $a = p_1^{a_1} ... p_m^{a_m}$, $(2^b)^* = (2^a)^* \omega$, dacă $b^* = a^* + 1$, așadar, $(2^{(2^2)})^* = \omega^\omega$ etc. Mai exact, D_6 și V_6 sînt mulțimea cea mai mică, respectiv cea mai restrînsă relație tranzitivă, astfel încît: (1) $D_6(1)$, $V_6(1, 2)$; dacă $D_6(a)$, atunci $D_6(2^a)$; (3) dacă, pentru orice i, $D_6(a_i)$ și $- V_6(a_i, a_{i+1})$, atunci $D_6(p_1^{a_1} ... p_n^{a_n})$ și $V_6(2^{a_1}, p_1^{a_1} ... p_n^{a_n})$; (4) dacă $D_6(p_1^{a_1} ... p_n^{a_n})$ și $D_6(p_1^{b_1} ... p_m^{b_m})$, atunci $V_6(p_1^{a_1} ... p_n^{a_n} ... p_m^{b_m})$, dacă și numai dacă există un i, $0 \leqslant i < m$, $a_1 = b_1$, ..., $a_i = b_i$, și totodată sau $i = n$ sau $V_6(a_{i+1}, b_{i+1})$; (5) dacă $V_6(a_1, b)$ și $D_6(p_1^{a_1} ... p_n^{a_n})$, atunci $V_6(p^{a_1} ... p^{a_n}, 2^b)$. În acest sistem, conform lui (3) și (5), dacă $V_6(a, b)$ atunci $V_6(2^a, 2^b)$; conform (3), $p_1^{a_1} ... p^{a_n}$ reprezintă un număr ordinal numai dacă fiecare a_i este notația lui 1 sau a unui ordinal limită.

Exemplul 7. Dacă folosim pentru ordinale limită, nu numai puterile lui 2, ci și puterile tuturor p_{2n}, $n \geqslant 0$, obținem un sistem care coincide, în esență cu reprezentarea studiată la Ackermann 1951 și Schütte 1954. Avem iarăși, $1^* = 0$, $2^* = 1$. Dar $(p_1^{b_1} ... p_m^{b_m})^* = b_1^* + 1 + b_2^* + b_3^* + ... + b_m^*$, $(3^a)^* = a^* + 1$. dacă a* este 1 sau un ordinal limită, $(ap_{2m+1}^2)^* = a^* + 1$, dacă $a = p_1^{b_1} .., ... p_{2m-1}^{b_m}$, $(2^b p_{2t_2}^{a_2} ... p_{2t_n}^{a_n})^* = c^* \omega$, dacă $c = 2^{a_1} p_{2t_2}^{a_2} ... p_{2t_n}^{a_n}$ și $c^* = b^* + 1$. Complicația suplimentară rezidă în ordonarea notațiilor pentru numerele ordinale limită. Domeniul D_7 și ordonarea V_7 constituie cea mai mică mulțime, respectiv cea mai restrînsă relație tranzitivă, astfel încît: (1), $D_7(1)$, $V_7(1, 2)$; (2) dacă $D_7(a_1)$, ..., $D_7(a_n)$, $n > 0$, $t_j < t_{j+1}$, atunci $D_7(p_{2t_1}^{a_1} ... p_{2t_n}^{a_n})$; (3) dacă $b_1, ..., b_m$ sînt în D_7 de forma respectivă din (2) și $V_7(b_i, b_{i+1})$, atunci $V_7(b_j, p_1^{b_1} ... p_{2m-1}^{b_m})$, pentru fiecare j; (4) dacă $D_7(p_1^{a_1} ... p_{2m-1}^{a_m})$ și $D_7(p_1^{b_1} ... p_{2n-1}^{b_n})$, atunci $V_7(p_1^{a_1} ... p_{2m-1}^{a_m}, p_1^{b_1} ... p_{2n-1}^{b_n})$, dacă și numai dacă există un i, $0 \leqslant i < n$, $a_1 = b_1$, ..., $a_i = b_i$ și totodată sau $i = m$ sau $V_7(a_{i+1}, b_{i+1})$; (5) dacă $D_7(c)$, $D_7(d)$, $c = p_1^{a_1} ... p_{2m-1}^{a_m}$ și $d = p_{2t_1}^{b_1} ... p_{2t_n}^{b_n}$, atunci $V_7(c, d)$,

dacă şi numai dacă $V_7(a_1, d)$; (6) dacă $c = p_{2s_1}^{a_1} \dots p_{2s_n}^{a_n}$, $d = p_{2t_1}^{b_1} \dots p_{2t_m}^{b_m}$, $D_7(c)$, $D_7(d)$, atunci $V_7(c, d)$, dacă şi numai dacă sau (i) există un i, $1 \leqslant i \leqslant m$, $b_i = c$ sau $V_7(c, b_i)$, sau (ii) nu există nici un i, astfel încît $a_i = d$ sau $V_7(d, a_i)$, dar există un j, $0 \leqslant j < m$, astfel încît $t_m = s_n$, $b_m = a_n$, ..., $t_{m-j+1} = s_{n-j+1}$, $b_{m-j+1} = a_{n-j+1}$ şi, totodată, sau (iia) $s_{n-j} < t_{m-j}$, sau (iib) $s_{n-j} = t_{m-j}$, dar $V_7(a_{n-j}, b_{m-j})$, sau (iic) $j = n$.

§ 3. CLASA B A LUI CHURCH-KLEENE ŞI O NOUĂ CLASĂ C

Sistemul 0 de notaţie aplicat de Church şi Kleene sugerează un prototip general relativ la orice clasă numerabilă de funcţii de la întregi pozitivi la întregi pozitivi.

Definiţia 6. Un sistem normal de notaţie pentru ordinale bazat pe o clasă numerabilă de funcţii $f_1, f_2, \dots$ de la întregi pozitivi la întregi pozitivi este o bineordonare V, care este cea mai mică relaţie tranzitivă, astfel încît (1) V (1, 2), (2) dacă V (1, x) atunci V (x, $2x$), (3) (dacă (n) (Em) $f_i((n) = m$ şi (n) V ($f_i(n)$, $f_i(n+1)$), atunci (n) V ($f_1(n)$, 3^i). Sau, altfel, (1) $1^* = 0$, (2)$(2x)^* = x^* + 1$, (3) *dacă $f_i(n)$ este definit pentru fiecare n şi $V(f_i(n), f_i(n+1))$, atunci* $(3^i)^* = \lim (f_i(n))^*$.

De exemplu, clasa de funcţii ar putea consta din toate funcţiile analitice, în sensul din Kleene 1955 b sau din toate funcţiile de la întregi pozitivi exprimabile în teoria mulţimilor a lui Zermelo, sau din toate funcţiile general recursive într-o mulţime dată A de întregi pozitivi sau din toate funcţiile recursive Herbrand.

Similar, mai putem generaliza clasa bineordonărilor studiate de Turing, Markwald şi Spector în scopul definirii, pentru orice clasă de funcţii $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ... de la întregi pozitivi la întregi pozitivi, a subclasei acelor $f_i's$ care sînt bineordonări. De exemplu, se poate defini clasa tuturor bineordonărilor de forma $(\alpha)(Ex)\ R(a, b, \alpha, x)$ sau clasa celor de forma $(\alpha)\ (E\beta)(x)\ R(a, b, \alpha, \beta, x)$ şi aşa mai departe. Bineînţeles, numerele Gödel ale acestor bineordonări formează, la rîndul lor, mulţimi de întregi ale căror forme de predicate ar putea să prezinte interes.

Prin analogie cu identificarea funcţiilor efectiv calculabile cu cele general recursive, putem dori să identificăm funcţiile recursive Herbrand (Gödel, 1934, p. 26) cu funcţiile efectiv *definibile*. Funcţiile recursive Herbrand concordă cu funcţiile general recursive prin aceea că sînt întotdeauna definite prin mulţimi de ecuaţii de aceeaşi formă abstractă. Ele se deosebesc de acestea din urmă prin faptul că cerem numai existenţa unei funcţii unice care satisface ecuaţiile fără a pretinde însă ca valoarea pentru fiecare argument constant să fie derivabilă sau calculabilă pe baza ecuaţiilor.

De exemplu, $f(x) = 2f(x+1)$ este o definiţie recursivă Herbrand, dar nu o definiţie general recursivă, deşi funcţia definită este pur şi simplu funcţia constantă $f(x) = 0$. Următoarea definiţie dată de Kreisel defineşte o funcţie

recursivă Herbrand f, care nu este general recursivă, întrucît $f(m, 0) = 0$, dacă și numai dacă $(x) - T(m, m, x)$.

$$\begin{cases} f(m, n) = g(m, n, f(m, n+1)), \\ g(m, n, k) = 1 \equiv (Ex)\,(x \leqslant n \,\&\, T(m, m, x)), \\ g(m, n, k) = 2k \equiv -(Ex)(x \leqslant n \,\&\, T(m, m, x)). \end{cases}$$

Se mai pot adăuga parametri, reluînd această definiție, spre a arăta că toate funcțiile aritmetice sînt recursive Herbrand. Într-adevăr, Addison, Gregorczyk-Mostowski-Ryll-Nardzewski, Kuznețov demonstrează că este adevărat mai mult:

3.1. O funcție este recursivă Herbrand, dacă și numai dacă este reprezentată de un predicat hiperaritmetic.

Așadar, după Spector 1955, teorema 6, este posibil să demonstrăm:

3.2. Dacă în definiția lui O și ω folosim, în locul funcțiilor general recursive, funcții recursive Herbrand, obținem aceeași margine superioară ω_1.

Fiind dat, de exemplu, sistemul O de notații ordinale, s-ar părea că-l putem extinde în continuare, considerînd funcții recursive care reprezintă șiruri crescătoare de tip de ordine ω_1, pentru a obține noi sisteme de notații ordinale fără să apelăm la noțiunea fără restricții a „tuturor" șirurilor posibile de un tip ordinal dat, așa cum se obișnuiește în dezvoltările clasice ale teoriei numerelor ordinale. Dificultatea constă în găsirea unor locuri naturale de oprire în asemenea extinderi continue.

Prototipul general de extindere a unui sistem dat V cu domeniul D_V (pe care să-l numim a a-a clasă de numere) la următoarea clasă de numere este înfățișat în definiția de mai jos:

Definiția 7. Bineordonarea P pentru următoarea clasă de numere este cea mai restrînsă relație tranzitivă, astfel încît: (i) $V(x, y) \to P(x, y)$; (ii) $P(1, x) \to P(x, 2x)$; (iii) *dacă* $V(c, 2a)$, D_c *este a c-a clasă de numere definită de* V_c, *pentru toți* x *în* D_c (Ey) $(f_i(x) = y)$ *și pentru toți* x, y *în* D_c, $V_c(x, y) \to P(f_i(x), f_i(y))$, *atunci pentru toți* x *în* D_c, $P(f_i(x), 3^t\, 5^c\, 7^a)$.

În particular, luînd $<_0$ ca sistemul V dat, putem înlocui atît i cît și f_i prin e, care reprezintă o funcție arbitrară general recursivă (un număr Gödel al lui a).

Evident, extinderea poate fi continuată și putem lua chiar, după efectuarea unei infinități de atare extinderi, însăși reuniunea lor. Procedura luării reuniunilor trebuie să fie însă controlată întrucîtva, deoarece riscăm să trecem cu vederea anumite șiruri infinite de extinderi și nu ajungem la nimic precis, dacă nu dispunem de un mod prestabilit de păstrare a evidenței asupra extinderilor noastre. Făcînd uz de un analog al claselor de numere clasice ale lui Cantor și caracterizînd F (ordonarea întregilor 2^n), O, P ca prima, respectiv a doua și a treia clasă de numere, constatăm că putem introduce a a-a clasă constructivă de numere pentru orice notație ordinală constructivă a introdusă în prealabil. Fiecare clasă constructivă de numere este însă numerabilă și am putea vorbi despre faptul că ele au numere cardinale diferite, numai dacă ar fi să redefinim numerele cardinale prin restrîngerea corespondențelor biunivoce la genuri speciale convenabile.

Apelînd la a doua clasă clasică de numere, Church şi Kleene definesc în articolul lor din 1937 (pp. 20—21), în mod inductiv, o clasă B de numere ordinale constructive. Dacă în locul λ — simbolismului facem uz de funcţii general recursive, definiţia lor poate fi enunţată după cum urmează.

Definim prin inducţie transfinită pe a doua clasă clasică de numere o mulţime de reguli de reprezentare:

Regula 0: (i) 1 reprezintă numărul ordinal 0; (ii) dacă a reprezintă numărul ordinal α, atunci $2a$ reprezintă succesorul lui α.

Fiind dată regula γ, pentru fiecare γ, $\gamma \in \alpha$, avem:

Regula α: (i), (ii) şi (iiiα): Dacă (1) ι_α este cel mai mic ordinal care să reprezinte un întreg pozitiv care nu este atribuit de nici o regulă γ $(\gamma < \alpha)$; (2) $e(x)$ este o funcţie general recursivă (cu numărul Gödel e), astfel încît pentru toţi x şi y, dacă numărul ordinal reprezentat de x este mai mic ca acel reprezentat de y (conform oricărei reguli γ_1, $(\gamma_1 < \alpha)$), numărul ordinal reprezentat de $e(x)$ este mai mic ca cel reprezentat de $e(y)$ (conform oricărei reguli γ, $\gamma < \alpha$ sau $\gamma = \alpha$); şi (3) a, c reprezintă α, γ_1 conform unei reguli γ, $(\gamma < \alpha)$: atunci $3^e 5^c 7^a$ reprezintă limita β a şirului de tipul de ordine ι_{γ_1}, reprezentat de funcţia $e(x)$.

3.3. Clasa R de reguli este dată de: (1) Regula 0 aparţine la R; (2) pentru orice α, dacă pentru toţi γ, cu $\gamma < \alpha$, regula γ aparţine la R, atunci şi regula α aparţine la R; (3) pentru toţi α, regula α aparţine la R numai în virtutea lui (1) sau a lui (2).

Definiţia 8. Un număr pozitiv întreg a aparţine clasei B de notaţii ordinale dacă şi numai dacă există două ordinale β şi α astfel încît a reprezintă β conform regulii α şi regula α aparţine la R.

Conform regulilor din R, un acelaşi număr ordinal poate obţine, în general, o infinitate de reprezentări diferite. Deşi aici avem o singură regulă pentru orice ordinal, atunci cînd definim clasa B, fără să apelăm la numerele ordinale clasice, obţinem o regulă pentru fiecare notaţie în parte. Întrucît unul dintre scopurile noastre este de a înţelege mai bine ordinalele clasice pe baza ordinalelor constructive, pare indicat să definim clasa B fără întrebuinţarea explicită a ordinalelor clasice.

În acest scop, folosim o definiţie inductivă a lui B, definiţie care operează numai cu întregi pozitivi şi clase de asemenea întregi. În acelaşi timp, dacă înlocuim în cadrul definiţiei 7 nu numai pe i şi f_i prin e, ci şi pe (Ey) $(f_i(x) = y)$ prin (Ey) $T^{p_e}(e, x, y)$, obţinem atunci o metodă de extindere care ar conduce la clasa C.

Introducem cîteva abrevieri simple.

3.5. $L(b, e, X, P)$ este conjuncţia formulelor următoare:

3.5.1. $(x)\,(Ey)\,(X(b, 1, 2x) \to e(x) = y)$.

3.5.2. $(x)\,(y)\,(X(b, x, y) \to P\ (e(x), e(y)))$.

3.6. $N\ (u, X, P)$ este conjuncţia formulelor:

3.6.1. $(y)\,(P(1, y) \to P(y, 2y))$.

3.6.2. P este tranzitiv.

3.6.3. $(x)\,(y)\,(X([u/2],\ x,\ y) \to P(x,\ y))$.

3.6.4. $(b)\,(e)\,(x)\,((X([u/2],\ b,\ u)\ \&\ L(b,\ e,\ X,\ P)) \to P(e(x),\ 3^e5^b7^u))$.

3.7. $K(u,\ X,\ P)$ este conjuncția lui 3.6.1., 3.6.2 și:

3.7.3. $(b)\,(d)\,(k)\ ((X((u)_1,\ k,\ 2k)\ \&\ X((u)_0\,(k),\ b,\ d)) \to P(b,\ d))$.

3.7.4. $(b)\,(e)\,(x)\,((X((u)_2,\ b,\ u)\ \&\ L(b,\ e,\ X,\ P)) \to P(e(x),\ 3^e5^b7^u))$.

3.8. $F(x,\ y)$ este ordonarea naturală a tuturor întregilor pozitivi care sînt puteri ale lui 2 (adică a tuturor notațiilor de ordinale finite).

Definiția 9. Clasa B este $\mathfrak{Y}(Eu)D(u,\ 1,\ 2y)$, unde $D(u, v, w)$ este adevărat, dacă și numai dacă $X\ (u,\ v,\ w)$ este valabil pentru toți X care satisfac următoarele condiții:

B 1. $(u)\,(v)\,(w)\,(u = 1 \to (X(u,\ v,\ w) \equiv F(v,\ w)))$.

B 2. $(u)\,(v)\,(w)\,(a)\ (u = 2a \to (X(u,\ v,\ w) \equiv (P)\ (N(u,\ X,\ P) \to P(v,\ w))))$.

B 3. $(u)\,(v)\,(w)\,(f)\ \ (c)\ \ (a)\ \ (u = 3^f5^c\,7^a \to (X(u,\ v, w) \equiv (P)\ (K(u,\ X, P) \to$

$\to P(v, w))))$.

Prin aplicarea metodelor obișnuite de transformare a cuantorilor ajungem de la această definiție la următoarea teoremă.

Teorema 1. Există un predicat primitiv recursiv R astfel încît $B(a) \equiv (\alpha)\ (E\beta)(x)\ R(a,\ \overline{\alpha}(x),\ \beta(\overline{x}))$.

Cu o singură deosebire, definiția și teorema de mai sus au fost date la Wang 1957. Deosebirea consta în aceea că $B3$ era înlocuită acolo printr-o condiție mai simplă:

$B3'.\ x = 3^f5^c7^a \to (X(x,\ y,\ z) \equiv (Ek)(X(c,\ k,\ 2k)\ \&\ X(f(k),\ y,\ z)))$.

În analogie clasică, definiția mai simplă se mărginește la numerele ordinale care precedă cel mai mic ordinal α, astfel încît α = alef α. Definiția de acum este mai fidelă față de definiția inițială a lui Church-Kleene. Acest fapt a fost scos în evidență recent de către Kreider și Rogers, în corespondența lor. Aceștia au examinat, în continuare, chestiunea, au dat și au justificat în mod riguros două definiții apropiate și au demonstrat o teoremă mai tare, potrivit căreia B este exprimabilă și în forma $(E\beta)\ (\alpha)(Ex)\ S\ (a,\ \overline{\beta}\ (x),\ \overline{\alpha}\ (x))$. Autorului nu i este cunoscută o demonstrație că B nu poate fi exprimată în forma $(\alpha)\ (Ex)\ R\ (a,\ \overline{\alpha}\ (x))$. Ce-i drept, autorul dăduse inițial o demonstrație eronată că B poate fi exprimată în felul arătat mai sus. Se argumenta că $\equiv$ poate fi înlocuit prin $\leftarrow$ în $B2$ și $B3$. Rogers a subliniat că într-o atare definiție, intersecția nu satisface neapărat condițiile enunțate.

Clasa C cu recursivitate relativă poate fi tratată similar ca B.

3.9. $L^*\ (b,\ e,\ X,\ P)$ este conjuncția lui $L(b,\ e,\ X,\ P)$ și a:

3.9.3. $(M)\ ((z)\ (M(z) \equiv X(b,\ (z)_1,\ (z)_2)) \to (x)\,(y)\,(T^M(e,\ x,\ y) \equiv e(x) = y))$.

3.10. $N^*(u, X, P)$ se obţine din $N(u, X, P)$ eliminînd 3.6.3 şi înlocuind $L(b, e, X, P)$ în 3.6.4 prin $L^*(b, e, X, P)$.

3.11. $K^*(u, X, P)$ se obţine din $K(u, X, P)$ substituind L^* pentru L în 3.7.4.

Definiţia 10. Clasa C este $\hat{y}(Eu)D^*(U, 1, 2y)$, unde D^* este definit ca D cu N^* şi K^* înlocuind N şi K în B2 şi B3.

Va fi evident că cuantorul suplimentar (M) poate fi combinat cu cuantorul (P) în ambele locuri, în cadrul noii definiţii. Aşadar, avem din nou o teoremă similară.

Teorema 2. Există un predicat primitiv recursiv S astfel încît $C(a) \equiv (\alpha)(E\beta)(x)\ S(a, \bar{\alpha}(x), \bar{\beta}(x))$.

§ 4. FUNCŢII PARŢIAL RECURSIVE HERBRAND

O definiţie recursivă Herbrand este, în esenţă, o condiţie recursivă $R(\bar{\alpha}(n))$, astfel încît există o funcţie unică α_0 care satisface R pentru toţi n. Natural, în locul unei condiţii recursive putem folosi, de asemenea, să zicem, o condiţie aritmetică sau hiperaritmetică, în care caz vorbim de definiţie aritmetică Herbrand respectiv definiţie hiperaritmetică Herbrand. Dar întrucît, datorită echivalenţei dintre hiperaritmetică şi recursiv-Herbrand, un predicat este recursiv Herbrand, dacă şi numai dacă este de ambele forme 1 funcţie-cuantor, clasa predicatelor aritmetice Herbrand sau clasa predicatelor hiperaritmetice Herbrand este aceeaşi cu clasa predicatelor recursive Herbrand. În general, putem să demonstrăm uşor următorul enunţ:

4.1. Dacă o condiţie arbitrară fără cuantori $C(\bar{\alpha}(n))$ cu o unică soluţie α_0 conţine numai predicate exprimabile în ambele forme n funcţie-cuantor, atunci predicatul $\alpha_0(a) = 0$ este de asemenea exprimabil în ambele forme n funcţie-cuantor.

Demonstraţie. Prin alegerea unor forme adecvate pentru toate predicatele din C, luînd apoi cuantori iniţiali şi contractîndu-i, condiţia poate fi şi ea exprimată în ambele forme n funcţie-cuantor. Dar

$$\alpha_0(a) = 0 \equiv (E\alpha)((n)\ C(\bar{\alpha})\ (n)) \ \&\ \alpha(a) = 0) \equiv (\alpha)((n)\ C(\bar{\alpha}(n)) \rightarrow \alpha(a) = 0).$$

Golul dintre funcţiile general-recursive şi cele recursive Herbrand este mare. Ne putem întreba dacă avem clase intermediare naturale de funcţii care nu se bazează pe ierarhia hiperaritmetică. Noţiunea de mai jos de semi-recursiv nu pare să fie nenaturală.

4.2. Fie $B(e, x, y)$ condiţia $(w)\ A(e, x, y, w)$ şi fie $A(e, x, y, w)$ o abreviere a condiţiei recursive că e este o mulţime de ecuaţii recursive care conţine o variabilă de funcţii f, y este ansamblul $ax + 1$ egalităţi.

$$f(0) = a_0 \ldots, f(x) = a_x,$$

$a_0, \ldots, a_x$ fiind numerale, și dacă w este o derivare (ca în definițiile general recursive) din e plus y, atunci concluzia nu este o egalitate între două numerale distincte.

Definiția 11. O mulțime de egalități — e — constituie o definiție semirecursivă dacă, oricare ar fi x, există un y astfel încît (i) $B(e, x, y)$; (ii) *pentru toți z distincți de y, dacă* $B(e, x, z)$, *atunci există un u mai mare decît x și o extindere v a lui z cu* $u + 1$ *ecuații* $f(0) = b_0, \ldots, f(u) = b_u$ *astfel încît* $B(e, u, v)$ *nu are loc. O funcție este semirecursivă dacă poate fi definită printr-un număr finit de definiții semirecursive. Noțiunea de „semirecursiv în" poate fi introdusă de asemenea într-o manieră similară celei în care a fost introdusă „recursiv în" cu excepția faptului că se va cere explicit ca orice număr finit de aplicări succesive ale schemei să fie permis.*

După cum se poate verifica, predicatul „e este semirecursiv" este de forma $(x)\,(Ey)\,(z)\,(Ew)\,R(e, x, y, z, w)$, cu R recursiv.

Teorema 3. Orice definiție semirecursivă admite o soluție unică.

Demonstrație. Condiția (ii) asigură unicitatea. Conform (i) și (ii) la un loc, pentru fiecare x există un segment unic pînă la x, care poate fi prelungit în mod nelimitat. Reuniunea acestor segmente trebuie să constituie o soluție, adică $(n)\ R(\bar{f}_0(n))$ este adevărat, R fiind mulțimea dată de ecuații și f_0 fiind reuniunea. Dacă $R(\bar{f}_0(n_0))$ nu este adevărat, formula putîndu-se schimba într-o formulă numerică numai prin substituții, urmează că o egalitate între două numerale distincte să fie derivabilă din ea, și deci din $(n)\ R(\bar{f}(n))$ plus ecuațiile auxiliare pentru $f(0)$ etc. și pînă la $f(n_c)$.

Să observăm că (i) nu este singur suficient pentru garantarea existenței unei soluții. De exemplu, $f(n) = 2f(n + 1)$, $f(0) \neq 0$ luate împreună satisfac (i), dar nu admit nici o soluție.

4.3. Fiecare funcție general recursivă este semirecursivă. Fiecare definiție semirecursivă este o definiție parțial recursivă, dar nu și reciproc.

Prima afirmație este evidentă. Cele două jumătăți ale ultimei afirmații pot fi constatate după cum urmează: soluția unei definiții semirecursive trebuie să includă toate valorile efectiv derivabile, astfel că consistența este asigurată; de exemplu, definiția parțial-recursivă $f(0) = 1$, $f(x + 2) = 2f(x)$ nu este semirecursivă.

Noțiunea care prezintă cel mai mult interes pentru studiul definițiilor predicative este aceea de funcții Herbrand parțial recursive. De exemplu, predicatele 0 și $<_0$ sînt parțial recursive Herbrand. Într-adevăr, însăși această noțiune este introdusă în vederea caracterizării unor atare predicate, precum și a definițiilor acestora din urmă.

Definiția 12. O condiție recursivă arbitrară $R(\bar{\alpha}(n))$ *este o definiție recursivă parțial Herbrand, dacă funcția parțială* α_0, *astfel încît*

$$\alpha_0(a) = b \equiv (\alpha)\,((n)R(\bar{\alpha}(n)) \rightarrow \alpha(a) = b)$$

satisface condiția, adică $(n)\ R(\bar{\alpha}_0)\ (n))$ *este adevărat. Aceasta este funcția definită de către definiție. O funcție este parțial recursivă Herbrand, dacă este definită printr-o definiție parțial-recursivă Herbrand sau printr-o succesiune*

de definiţii parţial recursive Herbrand. Noţiunea de „parţial recursivă Herbrand în" poate fi definită permiţind ca variabilele de funcţii să figureze în condiţiile definitorii.

Prin urmare, întrucît fiecare predicat aritmetic sau hiperaritmetic este parţial recursiv Herbrand, putem recurge la condiţii aritmetice şi hiperaritmetice, în locul condiţiilor recursive. Aşadar, $<_0$, de exemplu, este parţial recursivă Herbrand şi toate predicatele de forma $(\alpha)\,(Ex)\,R(a, \overline{\alpha}(x))$ sînt parţial recursive Herbrand. Fiind dată o condiţie fără cuantori, în care toate predicatele sînt de ambele forme cuantoriale, condiţia însăşi este de asemenea de ambele forme. Dar $(\alpha)\,((n)\,(\beta)\,C \to D)$ poate fi transformată în $(\alpha)\,(En)\,(E\beta)\,(C \to D)$. Aşadar, în conformitate cu Addison-Kleene 1957, formula (1), avem:

4.4. Orice predicat parţial-recursiv Herbrand este de ambele forme cuantoriale.

Mai putem folosi şi exemple din Addison-Kleene, pentru a arăta că există predicate parţial recursive Herbrand care sînt de un hipergrad mai înalt decît 0. Aceasta demonstrează de asemenea că, spre deosebire de cazul funcţiilor parţial recursive, nu orice succesiune de definiţii parţial-recursive Herbrand poate fi înlocuită printr-o singură definiţie.

Interesul pe care-l prezintă predicatele parţiale Herbrand pentru studiul definiţiilor predicative izvorăşte din convingerea că dacă predicatele care figurează explicit într-o definiţie inductivă sînt predicative, atunci şi predicatul determinat prin această definiţie inductivă este predicativ. Dar cel mai simplu mod de a caracteriza acele condiţii care sînt într-adevăr definiţii inductive pare să fie tocmai cerinţa ca intersecţia tuturor mulţimilor ce satisfac condiţia să satisfacă de asemenea condiţia şi să fie în fapt mulţimea căutată. Prin urmare, o definiţie inductivă nu este decît o condiţie care stipulează că toate obiectele care satisfac condiţia aparţin mulţimii şi că un obiect aparţine mulţimii numai dacă acest lucru este cerut în mod pozitiv de către condiţie.

S-ar părea că aceasta ne duce la concluzia că toate predicatele parţial recursive Herbrand sînt predicative. Dar s-ar putea să existe alte argumente împotriva presupunerii că definiţiile inductive, plecînd de la un material dat, sînt întotdeauna acceptabile din punct de vedere predicativ. Se mai pune şi problema iterării de o infinitate de ori a schemei parţial recursive. Trecem la aceste chestiuni în legătură cu o discuţie generală a noţiunii de predicativitate.

§ 5. TEORIA PREDICATIVĂ A MULŢIMILOR

Soluţia dată de Richard la paradoxul cunoscut sub numele său l-a condus pe Poincaré la o formulare a principiului cercului vicios de care Russell a făcut uz în mod masiv. Explicaţia generală, destul de inexactă, pe care aceştia o dau principiului, în aparenţă natural, lasă loc la diverse interpretări. De aceea, se pare că e necesar să explicităm numeroasele alegeri contrastante pe care le putem face fără să contrazicem principiul fundamental al cercului vicios.

5.1. Principiul cercului vicios: dacă, în ipoteza că o anumită colecție are un total, ea ar conține numai membri definibili în termenii acelui total, atunci colecția amintită nu are nici un total (Whitehead și Russell, p. 37); sau, exprimîndu-se succint, nici o totalitate nu poate conține membri definibili numai în termenii acestei totalități.

În locul expresiei „definibilă numai în termeni de", Russell vorbește și despre „implicare" și „presupunere". La Gödel, 1944, se subliniază că aceste versiuni diferite nu sînt echivalente pentru cineva care concepe clasele ca pluralități existente independent de cunoașterea și definițiile noastre. Acesta ar spune că avem definiții acceptabile care, deși violează 5.1, nu violează formulările alternative. După cum se pare însă, este limpede că intenția inițială constă în a avea de-a face cu definiții (intensiuni) și nu cu entități (ca la Cantor) sau cu demonstrații (ca la Brouwer). Iată de ce Russell privea ca echivalente diversele formulări. Pentru ceea ce urmărim, se pare că lucrul cel mai indicat este să aderăm la 5.1.

Pe de altă parte, există și un sens în care avem de-a face cu obiecte, și nu cu definiții. Aceasta se vede din faptul că expresia „în termeni de" primește înaintea sa calificarea „numai". Cu alte cuvinte, principiul este îndreptat către introducerea a noi obiecte. După introducerea în mod satisfăcător a unui domeniu, folosirea unei caracterizări impredicative în vederea identificării sau selectării unui obiect în cadrul domeniului nu mai suscită nici o obiecție. De exemplu, dacă admitem ca dată totalitatea tuturor întregilor pozitivi, nu se mai ridică nici o obiecție împotriva utilizării operatorului celui mai mic număr pentru specificarea unui principiu de selecție din totalitatea dată; sau, dacă admitem o clasă dată de numere reale, nu se ridică nici o obiecție împotriva faptului de a vorbi despre un maxim al clasei.

De fapt, se obiectează nu împotriva caracterizărilor impredicative ca atare, ci numai împotriva folosirii lor ca mijloc de a introduce un obiect pentru prima dată. Nu se obiectează împotriva folosirii, în cadrul unei caracterizări propuse, a unor variabile legate al căror domeniu predeterminat conține orice obiect ce poate satisface caracterizarea, ci se obiectează numai împotriva condițiilor care propun introducerea obiectelor noi și totuși fac uz de variabile legate care conțin obiectele ce urmează să fie introduse. În acest din urmă caz, domeniul variabilelor nu este încă determinat în acel moment și poate fi afectat de această definiție sau de altele care urmează să fie introduse și depind de ea. Există atunci un cerc în procesul determinării domeniului variabilei: domeniul variabilei depinde de constituția obiectului (de regulă, o mulțime) care va fi introdus prin condiția respectivă însă structura obiectului depinde, la rîndul ei, de domeniul variabilelor. Principiul 5.1 respinge anumite utilizări ale variabilelor legate și anume pe cele în care membrii unor clase se pot defini numai făcînd apel la aceste variabile legate. Aceasta echivalează cu a spune că variabilele legate pot fi întrebuințate în vederea introducerii unui obiect nou numai atunci cînd domeniul lor este deja determinat la momentul respectiv. Aceasta înseamnă că domeniul nu trebuie să se modifice o dată cu introducerea obiectelor noi. Cu alte cuvinte, obiectele noi trebuie introduse numai treaptă cu treaptă, fără să se perturbe aranjamentul lucrurilor în prealabil introduse sau fără ca determinarea lor să depindă de obiecte care urmează să fie introduse pe o treaptă ulterioară.

Recent, Hintikka, 1956, susţine că avem două principii neechivalente ale cercului vicios, unul mai slab, al lui Russell, şi altul mai tare, al lui Poincaré. Principiul mai slab este interpretat ca însemnînd că variabilele legate sînt admisibile într-o condiţie care introduce un obiect nou x atîta timp cît x însuşi nu aparţine domeniului lor. Această interpretare amuzantă se bazează, după cum se pare, pe o neînţelegere introdusă în mod forţat. Conform formulării literale a lui 5.1, citată mai sus, este clar că dacă constituţia lui x depinde de domeniu, atunci nu numai că domeniul nu trebuie să-l conţină pe x însuşi, dar el nu trebuie totodată să conţină nimic definibil numai în termenii lui x. Prin urmare, în cadrul teoriei propuse de Hintikka, orice condiţie Fy poate defini o mulţime x a tuturor obiectelor distincte de x care satisfac Fy, cu singura condiţie ca toate variabilele legate în Fy să fie restrînse prin clauza „distinct de x". Ulterior, Hintikka însuşi precum şi alţi autori au arătat inconsistenţa principiului. Raţionamentul simplu de mai jos ar stabili, în acelaşi timp, inconsistenţa şi ar scoate în evidenţă faptul că principiul lui Hintikka violează, într-adevăr, principiul cercului vicios. Fie ιy clasa unitate a lui y, $\breve{\iota} y$ clasa z, în cazul cînd ιz este y şi clasa vidă în caz contrar. Atunci, mulţimea K, definită prin:

$$y \neq K \rightarrow (y \in K \equiv (z)(z \neq K \rightarrow (y = \iota z \rightarrow y \notin \breve{\iota} z)))$$

duce la contradicţia $\iota K \in K \equiv \iota K \notin K$. Sursa dificultăţii este faptul că, deşi z nu poate fi însuşi K, poate fi însă, de exemplu, ιK, care este definibilă numai în termenii lui K.

Mai rămîne însă chestiunea fundamentală a modului în care trebuie să utilizăm domeniile, chestiunea genurilor de definiţii admise în introducerea domeniilor sau totalităţilor, chestiunea substanţei de bază şi a felului în care urmează să fie reunite în cadrul unui nou domeniu acceptabil obiectele noi. Poincaré, Weyl, Lorenzen nu pregetă să facă apel la numerele naturale date de Dumnezeu şi la definiţiile prin inducţie matematică, în timp ce Russell a persistat în dorinţa lui de a obţine numere din mulţimi după ce în prealabil el adoptase „teoria fără clase" pentru mulţimi. Înainte de a reveni la problema centrală a definiţiilor admisibile, este cazul să trecem succint în revistă încercările pozitive de construire a matematicii pe o bază predicativă.

Binecunoscuta teorie a tipurilor a lui Russell este un *mixtum compositum* de doctrine provenite din diverse surse. În pofida faptului că axioma infinitului este folosită numai cu o totală lipsă de entuziasm şi apoi numai ca o ipoteză, iar numerele naturale trebuie definite ca mulţimi complicate, Russell n-a ezitat totuşi să utilizeze numerele ca indici de tip şi de ordine. Amestecarea tipurilor este interzisă pe motiv că, în caz contrar, am obţine propoziţii nesemnificative. Aceasta nu rezultă din principiul cercului vicios, deoarece fiind dată o totalitate de obiecte şi o totalitate de mulţimi a acestor obiecte, acest principiu nu este încălcat dacă scufundăm cele două totalităţi în una singură şi recurgem la variabile pe noua mulţime totală care rezultă în acest fel. Însă Russell stipulează o uzanţă pentru cuvîntul „nesemnificativ", astfel încît o propoziţie ca „mulţimea tuturor întregilor pozitivi este un întreg pozitiv" să nu poată fi considerată ca fiind falsă (deşi avînd un înţeles), ci doar ca nesemnificativă (adică lipsită de înţeles). Argumentaţia care se sprijină pe „inspectarea directă" (Whitehead-Russell, p. 48) se pare că se bazează pe confundarea lui Φx cu $\Phi \hat{x}$. Prima expresie prezintă o ambiguitate care trebuie

să fie eliminată și ea nu poate fi utilizată în mod semnificativ ca subiect al unei propoziții; dar a doua expresie nu se află în acest caz. Astfel, se pare că există cel puțin două direcții în care nu este necesar să-l urmăm pe Russell în ce privește utilizarea abordării predicative: noi presupunem numerele naturale atunci cînd le folosim ca indici, iar dacă am obținut alte numere ordinale la fel de bine, nu este nici un motiv logic concludent care să ne constrîngă să ne oprim la indici numere naturale; iar dacă este mai convenabil să considerăm tipuri mixte, atunci nici principiul cercului vicios, nici chestiunea „ambiguității funcționale" nu pot să ne împiedice.

În 1925, Russell a încercat să derive inducția matematică din teoria sa ramificată a tipurilor. O eroare în această derivare a fost pusă în evidență de către Gödel (1944). De fapt, este ușor să demonstrăm că ceea ce a încercat Russell nu se poate face, deoarece inducția relativ la mulțimile de ordin mai mare poate caracteriza complet mulțimile de ordin mai mic și deci nici un număr finit de ordine nu poate oferi principiul inducției pentru orice ordin. Dar inducția matematică se poate obține cu ajutorul axiomei de întemeiere *(Fundierungsaxiom)* care trebuie să fie adevărată pentru mulțimile predicative.

Oricum, în construcția lui Russell este clar un lucru: el este totdeauna gata să accepte ceea ce am putea denumi ca „extinderi imediat predicative". Fiind date o mulțime de obiecte și o mulțime de predicate ale acestor obiecte, el vrea să accepte toate mulțimile $\hat{x}Fx$, unde x variază pe domeniul obiectelor, iar F este o formulă arbitrară, obținută din predicatele date cu ajutorul combinațiilor din cadrul funcțiilor de adevăr și al variabilelor legate al căror domeniu de variații este domeniul obiectelor date.

La Weyl (1918), numerele naturale se consideră date inițial iar mulțimile de numere naturale și mulțimile de mulțimi sînt introduse în același chip la fiecare nivel finit. Dar Weyl permite variabile legate numai pe numere naturale și nicidecum pe mulțimi. Weyl susține că, în caz contrar, am obține numere reale de diferite ordine și că analiza care ar rezulta ar fi „artificială și impracticabilă" întrucît „ea ar părăsi propriul ei obiect de cercetare, și anume numerele naturale". Este foarte plauzibil ca alegerea lui Weyl să fi fost o opțiune înțeleaptă. Dacă se pune alternativa sau de a utiliza teoria lui Weyl, sau de a utiliza teoria mai largă care admite variabile legate pe mulțimi, apoi utilizarea teoriei lui Weyl pare să fie mai firească. De exemplu, cea mai mică margine superioară dă o versiune slăbită în mod natural, care tratează toate șirurile de numere reale, dar nu mulțimile de numere reale, în timp ce cealaltă alternativă ar conduce imediat la o structură nesfîrșită și ar invita la noi extinderi.

O atare extindere a fost realizată de către Lorenzen în 1951, cu observația interesantă că, de exemplu, dacă luăm reuniunea tuturor numerelor reale de ordin finit și reuniunea tuturor mulțimilor de ordin finit, atunci cea mai mică margine superioară a oricărei mulțimi mărginite din a doua reuniune se află întotdeauna în prima reuniune. La prima vedere, aceasta pare să rezolve dificultățile principale care apar în dezvoltarea analizei clasice pe baza abordării predicative, dar de fapt se ridică în mod inevitabil probleme noi. Abordarea lui Lorenzen este prezentată într-un cadru „operativ" care prezintă multe aspecte stimulatoare pe care autorul cu greu le-ar putea aprecia. În Wang 1954 se schițează o dezvoltare apropiată ca o abordare independentă

a fundamentelor obţinută mai mult sau mai puţin în întregime pe baza tradiţiei axiomatice a teoriei mulţimilor. Kreisel şi Schütte au observat că cele două dezvoltări sînt, în esenţă, similare, în timp ce alţi autori au găsit că schema mai convenţională din a doua lucrare este mai satisfăcătoare. Totuşi nu s-a făcut nici o comparaţie amănunţită a celor două metode, poate că din cauza deosebirilor radicale în detaliile formale. Poate că o atare comparaţie nici nu este necesară, întrucît amîndouă punctele de vedere se pare că lasă nerezolvate problemele centrale care prezintă dificultăţi fundamentale.

Deosebirea principală faţă de teoria lui Russell constă în renunţarea la utilizarea ordinului sau nivelului de indice transfinit. Dar în acest caz se pune, în mod natural, întrebarea pînă unde este permis să înaintăm. Nu este admisibil să spunem că nu trebuie să ne preocupăm de aceasta pentru că orice ordinal limită va fi mai mult sau mai puţin suficient pentru a lăsa intactă analiza clasică şi sîntem destul de bine familiarizaţi cu ordinalele limită mici. În măsura în care alegerea ordinalelor rămîne arbitrară, nu putem vorbi de o teorie încheiată. Discutarea acestei chestiuni nu este concludentă nici la Wang 1954, nici la Lorenzen în 1955 şi nici la Lorenzen 1958.

La Wang 1954 (p. 261) se susţine că, neîndoielnic, toţi ordinalii recursivi, în sensul lui Church şi Kleene, sînt admisibili, aşa încît putem să începem cu mulţimea vidă sau cu mulţimea numerelor naturale, să realizăm extinderea predicativă imediată la fiecare succesor ordinal recursiv, să luăm reuniunea la fiecare ordinal recursiv limită. Apoi se mai spune acolo că am putea, de asemenea, permite toate ordinalele care sînt tipuri de ordine a relaţiilor din teoria astfel obţinută, care se întîmplă să fie bineordonări şi că acest proces poate fi continuat. Pe vremea aceea, autorul considera că în acest chip putem obţine mult mai mult decît cu ajutorul ordinalelor recursive. S-a dovedit că autorul greşea, deoarece teorema 6 a lui Spector 1955 dă rezultatul surprinzător că în acest chip nu se obţin ordinale dincolo de cele recursive. Aşadar, cel puţin în ce priveşte această posibilitate particulară de extindere problema este rezolvată. Însă, în prezent, autorul este de părere că sînt şi alte căi de extindere care nu pot fi excluse pe baza principiului cercului vicios şi de aceea el preferă să denumească teoria tipurilor ramificate împreună cu toate ordinalele recursive ca indici „o teorie a mulţimilor hiperaritmetice". Această teorie are şi multe alte trăsături atractive şi vom reveni mai tîrziu la ea.

Există o distincţie între variabilele libere şi variabilele legate, devenită astăzi familiară în urma interesului trezit de funcţiile recursive şi teoria demonstraţiei, distincţie care se pare că a fost trecută cu vederea în abordarea clasică a principiului cercului vicios. Astfel, distincţia dintre un predicat recursiv şi un predicat aritmetic este astăzi superfluă. După Russell, un predicat presupune domeniul argumentelor sale aşa încît atît un predicat aritmetic arbitrar, cît şi un predicat recursiv presupun, în aceeaşi măsură, totalitatea numerelor naturale. Deşi ne-am simţit înclinaţi să spunem că predicatele recursive nu presupun totalitatea numerelor naturale sau cel puţin n-o presupun în acelaşi fel ca predicatele nerecursive, iar dacă noţiunea de predicativitate este atît de restrînsă încît nu este chip să demonstrăm că mulţimea numerelor naturale este predicativă, totuşi pare natural să presupunem că mulţimile recursive de obiecte arbitrare obţinute dintr-un anumit număr finit de obiecte simple, cum ar fi turnul Eiffel sau mulţimea vidă prin proceduri recursive, sînt predicative. Dar autorul consideră că această distincţie este cu totul îndepărtată de spiritul principiului cercului vicios şi că ea

este o rafinare care se poate obține numai cu ajutorul unor noțiuni constructive mai tari. Încercările de a asimila predicativitatea cu calculabilitatea par, în etapa actuală, mai curînd să genereze confuzii decît să ajute la sinteze. În definitiv, mulțimea numerelor naturale se poate obține ușor dintr-un singur obiect printr-o operație efectivă și atunci cum de ne poate interzice principiul cercului vicios cuantificarea pe toate numerele naturale?

Căutînd puritatea, putem dori să începem cu mulțimea vidă și să construim toate mulțimile finite bazate pe ea cu ajutorul principiului că fiind dați x și y putem lua reuniunea lui x cu mulțimea unitate a lui y. Am vrea să spunem că toate aceste mulțimi finite sînt predicative. Dar cum vom continua pentru a obține mulțimi infinite? De fapt, cum de putem vedea dintr-odată că putem obține toate aceste mulțimi finite ca și un număr finit dintre ele, dacă nu vrem să acceptăm o formă sau alta a caracterizării inductive? Poincaré, Weyl și Lorenzen au exprimat, în mod explicit, că sînt gata să facă uz de definiții inductive, în timp ce reținerea lui Russell l-a condus la dificultatea artificială a axiomei infinitului. Dar atunci cînd definițiile inductive sînt convertite în definiții explicite prin metoda lui Frege și Dedekind, rezultatele sînt definit nepredicative. Metodele lui Zermelo, Grelling și Bernays evită axioma infinității, adică recurg doar la ipoteza că există o infinitate de mulțimi, dar nu la ipoteza că există o mulțime infinită sau fac uz de cuantificare pe toate mulțimile finite, dar nu fac uz de cuantificare pe mulțimile infinite de mulțimi finite. Totuși totalitatea mulțimilor finite trebuie să fie presupusă. Deoarece nu vrem să ne încredințăm unui număr fix de mulțimi finite, se pare că nu putem scăpa de acceptarea definițiilor inductive ca instrument legitim pentru a introduce domenii noi și mulțimi noi.

Această relaxare poate fi obținută verbal pe două căi diferite. Ne putem restrînge la utilizarea doar a definițiilor explicite și să suplimentăm 5.1 printr-un principiu pozitiv, care permite definiții inductive, sau deoarece nu ne putem angaja la definiții explicite în cadrul principiului cercului vicios, putem permite definiții implicite, care par să nu dea loc la obiecții în lumina naturii lor, independent de ceea ce se întîmplă cu el atunci cînd sînt traduse în definiții explicite. Atunci rămîne problema caracterizării clasei definițiilor implicite acceptabile. Sau, dacă ne decidem să indentificăm această clasă cu aceea a definițiilor inductive, obținem o determinare exactă a acesteia din urmă.

Acum trebuie să facem o alegere din cel puțin următoarele clase: clasa definițiilor primitive recursive, clasa definițiilor general recursive, clasa definițiilor recursive Herbrand sau clasa definițiilor aritmetice Herbrand și clasa definițiilor parțial recursive Herbrand. Se întîmplă că dacă utilizăm vreuna dintre primele trei clase și permitem folosirea ca indice a oricărui ordinal care este tip de ordine a unei relații acceptabile de bineordonare, obținem una și aceeași teorie: teoria hiperaritmetică a mulțimilor. De aceea, ne putem limita la compararea meritelor și lipsurilor apelului la definițiile aritmetice Herbrand cu apelul la definițiile partial recursive Herbrand. După cum am observat mai sus, aplicarea succesivă a acestui din urmă tip de definiție oferă o clasă mai largă de predicate. Acum, dacă utilizăm condiții aritmetice, dar de fiecare dată permitem o singură aplicare a schemei parțiale Herbrand, atunci obținem o clasă mai largă decît cea aritmetică Herbrand, dar mai restrînsă decît cea parțial recursivă Herbrand, conținînd exact predicatele

care se pot pune în forma $(\alpha)(Ex)\, R\,(a, \overline{\alpha}\ (x))$, R fiind recursiv, în particular O şi $<_0$. Vom spune că această clasă este clasa predicatelor aritmetice semi-Herbrand.

Se pare că Lorenzen (1958) propune identificarea mulţimilor inductive cu mulţimile aritmetice semi-Herbrand, dar poate că conceptul său de „reflectare" serveşte de fapt la restrîngerea mulţimilor inductive la mulţimile aritmetice Herbrand. În susţinerea restricţiei la definiţii aritmetice Herbrand, se poate argumenta că o definiţie implicită va determina complet toţi membrii, ca şi toţi nemembrii mulţimii definite, în cazul de faţă pe baza totalităţii acceptate a numerelor naturale şi a interpretării vizate. Aceasta este adevărat pentru definiţiile aritmetice Herbrand, dar nu pentru cele semi-Herbrand care determină într-un mod clar pe toţi membrii care nu-i determină direct pe nemembri (a se compara cu Kreisel 1959). Nu este uşor să precizăm această argumentare fără a introduce principii adiţionale de preferinţă, cum ar fi proprietăţile deosebit de atractive ale mulţimilor hiperaritmetice, cu observaţia că alte mulţimi ca 0 sînt lipsite de aceste proprietăţi fermecătoare. Deoarece O este un predicat complet pentru toate predicatele aritmetice semi-Herbrand şi deoarece O se poate obţine din $<_0$ într-un fel bine determinat, ne putem concentra atenţia asupra definiţiei lui $<_0$. Aici pare clar că mulţimea este determinată etapă cu etapă, pornind de la definiţie, cu condiţia să presupunem totalitatea numerelor naturale, interpretarea vizată pentru ea şi anumite funcţii recursive. Se pare că determinarea se referă atît la membri cît şi la nemembri.

În orice caz nu se pune chestiunea de a respinge afirmaţia că definiţiile aritmetice semi-Herbrand sînt inductive; se discută doar dacă predicatele definite inductiv în acest fel sînt sau nu acceptabile în orice context. Cu aceasta se pare că ne-am depărtat mult de intenţiile iniţiale ale celor care încearcă să dezvolte noţiunea de predicativitate; trebuie să facem apel la un alt criteriu pentru definiţiile implicite acceptabile. În afară de problema, în parte terminologică şi în parte istorică, a „adevăratei" noţiuni a predicativităţii, este indubitabil că asemenea criterii vor ajuta la stabilizarea domeniului foarte atractiv pe care-l reprezintă teoria hiperaritmetică a mulţimilor.

Dacă vrem să acceptăm definiţiile inductive, atunci a ne opri la mulţimile aritmetice semi-Herbrand pare să fie o decizie cu totul arbitrară. Un argument ar fi caracterul central, din punct de vedere antropologic, al numerelor naturale. Indiferent cum vrem să obţinem numerele naturale, este evident că ele sînt ceea ce dorim noi; iar o dată ce le avem nu ne putem opri înainte de a fi exploatat tot ce putem face cu ajutorul cuantificării asupra lor, precum şi al utilizării definiţiilor inductive. Însă nu trebuie neapărat să ne încurcăm în extinderi mai ample, cum ar fi combinarea definiţiilor inductive cu cuantificarea pe toţi membrii noii totalităţi O. Logic, acest argument nu este cu totul satisfăcător, căci în extinderile ulterioare se pare că nu facem altceva decît ceea ce am făcut şi în extinderile anterioare. Dacă însă obiectivul este de a obţine o teorie adecvată pentru dezvoltarea porţiunii celei mai mari din matematica clasică şi posedarea unei măsuri de completitudine, atunci apar motive de înţeles pentru a ne opri la domeniile restrînse mai bine dezvoltate, cum ar fi mulţimile aritmetice semi-Herbrand şi mulţimile aritmetice Herbrand.

Dacă însă folosim principiul 5.1, cu clauza că se face uz de toate definițiile inductive care conțin explicit numai noțiuni deja introduse, atunci se pare că ajungem la următoarea teorie:

☞ **5.2.** Mulțimile predicative satisfac condițiile următoare:

(1) Mulțimea vidă este o mulțime predicativă.

(2) Procedura de a obține reuniunea lui x cu mulțimea unitate y, atunci cînd sînt date mulțimile x și y, este predicativă.

(3) Procedura de a obține o extindere imediat predicativă este predicativă.

(4) Procedura de a obține reuniunea unui șir de mulțimi predicative cu indici a căror limită este un număr ordinal predicativ este predicativă.

(5) Orice mulțime formată din mulțimi predicative date printr-o procedură predicativă este mulțime predicativă.

(6) Un ordinal care este tipul de ordine a unei relații predicative care este o bineordonare este un ordinal predicativ.

(7) O definiție inductivă conținînd explicit numai noțiuni predicative definește o mulțime predicativă.

(8) Fiind dat un ordinal predicativ, rezultatul iterării unei scheme de definiție inductivă de atîtea ori de cîte ori funcționează ordinalul este nu mai puțin o mulțime predicativă.

(9) Mulțimile predicative satisfac axiomele uzuale de extensionalitate și fundare.

O descriere mai formală este dificil de realizat din cauza nevoii de a specifica mai exact definițiile inductive și aplicarea lor iterată. În măsura posibilului, evident că este dorit o descriere a totalității mulțimilor predicative care să recurgă la minimum la teoria clasică a mulțimilor. Deoarece însă pare să fie mai ușor să urmărim chestiunea, făcînd apel, în mod liber, la teoria clasică a mulțimilor, vom încerca să descriem mulțimile predicative în cadrul sistemului standard codificat, în particular, de Gödel (1940).

§ 6. DOUĂ ÎNCERCĂRI DE A DEFINI MULȚIMILE PREDICATIVE

Dacă luăm teoria mulțimilor prezentată de Gödel în 1940 și adăugăm axioma $V = L$, atunci putem spune, pur și simplu, că o mulțime este predicativă, dacă ordinul ei, așa cum este definit aici, este un ordinal predicativ. Aceasta nu ajută prea mult, deoarece se pare că am prefera să definim un ordinal predicativ ca mulțime predicativă care este și ordinal. Complicația constă, în esență, în aceea că, în afară de principiile uzuale cuprinse în extinderile predicative imediate, mai avem nevoie și de principiul extinderii cu ajutorul definițiilor inductive. Astfel, fiind dată mulțimea tuturor mulțimilor de un ordin dat, putem obține mulțimile de ordin următor făcînd uz nu numai de operațiile incorporate în grupul de axiome B, dar și de operațiile inductive pe mulțimile date. Aceasta se poate formula exact într-o teorie mai amplă, astfel încît obținem un model întrucîtva mai complicat, în care continuăm să folosim ordinalele ca indici, dar în care procedura de trecere de la un ordin la cel următor este mai complicată.

De fapt avem nevoie de o enumerare a tuturor condițiilor $C(x)$, unde toate variabilele care figurează în C, cu excepția variabilei de mulțime nerestrînsă

x, sînt restrînse la mulţimea tuturor mulţimilor de ordin dat. Acestea se pot enumera cu ajutorul unei mulţimi, în felul următor. Fie V_a mulţimea dată a tuturor mulţimilor de ordin a şi fie P mulţimea putere corespunzătoare lui V_a. Atunci fiecare condiţie $C(x)$ defineşte o mulţime de membri x cu toţii în P, sau o submulţime a lui P, adică un membru al mulţimii Q, mulţimea putere a lui P. Dacă utilizăm indicii inferiori a, p, q pentru variabilele avînd domeniul de variaţie V_a respectiv P, respectiv Q, atunci condiţiile $C(x_p)$ şi mulţimile definite de ele sînt determinate de următoarele clauze:

$$(Ez_q)\,(x_p)\,(y_a)\,(\langle x_p,\ y_a\rangle \in z_q \equiv y_a \in x_p).$$

$$(u_q)\,(v_q)\,(Ez_q)\,(y_a)\,(x_p)\,(\langle x_p,\ y_a\rangle \in z_q \equiv (\langle x_p,\ y_a\rangle \notin u_q\ \&\ \langle x_p,\ y_a\rangle \notin v_q)).$$

$$(u_q)\,(Ez_q)\,(x_p)\,(y_a)\,(\langle x_p,\ y_a\rangle \in z_q \equiv (Ew_a)\,\langle x_p,\ w_a,\ y_a\rangle \in u_q).$$

$$(u_q)\,(Ez_q)\,(x_p)\,(y_a)\,(w_a)\,(\langle x_p,\ y_a,\ w_a\rangle \in z_q \equiv \langle x_p,\ w_a\rangle \in u_q).$$

$$(u_q)\,(Ez_q)\,(x_p)\,(y_a)\,(w_a)\,(t_a)\,(\langle x_p,\ y_a,\ w_a,\ t_a\rangle \in z_q \equiv \langle x_p,\ w_a,\ y_a,\ t_a\rangle \in u_q).$$

$$(u_q)\,(Ez_q)\,(x_p)\,(y_a)\,(w_a)\,(t_a)\,(\langle x_p,\ y_a,\ w_a,\ t_a\rangle \in z_q \equiv \langle x_p,\ w_a,\ t_a,\ y_a\rangle \in u_q).$$

Deci este posibil să definim o funcţie $g(a, m)$ în teoria clasică a mulţimilor, astfel încît pentru orice ordinal clasic a, $g(a, m)$ să fie mulţimea definită de a m-a condiţie $C(x_p)$ pentru acel a.

În acest chip, este posibil să modificăm definiţia lui F (Gödel 1940, p. 37) pentru a incorpora clauza că, pentru orice a, ordinul următor include şi mulţimile y_p, pentru care există un m, astfel încît y_p este intersecţia tuturor membrilor lui $g(a, m)$ şi y_p însuşi aparţine lui $g(a, m)$. Se poate prevedea, de asemenea, o asigurare că fiecare ordin include toate mulţimile de ordin inferior. De exemplu, pentru a explicita lucrurile, am putea dori să utilizăm o funcţie $F(\alpha, \beta, m)$, unde $\beta \leqslant \alpha$, fiind dată pentru fiecare α, a m-a mulţime nouă introdusă de ordin β. Pentru fiecare α, aceasta va da toate mulţimile de ordin α.

Acum putem continua, spunînd că o mulţime este predicativă, dacă ordinul ei este un ordinal predicativ. Iar un ordinal este predicativ, dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii: (i) ordinalul este o mulţime finită, (ii) ordinalul este primul ordinal infinit ω sau (iii) există o mulţime predicativă y bineordonată cu ajutorul unei mulţimi predicative z izomorfă cu y cu privire la relaţia de ordine naturală $\in$ şi z (a se compara cu definiţia formală de la Gödel 1940, p. 22).

Cu aceasta am încheiat schiţarea primei propuneri de definiţie a predicativităţii. O putem considera încă prea restrînsă, deoarece, de exemplu, nu este evident că mulţimile B şi C vor fi predicative conform cu această definiţie şi pentru că, în general, ar putea fi căi acceptabile de extindere care nu sînt anticipate în mod adecvat de această definiţie. Ajungem astfel la o a doua propunere, care depinde de teoria clasică a mulţimilor într-o măsură chiar şi mai mare.

Să luăm iarăşi sistemul lui Gödel 1940 şi să adăugăm un predicat nou P, cu unica axiomă nouă că, pentru mulţimi arbitrare x şi y, dacă x este bineordonat prin y iar toate y-secţiunile proprii lui x au proprietatea P, atunci şi x are proprietatea P. O mulţime este predicativă, atunci cînd ea are proprietatea P. (Pentru definiţiile formale ale noţiunilor cuprinse aici a se vedea

Gödel 1940, p. 21.) De exemplu, mulțimea vidă posedă, în mod banal, proprietatea P, toate ordinalele finite au proprietatea P în virtutea iterării, apoi primul ordinal infinit are proprietatea P și așa mai departe. În teoria inițială a mulțimilor nu avem o cale vădită pentru a defini o clasă care satisface axioma lui P, dar nu conține membri străini, deoarece o asemenea definiție explicită ar necesita o variabilă de clase legată. Deoarece predicatul P nu este permis în cadrul definirii mulțimilor, nu putem, de exemplu, să definim mulțimea tuturor bineordonărilor predicative enumerabile și să obținem pe această cale vreo contradicție. Cu această definiție este foarte ușor să definim predicativitatea relativă la o mulțime dată: trebuie numai să adăugăm că ea are proprietatea P^*, că toți membrii ei, membrii membrilor săi etc. au proprietatea P^*, P^* satisface axiomele lui P, iar o mulțime este predicativă relativ la mulțimea dată, atunci cînd are proprietatea P^*. O clasă este predicativă, atunci cînd toți membrii săi, membrii membrilor săi etc. au proprietatea P.

§ 7. SISTEMUL H: TEORIA HIPERARITMETICĂ A MULȚIMILOR

Faptul că mulțimile hiperaritmetice coincid cu cele aritmetice, în sensul lui Herbrand, și rezultatul surprinzător al lui Spector, că bineordonările hiperaritmetice nu pot da mai mult decît ordinalele recursive, tind să întărească stabilitatea mulțimilor hiperaritmetice. Deoarece majoritatea lucrărilor care se ocupă cu mulțimile hiperaritmetice se referă doar la mulțimi de întregi nenegativi, pare natural să considerăm și o creștere simultană a nivelelor. Tocmai în acest sens vom înțelege aici teoria hiperaritmetică a mulțimilor. La Wang 1954 s-a dat o schemă, pentru care nu s-a obținut o decizie în ce privește clasele de ordinale utilizate, deși s-a considerat că se face uz cel puțin de ordinalele recursive. Dacă ne decidem să facem uz de ordinalele recursive și numai de ele, atunci memoriul de față poate fi considerat ca o încercare de a dezvolta teoria hiperaritmetică a mulțimilor. O dezvoltare mai elegantă este schițată la Spector 1957, cu indicarea unei metode tari care poate fi utilizată pentru a demonstra unele interesante proprietăți de închidere ale mulțimilor hiperaritmetice. Alte proprietăți de închidere sînt date la Kreisel 1959.

Dacă vrem să tratăm chestiunea strict în cadrul teoriei mulțimilor, se pare că sîntem conduși la un sistem formal H, care se obține din teoria clasică a mulțimilor prin anumite modificări destul de simple. În acest scop este mai convenabil să pornim de la sistemul lui Bernays 1937 și 1941. Axiomele lui H sînt chiar axiomele I—VII de acolo cu axioma V_a *(Aussonderungsaxiom)* și axioma mulțimii putere V_d înlocuite respectiv prin contrapărțile lor predicative:

$V_a h$. Subclasele imediat predicative ale fiecărei mulțimi sînt iarăși mulțimi; cu alte cuvinte, dacă în axiomele grupului III toate variabilele de mulțime sînt supuse restricției de a varia pe membrii unei mulțimi, atunci variabilele de clase pot fi înlocuite prin variabile de mulțime (nu independente, vezi mai jos).

$V_d h$. Pentru fiecare mulțime, clasa submulțimilor ei predicative imediate este iarăși o mulțime.

Pentru a ajunge la o măsură a completitudinii naturale, mai adăugăm:

VIII. Axioma categoricităţii: contrapartea relaţiei lui Gödel $V = L$.

În timp ce în teoria clasică a mulţimilor par să existe dubii asupra conformităţii acestei axiome cu semnificaţia intuitivă a conceptului de mulţime, aici ea ne apare ca ceva pe deplin firesc în cadrul intenţiilor noastre.

În sistemul H, cea mai mare parte a dezvoltării standard din matematica clasică, aşa cum este dată la Bernays, poate fi preluată cu uşoare modificări, unica excepţie fiind că nu mai avem la dispoziţie infinităţi de ordin superior. În particular, este foarte plauzibil ca dezvoltarea analizei clasice de către Lorenzen să se poată formaliza în acest sistem.

De asemenea, trebuie să notăm că mulţimea ordinalelor recursive este aici o clasă, dar nu o mulţime.

7.1. Mulţimea 0 este o clasă în sistemul H; cu alte cuvinte, ea se poate defini prin cuantificare pe toate mulţimile hiperaritmetice. Pentru a demonstra acest lucru, modificăm definiţia lui $<_0$, considerînd toate secţiunile sale proprii şi operînd apoi reuniunea.

7.2. Fie că $C(m, x)$ este conjuncţia următoarelor: (i) $\langle 1, 2\rangle \in x$; (ii) x este tranzitiv; (iii) pentru orice y, dacă $\langle 1, y\rangle \in x$ şi $2y \neq m$, atunci $\langle y, 2y\rangle \in x$; (iv) dacă $(y)\,(Ez)\,T(e, y, z)$, $(y)\,(\langle e(y), e(y+1)\rangle \in x)$ şi $m \neq 3^e$ atunci $\langle e(z), 3^e\rangle \in x$.

7.3. Pentru orice m, $m \in 0$, dacă şi numai dacă $(Ey)\,C(m, y)$ şi $(x)\,(C(m, x) \rightarrow m \in x)$.

Pentru această clasă O, în H se poate demonstra principiul inducţiei transfinite.

În sistemul H, axioma II furnizează mulţimile finite, iar axioma infinităţii IV împreună cu axioma înlocuirii V_b ne permite să obţinem ordinale infinite. Axiomele $V_a h$ şi $V_d h$ ne permit să obţinem, la fiecare etapă dată, extinderea predicativă imediată. De fapt, $V_d h$ este redundantă, deoarece fiecare clasă aparţinînd unei clase sau unei mulţimi este iarăşi o mulţime şi deci toate mulţimile pe care le pretinde axioma pot fi obţinute. Pentru a obţine reuniunea la un ordinal limită se poate face uz de axioma înlocuirii şi de axioma mulţimii sumă V_c. Totuşi, ca şi formulările standard ale teoriei numerelor şi teoriei clasice a mulţimilor, sistemul H este incomplet şi complet doar în intenţie. Iar incompletitudinea, ca şi la teoria numerelor se poate caracteriza foarte clar printr-o regulă infinită:

XI. Regula ω_1: dacă o mulţime este un ordinal, putem lua ca axiomă enunţul că ea este un ordinal; sau dacă o mulţime este o bineordonare, putem lua ca axiomă că ea este o bineordonare.

Pare dezirabil să dezvoltăm sistemul H, fără a face apel la regula infinită care poate prezenta interes atunci cînd considerăm interpretarea lui H.

BIBLIOGRAFIE

[1] W. Ackermann, în „Math Z.", **53**, 1951, pp. 403–413.

[2] J. W. Addison şi S. C. Kleene, în „Proc. Am. Math. Soc.", **8**, 1957, pp. 1002–1006.

[3] P. Bernays, în „Jour. Symbolic Logic", **2**, 1937, pp. 65–77; **6**, 1941, pp. 1–17.

[4] A. Church, în „Bull. Am. Math. Soc.", **44**, 1938, pp. 224–232.

[5] A. Church şi C. Kleene, în „Fund. Math.", **28**, 1937, pp. 11–21.

[6] M. Davis, *Computability and Unsolvability*, New York, 1958.
[7] K. Gödel, *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems*, mimeographed, Princeton, 1934.
[8] Idem, *Consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton, 1940.
[9] Idem, *The Philosophy of Bertrand Russell*, 1944, pp. 123—153.
[10] K. J. J. Hintikka, în „Jour. Symbolic Logic", **21**, 1956, pp. 225—245.
[11] S.C. Kleene, în „Jour. Symbolic Logic", **3**, 1938, pp. 150—155.
[12] Idem, în „Am. Jour. Math.", **77**, 1955 a, pp. 405—428.
[13] Idem, în „Trans. Am. Math. Soc.", **79**, 1955 b, pp. 312—340.
[14] G. Kreisel, *Predicative Analysis*, mimeographed, Stanford, 1959.
[15] P. Lorenzen, în „Math. Z.", **54**, 1951, pp. 1—24.
[16] P. Lorenzen, *Einführung in die Operative Logik und Mathematik*, Berlin, 1955.
[17] Idem, în „Jour. Symbolic Logic", **23**, 1958, pp. 110—111.
[18] J. Myhill, în „Jour. Symbolic Logic", **18**, 1953, pp. 190—191.
[19] N. A. Routledge, în „Proc. Camb. Philos. Soc.", **49**, 1953, pp. 175—182.
[20] B. Russell, *Appendix B to Principia Mathematica*, 1925.
[21] K. Schütte, în „Math. Ann.", **127**, 1954, pp. 15—32.
[22] C. Spector, în „Jour. Symbolic Logic", **20**, 1955, pp. 151—163.
[23] Idem, *Summaries of Talks Summer* Inst. Symb. Log., mimeographed, Cornell, 1957, pp. 377—382.
[24] A.M. Turing, în „Proc. London Math. Soc.", **45**, 1939, pp. 161—228.
[25] H. Wang, în „Jour. Symbolic Logic", **19**, 1954, pp. 241—266.
[26] Idem, *Summaries of Talks Summer Inst. Symb. Loc.*, mimeographed, Cornell, 1957, pp. 383—390.
[27] H. Weyl, *Das Kontinuum*, Leipzig, 1918.
[28] A. N. Whitehead și B. Russell, *Principia Mathematica*, vol. 1, 1910.
[29] G. Kreisel, J. Schoenfield, Hao Wang, *Number-theoretic Conceptsand Recursive Well-Orderings*, în „Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, **5** (decembrie, 1959), pp. 42—64.

TABLA DE MATERII

PREFAȚĂ 5

Partea întîi

ASPECTE GENERALE 7

CAPITOLUL I

METODA AXIOMATICĂ 9

§ 1. Geometria și sistemele axiomatice 9
§ 2. Problema adecvării 13
§ 3. Problema evidenței 16
§ 4. Un sistem foarte elementar: L 21
§ 5. Teoria întregilor nenegativi 25
§ 6. Teoremele lui Gödel 30
§ 7. Teoriile formale ca logici elementare aplicate 35
Bibliografie 38

CAPITOLUL II

OPTZECI DE ANI DE STUDII ASUPRA FUNDAMENTELOR 40

§ 1. Analiză, reducere și formalizare 40
§ 2. Antropologismul 45
§ 3. Finitismul 47
§ 4. Intuiționismul, 48
§ 5. Predicativismul: rezultate standard. Despre număr ca entitate 50
§ 6. Predicativismul: analiza predicativă și dincolo de ea. 52
§ 7. Platonismul 54
§ 8. Logica în sens restrîns 58
§ 9. Aplicații 61

CAPITOLUL III

DESPRE FORMALIZARE 63

§ 1. Sistematizarea 63
§ 2. Comunicarea 64
§ 3. Claritate și consolidare 65
§ 4. Rigoarea 66
§ 5. Aproximarea intuiției 67

§ 6. Aplicarea în filozofie 69
§ 7. Prea multe cifre 69
§ 8. Limbajul ideal 70
§ 9. Cît de artificial este un limbaj? 71
§ 10. Paradoxele 72

CAPITOLUL IV

AXIOMATIZAREA ARITMETICII 74

§ 1. Introducere 74
§ 2. Calculul lui Grassmann 75
§ 3. Scrisoarea lui Dedekind 78
§ 4. Eseul lui Dedekind 80
§ 5. Adecvarea caracterizării date de Dedekind 82
§ 6. Dedekind şi Frege 85
Bibliografie 86

CAPITOLUL V

CALCULUL 87

§ 1. Conceptul de calculabilitate 87
§ 2. Funcţii general recursive 93
§ 3. Teorema lui Friedberg-Mucinik 97
§ 4. Metamatematica 101
§ 5. Logica simbolică şi maşinile de calcul 104
§ 6. Controlul erorilor la maşinile de calcul 111
Bibliografie 126

Partea a doua

MAŞINI DE CALCUL

CAPITOLUL VI

O VARIANTĂ A TEORIEI LUI TURING PENTRU MAŞINILE DE CALCUL 129

§ 1. Indroducere 129
§ 2. Maşina de bază *B* 130
§ 3. Toate funcţiile recursive sînt *B*-calculabile 135
§ 4. Instrucţiuni de bază 145
§ 5. Maşini Turing universale 151
§ 6. Maşini pentru demonstrarea teoremelor 154
Bibliografie 159

CAPITOLUL VII

MAŞINI TURING UNIVERSALE: UN EXERCIŢIU DE CODARE 160

CAPITOLUL VIII

LOGICA AUTOMATELOR (în colaborare cu A. W. Burks) 172

§ 1. Introducere 172
§ 2. Automate şi reţele 172
§ 3. Matrice de trecere şi reţele în formă matricială 198
§ 4. Cicluri, reţele şi cuantori 208
Bibliografie 217

CAPITOLUL IX

CĂTRE O MATEMATICĂ MECANICĂ *218*

§ 1. Introducere *218*
§ 2. Calculul propoziţional (Sistemul P) *223*
§ 3. Programul I: Calculul propoziţional P *225*
§ 4. Programul II: Selecţionarea teoremelor în calculul propoziţional *228*
§ 5. Completitudinea şi consistenţa sistemelor P şi P_s *230*
§ 6. Sistemul P_e: Calculul propoziţional cu egalitate *231*
§ 7. Preliminarii la calculul predicatelor *232*
§ 8. Sistemul Q_p şi calculul predicatelor AE *234*
§ 9. Programul III *237*
§ 10. Sistemul Qq şi Q_r: alte formulări ale calculului predicatelor AE *239*
§ 11. Sistemul Q: calculul complet al predicatelor cu egalitate *242*
§ 12. Concluzii *246*
Apendice $I-VII$ *252*
Bibliografie *259*

CAPITOLUL X

SINTEZA CIRCUITELOR CU AJUTORUL ECUAŢIILOR BOOLEENE SECVENŢIALE *261*

§ 1. Prezentarea problemelor şi rezultatelor *261*
§ 2. Funcţionale şi ecuaţii booleene secvenţiale *262*
§ 3. Metoda tabelelor secvenţiale *264*
§ 4. Soluţii deterministe *266*
§ 5. Probleme conexe *271*
§ 6. Un criteriu efectiv pentru rezolubilitatea generală *273*
§ 7. O condiţie suficientă pentru rezolubilitatea efectivă *277*
§ 8. Un criteriu efectiv pentru rezolubilitatea efectivă *280*
§ 9. Forma normală (S) a ecuaţiilor booleene secvenţiale *285*
§ 10. Limbaje aparent mai bogate *289*
§ 11. Maşini Turing şi automate crescătoare *290*
Bibliografie *294*

Partea a treia

TEORIA FORMALĂ A NUMERELOR

CAPITOLUL XI

CALCULUL PREDICATELOR *297*

§ 1. Calculul propoziţiilor *297*
§ 2. Formulări ale calculului predicatelor *299*
§ 3. Completitudinea calculului predicatelor *306*

CAPITOLUL XII

CALCULE ALE PREDICATELOR MULTISORTATE *310*

§ 1. Teorii unisortate şi teorii multisortate *310*
§ 2. Logici elementare cu mai multe sorturi L_n *313*
§ 3. Teorema (I) şi completitudinea lui L_n *315*
§ 4. Demonstraţia teoremei (IV) *316*

CAPITOLUL XIII

ARITMETIZAREA METAMATEMATICII *320*

§ 1. Numerotaţia Gödel *320*
§ 2. Funcţiile recursive şi sistemul Z *327*
§ 3. Lema lui Bernays *329*
§ 4. Traduceri aritmetice ale sistemelor de axiome *335*

CAPITOLUL XIV

DEMONSTRAŢIA DE CONSISTENŢĂ A LUI ACKERMANN *334*

§ 1. Sistemul Z_a *344*
§ 2. Demonstraţia de finitudine *348*
§ 3. Estimări ale substituenţilor *351*
§ 4. Interpretarea demonstraţiilor nefinitiste *353*

CAPITOLUL XV

SISTEME PARŢIALE DE TEORIA NUMERELOR *356*

§ 1. Modelul non-standard al lui Skolem pentru teoria numerelor *356*
§ 2. Unele aplicaţii ale demonstraţiilor formalizate de consistenţa *359*

Partea a patra

TEORIA IMPREDICATIVĂ A MULŢIMILOR

CAPITOLUL XVI

DIFERITE SISTEME DE AXIOME *365*

§ 1. Paradoxele *365*
§ 2. Teoria mulţimilor a lui Zermelo *370*
§ 3. Teoria mulţimilor a lui Bernays *375*
§ 4. Teoria tipurilor, tipuri negative şi „new foundations" *382*
§ 5. Un sistem formal de logică *394*
§ 6. Sistemele lui Ackermann şi Frege *401*
Bibliografie *408*

CAPITOLUL XVII

TĂRIE RELATIVĂ ŞI REDUCTIBILITATE *410*

§ 1. Relaţia între P şi Q *410*
§ 2. Axiomatizarea finită *414*
§ 3. Mulţimifinite şi numere naturale *417*

CUPITOLUL XVIII

DEFINIŢII ALE ADEVĂRULUI ŞI DEMONSTRAŢII DE CONSISTENŢĂ *420*

§ 1. Introducere *420*
§ 2. O definiţie a adevărului pentru teoria mulţimilor a lui Zermelo *422*
§ 3. Observaţii cu privire la construirea definiţiilor adevărului în general *431*
§ 4. Demonstraţii de consistenţă via definiţiile adevărului *434*
§ 5. Relativitatea teoriei numerelor şi în particular a inducţiei *441*
§ 6. Observaţii explicative *447*
Bibliografie *450*

CAPITOLUL XIX

TEORIA NUMERELOR ÎN RAPORT CU TEORIA MULȚIMILOR *451*

§ 1. Teoria generală a mulțimilor *453*
§ 2. Teoria predicativă a mulțimilor *461*
§ 3. Colecții impredicative și ω — consistența *468*
Bibliografie *476*

CAPITOLULU XX

UNELE SISTEME PARȚIALE *477*

§ 1. Cîteva detalii formale cu privire la axiomele claselor *477*
§ 2. O nouă teorie a elementului și numărului *485*
§ 3. O bază de teoria mulțimilor pentru numerele reale *495*
§ 4. Funcții de variabile reale *503*
Bibliografie *505*

Partea a cincea

TEORIA PREDICATIVĂ A MULȚIMILOR

CAPITOLUL XXI

UNELE PREDICATE DEFINITE PRIN SCHEME DE INDUCȚIE *509*

CAPITOLUL XXII

PROPOZIȚII INDECIDABILE SUGERATE DE PARADOXELE SEMANTICE *519*

§ 1. Introducere *519*
§ 2. Preliminarii *520*
§ 3. Condiții cărora trebuie să le satisfacă teoria mulțimilor *522*
§ 4. Paradoxul lui Epimenide *525*
§ 5. Paradoxul lui Richard *527*
§ 6. Observații finale *529*
Bibliografie *530*

CAPITOLUL XXIII

FORMALIZAREA MATEMATICII *531*

§ 1. Păcatul originar al logicianului formal *531*
§ 2. Perspectiva istorică *532*
§ 3. Ce este o mulțime? *533*
§ 4. Nenumărabilul și impredicativul *534*
§ 5. Limitele formalizării *536*
§ 6. O teorie constructivă *537*
§ 7. Numărabilitatea tuturor mulțimilor *539*
§ 8. Compatibilitate și adecvare *541*
§ 9. Axioma reductibilității *545*
§10. Principiul cercului vicios *548*
§11. Mulțimi predicative și numere ordinale constructive *550*
§12. Concluzii *553*

CAPITOLUL XXIV

UNELE DETALII FORMALE DESPRE TEORIILE PREDICATIVE ALE MULȚIMILOR *557*

§ 1. Logica subiacentă *557*
§ 2. Axiomele teoriei *561*
§ 3. Considerații preliminare *565*
§ 4. Teoria întregilor nenegativi *569*
§ 5. Numărabilitatea tuturor mulțimilor *573*
§ 6. Consecințe ale enumerărilor *577*
§ 7. Teoria numerelor reale *579*
§ 8. Modele intuitive *581*
§ 9. Demonstrații de consistență *584*
§ 10. Sistemul *R* *588*

CAPITOLUL XXV

NUMERELE ORDINALE ȘI TEORIA PREDICATIVĂ A MULȚIMILOR *593*

§ 1. Sisteme de notație pentru numerele ordinale *594*
§ 2. Sisteme strict efective *596*
§ 3. Clasa *B* a lui Church-Kleene și o nouă clasă *C* *601*
§ 4. Funcții parțial recursive Herbrand *605*
§ 5. Teoria predicativă a mulțimilor *607*
§ 6. Două încercări de a defini mulțimile predicative *614*
§ 7. Sistemul *H*: teoria hiperaritmetică a mulțimilor *616*
Bibliografie *617*

REDACTOR: AUREL DICU
TEHNOREDACTOR: GHEORGHE POPOVICI

COLI DE TIPAR 39. Tiraj: 3100 ex.
INDICI PENTRU CLASIFICAREA ZECIMALĂ: BIBLIOTECI MARI 16:51; BIBLIOTECI MICI 16.

TIPARUL EXECUTAT SUB COMANDA NR. 1/229
LA ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „13 DECEMBRIE 1918"
STR. GRIGORE ALEXANDRESCU NR. 89-97, BUCUREȘTI,

REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA